ESERCIZI

3.1 - pagina 162-163

1. · Se η, ξ, sono mappe da G a G, allora anche la composta $\eta\xi$ lo è.

· Vale la proprietà associativa: $(\eta\xi)\rho = \eta(\xi\rho)$

· L'identità è un'applicazione da G in G.

Dunque ($\cancel{End}$ F, $\cdot$, 1) è un monoide.

· $\eta \in G^G$, $\xi \in G^G \implies \eta + \xi \in G^G$

infatti $x \in G$, $\eta(x) \in G$, $\xi(x) \in G \implies \eta(x)\xi(x) \in G$ poiché gruppo.

· esiste l'elemento neutro dell'addizione $0 : x \to 1$

infatti $(\eta + 0)(x) = \eta(x) \cdot 0(x) = \eta(x) \cdot 1 = \eta(x) = 1 \cdot \eta(x) = 0(x) \cdot \eta(x) = (0+\eta)(x)$

· esiste la mappa inversa $-\eta \,/\, \eta + (-\eta) = 0$

infatti $(\eta + (-\eta))(x) = \eta(x) \cdot (-\eta)(x) = \eta(x) \cdot [\eta(x)]^{-1} = 1 = 0(x)$

$= 0(x) = 1 = [\eta(x)]^{-1} \cdot \eta(x) = (-\eta)(x) \cdot \eta(x) = ((-\eta) + \eta)(x)$

· la somma è associativa poiché lo è il prodotto in un gruppo

· non vale invece necessariamente la commutatività, infatti

$(\eta + \xi)(x) = \eta(x) \cdot \xi(x)$ $\qquad (\xi + \eta)(x) = \xi(x) \cdot \eta(x)$

e non è detto che $\eta(x) \cdot \xi(x) = \xi(x) \cdot \eta(x)$, poiché non si richiede che G sia un gruppo abeliano.

Dunque $(F, +, 0)$ è un gruppo. ~~additivo~~

In definitiva, $(F, +, \cdot, 0, 1)$ è un gruppo additivo e un monoide moltiplicativo.

2. Si ha il seguente schema:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}\ M \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, "\text{gruppo delle unità}"'] & \mathbb{Z}_n \arrow[d, "\text{gruppo delle unità}"] \\
\mathrm{Aut}\ M \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] & \{\overline{m} \in \mathbb{Z}_n \,/\, (m,n) = 1\}
\end{tikzcd}$$

Dalle relazioni in alto, a sinistra, e a destra, segue quella in basso.

3. L'insieme degli automorfismi è dato dagli endomorfismi rappresentabili con una matrice invertibile e tale per cui l'inversa sia ancora a coefficienti in $\mathbb{Z}$.
Condizione necessaria e sufficiente è data dal fatto che il determinante sia uguale a 1 oppure a -1: la sufficienza è immediata (nel calcolo dell'inversa l'unica operazione che potrebbe far uscire da $\mathbb{Z}$ è la divisione per il determinante), mentre per la necessità, escluso il fatto che il determinante possa essere 0, notiamo che, se il determinante è n con $n \geq 2$, allora almeno un elemento non è multiplo di n, altrimenti il det. sarebbe multiplo di n^2 e $n^2 \nmid n$ per $n \geq 2$. Dunque l'inversa risulta non avere tutti i coefficienti interi.
Analogo ragionamento per $n \leq -2$, da cui la tesi.
In alternativa si può notare che, nota la formula di Binet $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) = \det(BA) = \det(B) \cdot \det(A)$, poiché $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$, dovrà per forza essere $\det(A) = 1$ oppure $\det(A) = -1$.

4. Sono tutti e soli della forma $\eta(x) = ax$ per un certo $a \in \mathbb{Q}$.
Infatti, la determinazione di $\eta(1) = a$, determina univocamente tutti gli $\eta(\frac{n}{d})$ con n, d interi, avendosi infatti $\eta(n) = an$ (sommando n volte) e $\eta(\frac{n}{d}) = \frac{an}{d}$ (poiché ci si trova ad avere $\eta(n) = d \cdot \eta(\frac{n}{d})$ sommando d volte, da cui il risultato).
Ne segue che $End(\mathbb{Q}, +, 0) \cong \mathbb{Q}$

5. In generale non vale, se infatti per esempio $R = \mathbb{R}$, il ragionamento precedente non tiene, poiché $\eta(1)$ fissa solo il valore sui razionali, e non per esempio $\eta(\sqrt{2})$ che può assumere un valore arbitrario al variare del quale si genera un endomorfismo diverso. Il fatto che sia un campo non è correlato, $\mathbb{R}$ lo è e la proprietà non tiene, ma pure $\mathbb{Q}$ lo è eppure in tal caso la proprietà tiene.

3.2 - pagina 164 - 165

1. e 3. Supponiamo che M sia un R-modulo sinistro, ovvero che: sia un gruppo abeliano e che esista una mappa $(a,x) \mapsto ax$ $R \times M \to M$ /:
(i) $a(x+y) = ax + ay$; (ii) $(a+b)x = ax+bx$; (iii) $(ab)x = a(bx)$; (iv) $1x = x$

Se S è un anello che ammette omomorfismo verso R, e definendo $ax = \eta(a)(x)$ per $a \in S$, $x \in M$, allora:

- esiste una mappa $(a,x) \to \eta(a)(x)$ $S \times M \to M$
- (i) : $\eta(a)(x+y) = \eta(a)(x) + \eta(a)(y)$
  poiché per ipotesi $\eta(a) \in R$ e M è R-modulo sinistro.
- (ii) : $\eta(a+b)(x) = \eta(a)(x) + \eta(b)(x)$
  poiché per ipotesi η è omomorfismo.
- (iii) : $(\eta(a)\eta(b))(x) = \eta(a)(\eta(b)(x))$
- (iv) : $1x = x$

sempre per le ipotesi precedenti.

4. $\lambda x = Tx = (x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$

$(\lambda^2+2)x = T^2x + 2x = (x_{n-1}+2x_1, x_n+2x_2, x_1+2x_3, \ldots, x_{n-2}+2x_n)$

$(\lambda^{n-1}+\ldots+1)x = \sum_{i=0}^{n-1} T^i x = (\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i)$

$(\lambda^2-1)x = T^2x - x = (x_{n-1}-x_1, x_n-x_2, x_1-x_3, \ldots, x_{n-2}-x_n)$

$= 0 \iff \left.\begin{array}{l} x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} \\ x_2 = x_4 = \ldots = x_n \end{array}\right\}$ se n è pari

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ se n è dispari.

5. B è costituito da tutti i polinomi multipli di $\lambda^n - 1$.

3.3

a) $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \cong (\mathbb{Z}_n, +, 0)$. Infatti:

consideriamo le seguenti n applicazioni:

$1 \to \bar{0}$ $\quad 1 \to \bar{1}$ $\quad 1 \to \bar{2}$ $\quad \dots \quad 1 \to \overline{n-1}$

$2 \to \bar{0}$ $\quad 2 \to \bar{2}$ $\quad 2 \to \bar{4}$ $\quad \dots \quad 2 \to \overline{n-2}$

$\dots$

$n-1 \to \bar{0}$ $\quad n-1 \to \overline{n-1}$ $\quad n-1 \to \overline{n-2}$ $\quad \dots \quad n-1 \to \bar{1}$

$n \to \bar{0}$ $\quad n \to \bar{0}$ $\quad n \to \bar{0}$ $\quad \dots \quad n \to \bar{0}$

$\dots$

Queste sono tutti e soli gli omomorfismi di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}_n$ visti come gruppi additivi, in quanto la determinazione dell'immagine di 1 fissa tutti gli elementi per additività (1 genera $\mathbb{Z}$), e le n applicazioni pongono come immagine di 1 tutte le immagini possibili. Inoltre è verificata automaticamente anche la condizione $\eta(ax) = a \cdot \eta(x)$, $a \in \mathbb{Z}$ (sono $\mathbb{Z}$-moduli), $x \in \mathbb{Z}$.

Infatti η può essere vista come la composizione del prodotto per uno scalare elemento di $\mathbb{Z}$ a cui segue la proiezione in $\mathbb{Z}_n$; nel caso di $\eta(ax)$ si eseguono prima il prodotto per a e poi le due operazioni, mentre nel caso di $a \cdot \eta(x)$ si eseguono prima le due operazioni e poi il prodotto per a. Il risultato che si ottiene è lo stesso per via del mantenimento del prodotto nella proiezione in classi di resto:

posto $\eta_{\eta(1)}$ lo scalare a cui sopra, si ha infatti che:

$\overline{\eta_{\eta_1} \cdot a \cdot x} = \overline{a \cdot \overline{\eta_{\eta_1} \cdot x}}$.

Poiché questi omomorfismi possono essere sommati come elementi di $\mathbb{Z}_n$, ponendo $\eta_{\bar{a}} + \eta_{\bar{b}} = \eta_{\overline{a+b}}$ dove a pedice di η viene indicata ~~la~~ ~~come~~ l'immagine di 1 del corrispondente omomorfismo, si ha isomorfismo con $(\mathbb{Z}_n, +, 0)$.

b) La prima condizione è verificata soltanto dall'omomorfismo nullo. Se infatti la classe di 1 di $\mathbb{Z}_n$ viene mandata in $a \neq 0$, ovvero $\overline{1} \to a$, allora per sommatività $\overline{n+1} \to (n+1)a$, ma $\overline{1} = \overline{n+1}$, tuttavia $a \neq (n+1)a$ poiché $1 \neq n+1$. D'altro canto per $\overline{m} \to 0$ $\forall \overline{m} \in \mathbb{Z}_n$ l'additività è verificata banalmente. Tale omomorfismo verifica anche la seconda condizione, in quanto $\eta(ax) = 0 = a \cdot \eta(x)$ $\forall a \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}_n$.

Ne segue pertanto che $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$ è triviale.

2. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong (\mathbb{Z}_{(m,n)}, +, 0)$.

Infatti la prima condizione è verificata soltanto nel caso in cui $\overline{1}$ di $\mathbb{Z}_m$ venga mandato in un elemento multiplo di $\overline{\left(\frac{n}{(m,n)}\right)}$ di $\mathbb{Z}_n$. Se infatti $\overline{1} \to \overline{a}$, sommando m volte risulta $\overline{m} \to \overline{am}$; poiché $\overline{m} = \overline{0}$ in $\mathbb{Z}_m$, dovrà essere $\overline{am} = \overline{0}$ in $\mathbb{Z}_n$, ovvero $n \mid am$, il che è equivalente a dire $\frac{n}{(m,n)} \mid a$. D'altro canto ciò è sufficiente a stabilizzare la struttura e a rendere ben definita l'applicazione.

La seconda condizione si verifica supposta la prima per la buona definizione del prodotto nelle proiezioni tra classi di resto che siano a loro volta ben definite, e da ciò ne segue il risultato.

4. Proviamo che, per ogni R-modulo M, $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$.

Per ogni $x \in M$ definiamo l'applicazione:

$$\varphi_x : A \longrightarrow M$$
$$a \mapsto ax$$

Si tratta, evidentemente, di un omomorfismo di A-moduli.

Definiamo quindi l'applicazione:

$$\varphi : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, M)$$
$$x \mapsto \varphi_x$$

che è, a sua volta, un omomorfismo di A-moduli, come è facile verificare. Esso è anche iniettivo: se dati $x, y \in M$ si ha $\varphi_x = \varphi_y$, allora $x = \varphi_x(1) = \varphi_y(1) = y$. Inoltre è suriettivo: per ogni $\psi \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ sia $x = \psi(1)$. Allora, per ogni $a \in A$, $\psi(a) = a \cdot \psi(1) = ax$, per cui $\psi = \varphi_x$.

L'applicazione φ è dunque l'isomorfismo cercato.

3.3.

9. Proviamo il lemma di Schur in un caso più generale.
Siano ρ e ϱ due rappresentazioni irriducibili, e $T: V \to W$ un'applicazione lineare G-invariante. Allora $T \neq 0$ è isomorfismo.
Per provarlo, consideriamo che, essendo T G-invariante, $\ker T$ e $\operatorname{im} T$ sono sottospazi G-invariante. Poichè ρ è irriducibile, $\ker T = 0$, oppure $\ker T = V$. Nel secondo caso $T = 0$, nel primo T è iniettiva e manda i vettori di V in $\operatorname{im} T$ che dunque è $\neq \emptyset$. Ma ϱ è irriducibile, dunque $\operatorname{im} T = \varrho$ e T è suriettivo, pertanto T è isomorfismo.

3. La prima condizione (omomorfismo dei gruppi additivi) fa sì che tutti i possibili candidati siano totalmente determinati da $(1,0) \to e$ e $(0,1) \to f$, poichè, per linearità, dovrà risultare per un generico elemento $(x,y) \to xe + yf$. Per ognuno di questi elementi è poi verificata la seconda condizione, infatti:

$$\eta(ax) = a \cdot \eta(x)$$

$$\eta(a \cdot (u,v)) = a \cdot \eta(u,v)$$

$$\eta(au, av) = a \cdot \eta(u,v)$$

$$e(au) + f(av) = a(eu + fv)$$

vero per la commutatività del prodotto in $\mathfrak{d}$.
Definendo la somma di due tali omomorfismi nel seguente modo:
se η è tale per cui $(1,0) \to e$, $(0,1) \to f$, e
η' è tale per cui $(1,0) \to e'$, $(0,1) \to f'$, allora:
$\eta' + \eta'$ è definito come quello per cui $(1,0) \to e + e'$, $(0,1) \to f + f'$
si ha un'immediata corrispondenza biunivoca tra gli omomorfismi e le coppie (e,f) di $\mathfrak{d}^{(2)}$, che rispetta l'operazione di somma.

2. Cerchiamo $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}[\lambda]$ tali per cui:

$$a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 + a_3 \cdot f_3 = \bar{0}$$

ovvero:

$$a_1 \cdot (2\lambda-1, \lambda, \lambda^2+3) + a_2 \cdot (\lambda, \lambda, \lambda^2) + a_3 \cdot (\lambda+1, 2\lambda, 2\lambda^2-3) = (0,0,0)$$

$$(a_1 \cdot (2\lambda-1) + a_2 \cdot \lambda + a_3 \cdot (\lambda+1),\ a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot \lambda + a_3 \cdot 2\lambda,\ a_1 \cdot (\lambda^2+3) + a_2 \cdot \lambda^2 + a_3 \cdot (2\lambda^2-3)) = (0,0,0)$$

Ne risulta il sistema:

$$\begin{cases} (2\lambda-1) \cdot a_1 + \lambda \cdot a_2 + (\lambda+1) \cdot a_3 = 0 \\ \lambda \cdot a_1 + \lambda \cdot a_2 + 2\lambda \cdot a_3 = 0 \\ (\lambda^2+3) \cdot a_1 + \lambda^2 \cdot a_2 + (2\lambda^2-3) \cdot a_3 = 0 \end{cases}$$

il cui determinante:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda-1 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & \lambda & 2\lambda \\ \lambda^2+3 & \lambda^2 & 2\lambda^2-3 \end{vmatrix}$$

è pari a:

$$(2\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda \\ \lambda^2 & 2\lambda^2-3 \end{vmatrix} - \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda \\ \lambda^2+3 & 2\lambda^2-3 \end{vmatrix} + (\lambda+1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda^2+3 & \lambda^2 \end{vmatrix}$$

$$(2\lambda-1) \cdot (2\lambda^3 - 3\lambda - 2\lambda^3) - \lambda (2\lambda^3 - 3\lambda - 2\lambda^3 - 6\lambda) + (\lambda+1) \cdot (\lambda^3 - \lambda^3 - 3\lambda)$$

$$(2\lambda-1) \cdot (-3\lambda) - \lambda \cdot (-9\lambda) + (\lambda+1) \cdot (-3\lambda)$$

$$-6\lambda^2 + 3\lambda + 9\lambda^2 - 3\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

Il fatto che il determinante sia nullo ci induce a cercare, in analogia a quanto accade con gli spazi vettoriale, di scrivere una terna come combinazione lineare delle altre due.

In questo caso si trova che:

$$-f_1 = (-2\lambda+1, -\lambda, -\lambda^2-3)$$

$$3f_2 = (3\lambda, 3\lambda, 3\lambda^2)$$

$$3f_2 - f_1 = (\lambda+1, 2\lambda, 2\lambda^2-3) = f_3$$

dunque f_3 è c.l. di f_1 ed f_2 a coefficienti in $\mathbb{Q}[\lambda]$, mentre f_1 ed f_2 sono linearmente indipendenti, poiché

$$a_1 \cdot (2\lambda-1, \lambda, \lambda^2+3) + a_2 \cdot (\lambda, \lambda, \lambda^2) = (a_1(2\lambda-1) + a_2 \cdot \lambda,\ \lambda(a_1+a_2),\ a_1(\lambda^2+3) + a_2 \cdot \lambda^2)$$

la cui uguaglianza a $(0,0,0)$ implica $a_1 = -a_2$ per l'annullarsi del secondo elemento, ma allora il terzo elemento è pari a $-3a_2$, e dovendosi annullare $a_2 = 0$, da cui anche $a_1 = 0$.

f_1, f_2 formano quindi una base.

Analogo risultato se avessimo considerato lo λ-submodulo e non il $\mathbb{Q}[\lambda]$-submodulo.

3. 6.

1. Svolgendo un po' di manipolazione algebrica notiamo che:

$$\begin{cases} 2f_1 = (2,0,-2) \\ 2f_1 - f_2 = (0,3,-3) \\ 2f_1 - f_2 - f_3 = (0,0,-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = (3,-3,0) \\ f_1 + f_2 - f_4 = (0,-4,-5) \\ f_1 + f_2 + f_3 - f_4 = (0,-1,-4) \\ -f_1 - f_2 - f_3 + f_4 = (0,1,4) \end{cases}$$

da cui, sommando:

$f_1 - 2f_2 - 2f_3 + f_4 = (0,1,0)$

Otteniamo dunque e_2.

Poiché però $f_3 = 3e_2 + e_3$, sarà $e_3 = f_3 - 3e_2$, esplicitamente:

$(0,0,1) = f_3 - 3(f_1 - 2f_2 - 2f_3 + f_4) = -3f_1 + 6f_2 + 7f_3 - 3f_4$

e infine, poiché $f_1 = e_1 - e_3$, ovvero $e_1 = f_1 + e_3$, sarà:

$(1,0,0) = -2f_1 + 6f_2 + 7f_3 - 3f_4$

Lo spazio generato contiene dunque e_1, e_2, e_3, ed è pertanto $\mathbb{R}^{(3)}$ stesso, di cui e_i è una base

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases}$$

Lo spazio è costituito da tutti i multipli interi della terna $(3,-3,$
e pertanto una sua base è data dalla terna $(3,-3,1)$.

3.7.

1. Osserviamo innanzitutto che ci troviamo nel caso in cui $D = \mathbb{Z}$ è euclideo con mappa $\delta(a) = |a|$.

Riportiamo la matrice di partenza:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Per prima cosa, moltiplichiamola per la matrice di permutazione P_{14}, a sinistra, in modo da ottenere una matrice equivalente che abbia però la prima e l'ultima riga scambiate:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo modo un elemento diverso da zero e tale per cui $\delta(a_{ij})$ sia minimo si trova in posizione $(1,1)$.

Inoltre, poiché -1 divide ogni intero, siamo già al punto della matrice B tale per cui $b_{11} | b_{1k}$ e $b_{11} | b_{k1}$ per ogni k.

A questo punto, applichiamo trasformazioni equivalenti in modo da ~~che~~ formare una nuova matrice C in cui $b_{11} = c_{11}$ e $c_{1k} = c_{k1} = 0$, $k \neq 1$.

Moltiplichiamo la matrice a sinistra per: $T_{21}(2)$, $T_{31}(-3)$, $T_{41}(6)$, ottenendo la seguente avente tutti zeri sotto il primo elemento:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -10 & 11 \\ 0 & -3 & 10 & -13 \\ 0 & 14 & -15 & 30 \end{bmatrix}$$

Ora, moltiplichiamola a destra per $T_{21}(2)$, $T_{31}(-3)$, $T_{41}(5)$, otteniamo la matrice C cercata:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 11 \\ 0 & -3 & 10 & -13 \\ 0 & 14 & -15 & 30 \end{bmatrix}$$

Essendo $b_{11} = -1$, divide già di suo ogni c_{kl}, per cui possiamo ora passare ad operare sulla sottomatrice (c_{kl}).

Per prima cosa scambiamo la seconda e la terza riga:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & -13 \\ 0 & 7 & -10 & 11 \\ 0 & 14 & -15 & 30 \end{bmatrix}$$

Poiché $c_{32} = c_{22} \cdot c_3' + c_{32}'$, con $c_{32} = 7$, $c_{22} = -3$, $c_3' = -2$, $c_{32}' = 1$, quindi tali per cui $1 = \delta(c_{32}') < \delta(c_{22}) = 3$, aggiungiamo alla terza riga il doppio della seconda (in quanto la sottraiamo c_3' volte, ovvero -2 volte), tramite trasformazione equivalente:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & -13 \\ 0 & 1 & 10 & -15 \\ 0 & 14 & -15 & 30 \end{bmatrix}$$

Scambiamo ancora seconda e terza riga in modo da portare l'elemento minimo in modulo in alto a sinistra:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & -15 \\ 0 & -3 & 10 & -13 \\ 0 & 14 & -15 & 30 \end{bmatrix}$$

Ora, $c_{22}'' = 1$, che divide ogni c_{2k}'' e ogni c_{k2}''.
Tramite matrici di tipo T annulliamo questi elementi:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & -58 \\ 0 & 0 & -155 & 240 \end{bmatrix}$$

A questo punto, $c_{22}'' = 1$ divide ogni d_{pq}, e possiamo operare su (d_{pq}). Aggiungiamo alla quarta riga quattro volte la terza, e scambiamole:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 40 & -58 \end{bmatrix}$$

5 non divide 8, ancora non ci siamo. Togliamo all'ultima colonna due volte la terza colonna, e scambiamole:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -138 & 40 \end{bmatrix}$$

3.7.

1. (c) -2 non divide 5, dobbiamo ancora proseguire. Aggiungiamo all'ultima colonna due volte la terza, e scambiamo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -236 & -138 \end{bmatrix}$$

Ora abbiamo che $d^*_{33} = 1$, che divide ovviamente sia d^*_{34} che d^*_{43}. Aggiungiamo all'ultima riga 236 volte la terza:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -610 \end{bmatrix}$$

ora aggiungiamo all'ultima colonna 2 volte la terza:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -610 \end{bmatrix}$$

La procedura è completa. Abbiamo ottenuto la forma normale della matrice di partenza.

2. Questa volta $D = \mathbb{Q}[\lambda]$ è euclideo, ma con $\delta(f(x)) = 2^{\deg f(x)}$. La matrice di partenza è:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda - 17 & 8 & 12 & -14 \\ -46 & \lambda + 22 & 35 & -41 \\ 2 & -1 & \lambda - 4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

Si ha che δ degli elementi diagonali vale 2, mentre vale 1 per gli elementi non diagonali.

Scambiamo dunque prima e terza riga in modo da portare un elemento di δ minimo in alto a sinistra (facciamo in modo di mettere 2 per una questione di comodità nei calcoli, ma sarebbe andato bene qualunque altro elemento invertibile)

$$P_{13} \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \lambda - 4 & 4 \\ -46 & \lambda + 22 & 35 & -41 \\ \lambda - 17 & 8 & 12 & -14 \\ -4 & 2 & 2 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

A questo punto, poiché 2 divide ogni elemento dell'anello, possiamo procedere con le successive trasformazioni.

Moltiplichiamo a sinistra rispettivamente per: $T_{21}(23)$, $T_{31}\left(\frac{17-\lambda}{2}\right)$, $T_{41}(2)$:

$$P^*_{(2)} \cdot A \cdot Q^*_{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \lambda-4 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & 23\lambda-57 & 51 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda-1) & -\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{21}{2}\lambda-22 & 20-2\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda-6 & \lambda+5 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} P^*_{(2)} = T_{41}(2)\cdot T_{31}\left(\frac{17-\lambda}{2}\right)\cdot T_{21}(23)\cdot P_{13} \\ Q^*_{(2)} = I_4 \end{array}$$

e poi a destra rispettivamente per $T_{12}\left(\frac{1}{2}\right)$, $T_{13}\left(\frac{4-\lambda}{2}\right)$, $T_{44}(-2)$:

$$P^*_{(3)} \cdot A \cdot Q^*_{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 23\lambda-57 & 51 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda-1) & -\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{21}{2}\lambda-22 & 20-2\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda-6 & \lambda+5 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} P^*_{(3)} = P^*_{(2)} \\ Q^*_{(3)} = T_{12}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot T_{13}\left(\frac{4-\lambda}{2}\right)\cdot T_{44}(-2) \end{array}$$

Scambiamo ora seconda e quarta colonna in modo da avere un invertibile in alto a sinistra:

$$P^*_{(4)} \cdot A \cdot Q^*_{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 51 & 23\lambda-57 & \lambda-1 \\ 0 & 20-2\lambda & -\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{21}{2}\lambda-22 & \frac{1}{2}(\lambda-1) \\ 0 & \lambda+5 & 2\lambda-6 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} P^*_{(4)} = P^*_{(3)} \\ Q^*_{(4)} = Q^*_{(3)}\cdot P_{24} \end{array}$$

Moltiplichiamo ora a sinistra per: $T_{32}\left(\frac{2\lambda-20}{51}\right)$, $T_{42}\left(\frac{-\lambda-5}{51}\right)$:

$$P^*_{(5)} \cdot A \cdot Q^*_{(5)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 51 & 23\lambda-57 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & F_1(\lambda) & F_2(\lambda) \\ 0 & 0 & F_3(\lambda) & F_4(\lambda) \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} P^*_{(5)} = T_{42}\left(\frac{-\lambda-5}{51}\right)\cdot T_{32}\left(\frac{2\lambda-20}{51}\right)\cdot P^*_{(4)} \\ Q^*_{(5)} = Q^*_{(4)} \end{array}$$

e poi a destra per $T_{23}\left(\frac{57-23\lambda}{51}\right)$, $T_{24}\left(\frac{1-\lambda}{51}\right)$:

$$P^*_{(6)} \cdot A \cdot Q^*_{(6)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 51 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_1(\lambda) & F_2(\lambda) \\ 0 & 0 & F_3(\lambda) & F_4(\lambda) \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} P^*_{(6)} = P^*_{(5)} \\ Q^*_{(6)} = Q^*_{(5)}\cdot T_{23}\left(\frac{57-23\lambda}{51}\right)\cdot T_{24}\left(\frac{1-\lambda}{51}\right) \end{array}$$

dove:

$$F_1(\lambda) = \left(-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{21}{2}\lambda-22\right) + \left(\frac{2\lambda-20}{51}\right)\cdot(23\lambda-57)$$

$$F_2(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda-1) + \left(\frac{2\lambda-20}{51}\right)\cdot(\lambda-1)$$

$$F_3(\lambda) = (2\lambda-6) - \left(\frac{\lambda+5}{51}\right)\cdot(23\lambda-57)$$

$$F_4(\lambda) = -(\lambda-1)\cdot\left(\frac{\lambda+5}{51}\right)$$

3.7.

3. Per prima cosa calcoliamo il determinante della matrice:

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)\cdot \begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \Rightarrow (\lambda+1)\cdot\lambda\cdot(\lambda-4) + 3(\lambda+1)$$

$$+ \quad 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \rightarrow -2(\lambda-4) - 6$$

$$- \quad 6\cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow -6+6\lambda$$

$$= \lambda(\lambda+1)(\lambda-4) + 3(\lambda+1) - 2(\lambda-4) - 6 - 6 + 6\lambda$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 3\lambda + 3 - 2\lambda + 8 - 6 - 6 + 6\lambda$$

Senza calcolare esplicitamente il risultato, possiamo asserire che lo stesso è diverso da zero (il polinomio nullo) poiché c'è un termine di terzo grado il cui coefficiente non si annulla. Dunque la matrice ha rango pieno, e pari a 3.

Calcoliamo ora i fattori invarianti.

Δ_1 è l'MCD dei minori di 1 riga, ovvero degli elementi di A. Vale 1, poiché A ha almeno un elemento unitario, che nel caso dell'anello dei polinomi è ogni costante.

D_2 è l'MCD dei minori di 2 righe. Calcolandoli si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3(\lambda+1) + 6 = -3\lambda - 3 + 6 = -3\lambda + 3 = -3(\lambda-1)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ \lambda & -3 \end{vmatrix} = -6 + 6\lambda = 6(\lambda-1)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda+1-2 = \lambda-1$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -6 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-4) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 2(\lambda-4)+6 = 2(\lambda-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-\lambda = -1(\lambda-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda-4+3 = \lambda-1$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2-4\lambda+3 = (\lambda-3)(\lambda-1)$$

dunque $\Delta_2 = \lambda - 1$

Per Δ_3, bisogna calcolare esplicitamente il determinante a cui prima. Svolgendo i calcoli esso risulta essere pari a $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3$. Allora:

$\Delta_1 = 1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $d_1 = \Delta_1 = 1$

$\Delta_2 = \lambda - 1$ $\qquad$ da cui: $\qquad$ $d_2 = \Delta_2 \cdot \Delta_1^{-1} = \lambda - 1$

$\Delta_3 = (\lambda-1)^3$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $d_3 = \Delta_3 \cdot \Delta_2^{-1} = (\lambda-1)^3 \cdot (\lambda-1)^{-1} = (\lambda-1)^2$

dove d_1, d_2, d_3 sono i fattori invarianti, definiti a meno di elementi invertibili.

3.7.

4. Consideriamo il caso 2x2. Allora; l'unica matrice di permutazione diversa dall'identità è:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Questa può essere ottenuta come prodotto nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L:T_{12}(1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L:T_{21}(-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L:T_{12}(1)]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L:D_2(-1)]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il procedimento può essere generalizzato per provare che ogni matrice di permutazione elementare può essere ottenuta come prodotto di matrici di tipo T e di tipo D.
Siano infatti $x_1 = [1\ 0\ ..\ 0]$, $x_2 = [0\ 1\ ..\ 0]$, ..., $x_n = [0\ 0\ ..\ 1]$ i vettori riga, le matrici in questione possono, sotto questa notazione, essere scritte a blocchi come:

$$I = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad P_{ij} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Vediamo ora che si può passare da una all'altra tramite:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow[L:T_{ij}(1)]{} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i + x_j \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow[L:T_{ji}(-1)]{} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i + x_j \\ \vdots \\ -x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow[L:T_{ij}(1)]{} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ -x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow[L:D_j(-1)]{} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Questo ci permette di affermare che ogni matrice che sia prodotto di matrici di tipo T, D, P, può essere scritta anche come prodotto di sole matrici T e D.

Per provare che, se D è euclideo, ogni matrice invertibile A in $M_n(D)$ è prodotto di matrici elementari, è sufficiente considerare le trasformazioni che la riducono in forma normale. Sia dunque N la sua forma normale, e valga $N = PAQ$. Poiché A è invertibile, ha come determinante una quantità invertibile in D. P e Q pure sono invertibili per ipotesi, e allora lo è anche N, che è ~~dunque~~ diagonale, ~~e composta da elementi~~ e può essere scritta come $\prod_{i=1}^{n} D_i(v_i)$, dove gli v_i sono gli elementi diagonali ordinati di seguito. Possiamo dunque scrivere $A = P^{-1} N Q^{-1}$, dove, essendo P prodotto di matrici elementari, lo è anche la sua inversa P^{-1}, dal momento che l'inversa di una matrice elementare è ancora una matrice elementare. Stesso discorso per Q^{-1} rispetto a Q, mentre N è prodotto di matrici elementari poiché, essendo invertibile, fa sì che lo siano tutti gli v_i considerati, e che effettivamente ogni $D_i(v_i)$ sia una matrice elementare. Dunque abbiamo scritto A come prodotto di sole matrici elementari.

3.7.

5. Osserviamo innanzitutto come una matrice di determinante 1 sia totalmente e unicamente determinata da tutti i suoi elementi tranne uno, che viene di conseguenza affinché la stessa sia ~~[illegible]~~ di det 1.
Cominciamo dal caso 2×2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L: T_{12}(a_{12})} \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R: T_{21}\left(\frac{a_{11}-1}{a_{12}}\right)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \frac{a_{11}-1}{a_{12}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L: T_{21}(c)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & b \end{bmatrix}$$

dove $c = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} - \dfrac{a_{11}-1}{a_{11}a_{12}}$, ~~[illegible]~~ $b = \dfrac{1 + a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}}$

Questo nel caso in cui sia a_{11}, che a_{12}, siano diversi da zero. Restano da analizzare i casi in cui $a_{11} = 0$, oppure $a_{12} = 0$ (entrambi non è possibile, in quanto l'intera prima riga nulla, annullerebbe il determinante).
Si voglia dunque ottenere una matrice in cui $a_{11} = 0$.
Allora la stessa si ottiene con le seguenti trasformazioni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L: T_{12}(a_{12})} \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R: T_{21}\left(-\frac{1}{a_{12}}\right)} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -\frac{1}{a_{12}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L: T_{21}\left(\frac{a_{22}-1}{a_{12}}\right)} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -\frac{1}{a_{12}} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Se invece è a_{12} a doversi annullare:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L: T_{21}(a_{21})} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L: T_{12}\left(\frac{a_{11}-1}{a_{21}}\right)} \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{11}-1}{a_{21}} \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R: T_{12}(c)} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & \frac{1}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

con $c = \dfrac{1}{a_{11} \cdot a_{21}} - \dfrac{1}{a_{21}}$

dove $a_{11} \neq 0$ per quanto asserito prima, ma a_{21} non a priori necessariamente. D'altra parte però è sufficiente per aggirare il problema, nel caso in cui sia $a_{21} = 0$, svolgere lo stesso procedimento sostituendo, ad a_{21}, a_{11}, e poi, giunti alla forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{11} & \frac{1}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

moltiplicare ancora a sinistra per $T_{21}\left(\frac{a_{21}-a_{11}}{a_{11}}\right)$, e ottenere la matrice desiderata.

Per matrici di dimensione arbitraria, iniziamo considerando che un campo è un anello euclideo, ponendo semplicemente $\delta(x) = 1$ per ogni x. Le matrici di determinante 1 sono invertibili, quindi, in virtù del risultato dell'esercizio precedente, possono essere espresse come prodotto di matrici di tipo T e di tipo D. Inoltre, le matrici di tipo D, avendo il solo effetto di moltiplicare per uno scalare una riga o una colonna, ed essendo diagonali, commutano fra di loro. Ad ogni modo, vale $A = P^{-1}NQ^{-1}$, dove P^{-1} e Q^{-1} sono prodotti di sole matrici di tipo T, in quanto eventuali permutazioni che coinvolgono una matrice del tipo $D_j(-1)$ (vedere esercizio precedente) possono essere eseguite a meno del segno. Dunque $\det(P^{-1}) = \det(Q^{-1}) = 1 = \det(A)$, e dovrà essere $\det(N) = 1$. Il problema si riduce dunque a provare che ogni matrice diagonale di determinante 1 è prodotto di matrici di tipo T (poiché $N = \prod_{i=1}^{n} D_i(u_i)$)

Per le matrici 2×2 è sufficiente seguire l'ultimo procedimento riportato nella prima parte di questo esercizio, che tramite matrici di tipo T trasforma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & (a_{11})^{-1} \end{bmatrix}$, $\forall\, a_{11} \neq 0$; per matrici più grandi, si opera consecutivamente, prima sulle prime due righe, poi sulla seconda e sulla terza, e così via, fino ad operare sulla penultima e sull'ultima, trasformando progressivamente:

3.7

5. (c)
$$\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L:T_{21}(a_{11})} \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ a_{11} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L:T_{12}\left(\frac{a_{11}-1}{a_{11}}\right)} \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{11}-1}{a_{11}} & & & 0 \\ a_{11} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R:T_{12}(c)} \begin{bmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ a_{11} & \frac{1}{a_{11}} & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L:T_{21}(-1)} \begin{bmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & \frac{1}{a_{11}} & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

con $c = \frac{1}{a_{11}^2} - \frac{1}{a_{11}}$

$$\ldots \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22}} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\ldots \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & a_{n-1,n-1} & \\ & & & & b \end{bmatrix}$$

operando successive trasformazioni ~~simili~~ sulla falsariga di quelle che sono state applicate per modulare le prime due righe, e che coinvolgono unicamente matrici di tipo T. Si noti che l'elemento b non può essere modulato, e infatti per l'unitarietà del determinante esso sarà determinato da $\prod_{i=1}^{n-1} (a_{ii})^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_{ii}\right)^{-1}$.

Questo prova la nostra tesi.

N.B: in questo esercizio ed in quello precedente, abbiamo denotato con L : A la moltiplicazione a sinistra per la matrice A, mentre con R : A la moltiplicazione a destra per la matrice A.

3.7.

6. Se $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, la tesi è banale; poiché $d = 0$, $Q = I_n$.
Supponiamo dunque che almeno uno di essi sia diverso da zero.
~~Sia inizialmente a1 ≠ 0~~ Possiamo vedere il vettore $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ come una matrice di dimensioni $1 \times n$.
Pertanto esso può essere ridotto nella forma normale $(d, 0, \dots, 0)$, dove non sono necessarie moltiplicazioni a sinistra, poiché, essendo il vettore una matrice di una sola riga, non sono ovviamente necessarie trasformazioni che coinvolgano righe diverse (che nemmeno sono presenti).
L'unico elemento non nullo della forma normale risulta essere il massimo comun divisore poiché il procedimento di riduzione ricalca l'algoritmo euclideo, facendo sì che ad ogni elemento venga sostituito il suo resto della divisione per un altro elemento.

7. Il caso 2×2 è l'applicazione base del teorema di Bézout: dati a_{11} e a_{12} primi tra loro, esistono m, n tali per cui $a_{11} m + a_{12} n = 1$, e dunque è sufficiente porre $a_{21} = -n$, $a_{22} = m$
Nel caso generale, è sufficiente notare che, per l'esercizio precedente, essendo in questo caso le quantità prime tra loro, vale:

$$[a_{11} \ a_{12} \ .. \ a_{1n}] \, Q = [1 \ 0 \ .. \ 0]$$

$$[a_{11} \ a_{12} \ .. \ a_{1n}] = [1 \ 0 \ .. \ 0] \, Q^{-1}$$

Ora, eseguendo la seguente operazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q^{-1} = I_n Q^{-1}$$

si ottiene una matrice che ha come prima riga $[a_{11} \ a_{12} \ .. \ a_{1n}]$, come altre righe elementi $a_{21}, .., a_{nn}$, e che è invertibile poiché prodotto di matrici invertibili; dunque gli $a_{21}, .., a_{nn}$ sono proprio quelli cercati.

3.7.

9. Nell'esercizio 3 abbiamo visto una tecnica costruttiva per trovare i fattori invarianti che li esprime in funzione solamente dei minori della matrice considerata. La tesi discende ora dal fatto che le sottomatrici della matrice trasposta sono le stesse di quella di partenza a meno della trasposizione, e il determinante è invariante per trasposizioni.

10. (a) Consideriamo la procedura classica di inversione delle matrici. Visivamente mostreremo la proprietà per una matrice 4×4 in cui l'elemento a si trova in posizione $(2,4)$, ma tutte le considerazioni e le operazioni svolte non tengono in alcun modo conto di queste specifiche, e sono pertanto valide in generale.
Abbiamo la nostra matrice di partenza. Trasponiamola:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 1+e_{ij} \xrightarrow{t} 1+e_{ji}$$

Ora, sostituiamo ogni elemento con il minore associato.
I minori associati agli elementi diagonali valgono tutti 1, poiché le sottomatrici sono triangolari, il determinante è dunque il prodotto degli elementi diagonali, che sono tutti unitari, e gli elementi a_{ii} sono di somma di indici $i+i = 2i$, cioè pari.
I minori associati a tutti gli elementi non diagonali, tranne quello di posizione (i,j), valgono 0, poiché contengono almeno una riga completamente nulla.
Il minore associato all'elemento di posizione (i,j) vale $-a$, una verifica diretta mostra infatti che il determinante della sottomatrice associata è a se $i+j$ è dispari, $-a$ se è pari.
L'ultima operazione è la divisione per il determinante, che però è 1, e dunque lascia immutata la matrice. Ciò prova la tesi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{sost} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{div} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) Sempre nella rappresentazione visiva di prima, abbiamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \cdot B$$

ovvero:

$A(i,j) = a$ $\quad B(i,j) = b$

$A(k,k) = 1$ $\quad B(k,k) = 1$ $\quad 1 \leq k \leq n$

$A(\ell,m) = 0$ $\quad B(\ell,m) = 0$ $\quad 1 \leq \ell, m \leq n$, $\ell \neq m$, $(\ell,m) \neq (i,j)$

Eseguendo il prodotto matriciale, si nota che:

- gli elementi diagonali restano unitari, poiché ne risulta la somma di prodotti $1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \ldots + 0 \cdot 0$ con eventualmente la presenza di un $a \cdot 0$ o di uno $0 \cdot b$;
- gli elementi non diagonali non nella posizione (i,j) restano nulli, poiché ne risulta la somma di prodotti $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \ldots + 0 \cdot 0$, sempre con eventuali $a \cdot 0$ o $0 \cdot b$;
- l'elemento nella posizione (i,j) ha come unici addendi non nulli i prodotti $a \cdot 1$ e $1 \cdot b$, e vale pertanto $a+b$.

Dunque, detta $C = A \cdot B$, sarà:

$C(i,j) = a+b$

$C(k,k) = 1$ $\quad$ stesse condizioni a cui sopra $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C(\ell,m) = 0$ $\quad$ "

3.7.

10. (iii) Facciamo ancora uso di una rappresentazione visiva.
Lavoriamo con le matrici 4×4, e siano $i=2$, $j=3$, $k=4$. Allora:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Moltiplicando tra di loro le prime due e le seconde due si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & ab \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & ab \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In generale, per matrici e indici qualunque, scriviamo:

$$[T_{ij}(a)]^{-1} \cdot [T_{jk}(b)]^{-1} \cdot T_{ij}(a) \cdot T_{jk}(b) =$$
$$= T_{ij}(-a) \cdot T_{jk}(-b) \cdot T_{ij}(a) \cdot T_{jk}(b)$$
$$= [(1 - a \cdot e_{ij}) \cdot (1 - b \cdot e_{jk})] \cdot [(1 + a \cdot e_{ij}) \cdot (1 + b \cdot e_{jk})]$$
$$= (1 - a \cdot e_{ij} - b \cdot e_{jk} + ab \cdot e_{ik})(1 + a \cdot e_{ij} + b \cdot e_{jk} + ab \cdot e_{ik})$$
$$= 1 + ab \cdot e_{ik}$$
$$= T_{ik}(ab)$$

(iv) Supponiamo inizialmente $i \neq j \neq k \neq l$. In tal caso allora le operazioni apportate dai prodotti per $T_{ij}(a)$, $T_{kl}(b)$, coinvolgono righe e colonne distinte tra di loro, e pertanto non è importante l'ordine con cui le si eseguono. Si ha dunque commutatività, e allora $x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}xy^{-1}y = 1$.
Supponiamo ora che ci siano delle uguaglianze. Si ha $i \neq j$, $k \neq l$, per la definizione delle matrici di tipo T, e $i \neq l$, $j \neq k$, per l'ipotesi sugli indici. Allora le uniche uguaglianze possibili sono date da $i = k$, $j = l$. Nel ~~primo~~ secondo caso, la colonna j-esima viene aumentata consecutivamente di: $-a$ volte l'i-esima, $-b$ volte la k-esima, a volte l'i-esima, b volte la k-esima. Si verifica immediatamente che la somma di questi incrementi è zero.
Nel primo caso invece, si aumenta la j di $-a \cdot i$, poi la l di $-b \cdot i$, poi la j di $a \cdot i$, poi la l di $b \cdot i$; anche in questo caso la somma è zero, e dunque la matrice associata è quella identica.

3.8.

1. $D^{(n)} = \mathbb{Z}^{(3)}$

$K = \langle (2,1,-3), (1,-1,2) \rangle$

$M \cong \mathbb{Z}^3 / K$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ generatori di M

e_1, e_2, e_3 generatori di $\mathbb{Z}^3$

f_1, f_2 generatori di K

$$\begin{cases} f_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + a_{13} e_3 = 2e_1 + e_2 - 3e_3 \\ f_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + a_{23} e_3 = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Operiamo ora sulla matrice A:

$$Q^*_{(1)} \cdot A \cdot R^*_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad Q^*_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R^*_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^*_{(2)} \cdot A \cdot R^*_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix} \qquad Q^*_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad R^*_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^*_{(3)} \cdot A \cdot R^*_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix} \qquad Q^*_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad R^*_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^*_{(4)} \cdot A \cdot R^*_{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix} \qquad Q^*_{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad R^*_{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^*_{(5)} \cdot A \cdot R^*_{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad Q^*_{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad R^*_{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^*_{(6)} \cdot A \cdot R^*_{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q^*_{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad R^*_{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q^*_{(7)} \cdot A \cdot R^*_{(7)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad Q^*_{(7)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad R^*_{(7)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^*_{(8)} \cdot A \cdot R^*_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q^*_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad R^*_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{diag}\{1,1\} = Q^*_{(8)} \cdot A \cdot R^*_{(8)} = QAP^{-1}$ se $Q = Q^*_{(8)}$, $P = \left(R^*_{(8)}\right)^{-1}$

dunque:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 + 2e_3 \\ e_2' = 3e_2 - 7e_3 \\ e_3' = e_2 - 2e_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1' = f_2 \\ f_2' = f_1 - 2f_2 \end{cases}$$

Notiamo che $e_1' = 1 \cdot f_1' = f_1'$ e $e_2' = 1 \cdot f_2' = f_2'$, come è giusto che sia, dal momento che gli elementi diagonali della matrice ridotta erano pari a 1. Ora:

$y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3$

$y_2 = 3x_2 - 7x_3$

$y_3 = x_2 - 2x_3$

formano un insieme di generatori di M, che sono inoltre immagini della base e_i' secondo l'epimorfismo η che manda gli elementi di e_i negli elementi di x_i.

3.8.

5. Per $n=1$ è ovvio, poiché $y = a_1 x_1$ dove le uniche scelte possibili per a_1 sono -1 e 1, nel secondo caso $y = x_1$, mentre nel primo $y = -x_1$ genera M se x_1 lo genera.
Per $n=2$, siano $b_1, b_2 \in D$ in maniera tale che valga $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 1$. Allora, $y_1 = y$, $y_2 = -b_2 x_1 + b_1 x_2$ generano M.
Per $n > 2$, si ponga $d = (a_2, \dots, a_n)$. Il caso $d = 0$, ovvero $a_2 = \dots = a_n = 0$, è banale, per cui possiamo assumere $d \neq 0$ e scrivere $a_j = d \cdot a_j'$. Allora $(a_2', \dots, a_n') = 1$, per cui, per induzione, abbiamo un insieme di generatori composto da $y_2 = \sum_2^n a_j' x_j$, $y_3, \dots, y_n$ per $N = \sum_2^n D x_j$. Inoltre, $(a_1, d) = 1$, e $y = a_1 x_1 + d y_2$; il caso $n=2$, applicato in questo frangente, mostra che esiste uno z_2 in $P = Dx_1 + Dy_2$, tale per cui $Dy + Dz_2 = P$. Dunque $y, z_2, y_3, \dots, y_n$, generano M.

6. Se $Dx_1 \cap N \neq 0$, allora $\ell(x_1 + N) < \ell(x_1)$, dunque $\operatorname{ann}(x_1 + N) = (a_1) \neq 0$ e $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$ per $a_i \in D$.
Sia $d = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i = d a_i'$. Allora $(a_1', \dots, a_n') = 1$, quindi per l'esercizio precedente abbiamo un insieme di generatori $y_1 = \sum a_i' x_i$, $y_2, \dots, y_n$. Si ha che $d y_1 = 0$ e $\ell(y_1) \leq \ell(d) \leq \ell(a_1) \leq \ell(x_1)$, nonostante la scelta di $x_1, \dots, x_n$.
Per mostrare che $\operatorname{ann} x_1 \supset \operatorname{ann} y$ per $y \in N$, è sufficiente provare che $\operatorname{ann} x_1 \supset \operatorname{ann} x_j$, $j > 1$, e per simmetria sarebbe $\operatorname{ann} x_1 \supset \operatorname{ann} x_2$. Supponiamo che non lo sia e siano $\operatorname{ann} x_1 = (d_1)$, $\operatorname{ann} x_2 = (d_2)$. Dunque $d_2 \neq 0$, da cui $(d_1, d_2) = d \neq 0$ e $\ell(d) < \ell(d_1) = \ell(x_1)$. Inoltre $d_i = d d_i'$, e $(d_1', d_2') = 1$, ovvero abbiamo un insieme di generatori $y_1, y_2, \dots, y_n$ con $y_1 = d_1' x_1 + d_2' x_2$. Dunque $\ell(y_1) < \ell(x_1)$, contraddizione.

3.9.

1. potenze prime dei d_i:

$(\lambda-1)^3, \ (\lambda^2+1)^2, \ (\lambda-1)(\lambda^2+1)^4, \ (\lambda+2)(\lambda^2+1)^2$

successione:

$d_s = (\lambda-1)^3(\lambda^2+1)^4(\lambda+2)$

$d_{s-1} = (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2$

$d_{s-2} = d_1 = (\lambda^2+1)^2$

dunque $s = 3$

Mettiamo ora in ordine le potenze prime:

$(\lambda-1), \ (\lambda-1)^3, \ (\lambda+2), \ (\lambda^2+1)^2, \ (\lambda^2+1)^2, \ (\lambda^2+1)^4$

assegnando ad ognuna lo status di generatore x_i in ordine progressivo.

Allora:

$Dx_2 + Dx_3 + Dx_6 = Dz_3$

$Dx_1 + Dx_4 = Dz_2$

$Dx_5 = Dz_1$

Ne segue che:

$\operatorname{ann} z_1 = (d_1) = ((\lambda^2+1)^2)$

$\operatorname{ann} z_2 = (d_2) = ((\lambda-1)(\lambda^2+1)^2)$

$\operatorname{ann} z_3 = (d_3) = ((\lambda-1)^3(\lambda^2+1)^4(\lambda+2))$

Poiché tutti i polinomi in questione sono monici, i fattori invarianti di M sono semplicemente gli stessi.

Analogamente, i divisori elementari sono:

$\operatorname{ann} x_1 = ((\lambda-1))$

$\operatorname{ann} x_2 = ((\lambda-1)^3)$

$\operatorname{ann} x_3 = ((\lambda+2))$

$\operatorname{ann} x_4 = ((\lambda^2+1)^2)$

$\operatorname{ann} x_5 = ((\lambda^2+1)^2)$

$\operatorname{ann} x_6 = ((\lambda^2+1)^4)$

3.10

4. Abbiamo che:

$$\lambda \cdot I - A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda & -1 \\ 2 & 0 & 1 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è pari a:

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda & -1 \\ 2 & 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda^2+2\lambda+1) = (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+1)^2$$

$$= (\lambda-1)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda+1)$$

Determiniamone i fattori invarianti con la tecnica utilizzata nell' esercizio 3 del paragrafo 3.7.

Abbiamo che $\Delta_1 = 1$, in quanto $\lambda \cdot I - A$ contiene elementi invertibili. Anche $\Delta_2 = 1$, poiché il minore $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ ha grado 0.

Occupiamoci ora dei minori di ordine 3, definendo come z_{ij} quello che esclude la i-esima riga e la j-esima colonna, il tutto a meno dell' eventuale segno visto che il cambio coincide con il prodotto per l'invertibile -1.

z_{11} va calcolato esplicitamente:

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\cdot(\lambda+1)^2$$

z_{12} è nullo, poiché contiene una riga nulla.

Calcoliamo z_{13}:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = -(\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = -2(\lambda-1)(\lambda+3)$$

proseguiamo con z_{14}:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(\lambda-1)^2$$

TEORIA DELLA RAPPRESENTAZIONE

9. Dimostrare che l'invariante di Casimir non dipende dalla base scelta.

<u>Svolgimento</u>

Consideriamo X_i base dello spazio e Y^i del duale. Ad esse, associamo altre due basi, $X_{i'} = \alpha_{i'}^{i} X_i$, e $Y^{j'} = \beta_j^{j'} Y^j$, dove le sommatorie sono sottintese.

Per la necessità di essere basi duali segue che:

$$\delta_{i'}^{j'} = B_\rho(X_{i'}, Y^{j'}) = B_\rho(\alpha_{i'}^{i} X_i, \beta_j^{j'} Y^j) = \alpha_{i'}^{i} \beta_j^{j'} \delta_i^j$$

da cui $a_{i'}^{k} b_k^{j'} = \delta_{i'}^{j'}$, dunque α e β sono inverse tra di loro.

Sostituendo si giunge a:

$$\sum_{i'=1}^{n} \rho(X_{i'})\rho(Y^{i'}) = \sum_{i'=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \rho(\alpha_{i'}^{i} X_i)\cdot\rho(\beta_i^{i'} Y^i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'}^{i} \beta_i^{i'} \rho(X_i)\rho(Y^i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i)\rho(Y^i)$$

grazie alla linearità di ρ e al fatto che α e β siano inverse.

Ma questo non è altro che l'invariante di Casimir nella base di partenza, che pertanto non dipende dalla stessa, come volevasi dimostrare.