ISTITUZIONI DI GEOMETRIA

- Docenti: prof. A. Conte
  prof. M. Marchisio
  dott. M. Ciavarella
- Struttura Esame:
  - 6 CFU (48 ore)
  - 3 CFU (24 ore, se ci sono 9 CFU in carico)
- Esame:
  - scritto (obbligatorio per le Istituzioni)
    - Presentarsi alla data dello scritto.
      - Esercizio (anche possibile due)
      - Sviluppo di un tema a scelta
      - Tempo: 60 / 90 minuti.
  - orale
    - due domande per i 6 CFU (una a scelta)
    - una domanda supplementare per i 3 CFU
- Orario:
  - Lu 11-13; Ma 11-13; Me 12-13
  - Possibili recuperi (come Ve 22, 16-18)
  - Possibilità di dare l'esame in preappello, sotto forma di esercitazione, indicativamente intorno al 20 gennaio.
- Testi e argomenti:
  - varietà algebriche affini ($\subseteq \mathbb{A}^n$)
  - varietà algebriche proiettive ($\subseteq \mathbb{P}^n$)
  - varietà differenziali
  - (ripasso) topologia generale
  - (ripasso) spazi proiettivi ← [E. Sernesi, "Geometria 1"]
  - (seminpasso) curve algebriche affini e ↓ proiettive
  - algebra commutativa [Dispense Sernesi]
  - insiemi algebrici affini } varietà [(*)]
  - insiemi algebrici proiettivi }
  - varietà differenziali [Cap. 5 E. Sernesi, "Geometria 2"]

(*) Beltrametti - Carletti - Gallarati - Bragadin "Letture su curve, superficie, e varietà proiettive speciali" (capitolo 2)

Disponibili anche dispense del corso.

- Password Moodle: algebrica

RICHIAMI DI TOPOLOGIA

Def. Una topologia su un insieme X è una famiglia τ di sottoinsiemi di X tale per cui:

(i) $\emptyset, X \in \tau$

(ii) τ è stabile rispetto ad un'unione arbitraria

(iii) τ è stabile rispetto ad un'intersezione finita

Gli elementi di τ si dicono aperti di X, e (i), (ii), (iii) sono gli assiomi degli aperti.

Def. (X, τ) spazio topologico

Def. $\mathcal{B}$ è una base di τ se ogni aperto di τ è unione di elementi di $\mathcal{B}$

Def. I chiusi di (X, τ) sono i complementari degli aperti

La famiglia dei chiusi $\mathcal{F}$ soddisfa le seguenti proprietà:

(i) $X, \emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $\mathcal{F}$ è stabile rispetto ad un'unione finita

(iii) $\mathcal{F}$ è stabile rispetto ad un'intersezione arbitraria.

Queste valgono per le leggi di De Morgan

Prop. X è parzialmente ordinato dalla relazione di "finezza" $\sigma < \tau$ (σ è "meno fine" di τ) se ogni aperto di σ è anche aperto di τ (e dunque vale anche per ogni chiuso)

Def. Un intorno di un punto $x \in X$ è un insieme V tale per cui esista U aperto di X con $x \in U \subset V$

Def. $\forall A \subset X$, definiamo:

$$\mathring{A} = \{x \in X \mid A \text{ intorno di } x\}$$

$$\bar{A} = \{x \in X \mid U \cap A \neq \emptyset \ \forall \text{ intorno } U \text{ di } x\}$$

Chiamiamo $\mathring{A}$ parte interna, $\bar{A}$ chiusura.

La parte interna è l'unione di tutti gli aperti di X che sono contenuti in A o equivalentemente il più grande aperto di X contenuto in A.

La chiusura $\bar{A}$ di A è l'intersezione di tutti i chiusi di X che contengono A o equivalentemente il più piccolo chiuso di X che contiene A.

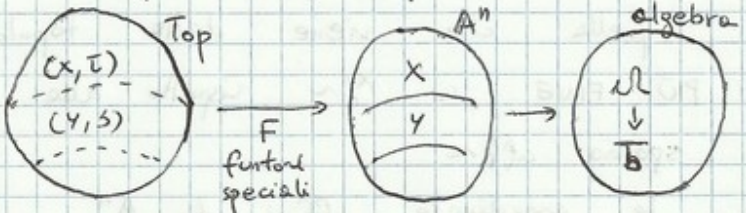
Def. $A \subset X$ è denso se $\bar{A} = X$. Accade se e solo se A interseca tutti gli aperti non vuoti di X
$(\forall U \neq \emptyset \quad A \cap U \neq \emptyset)$

Def. Se $A \subset X$ si definisce una topologia τ_A su A definendo aperti di A le tracce su A degli aperti di X cioè Π è un aperto di τ_A
$\iff \Pi = A \cap N$ con N aperto di τ.
τ_A si dice topologia indotta da τ su A e (A, τ_A) è detto sottospazio di (X, τ)

Def. (X, τ), (Y, σ) due spazi topologici
$f: X \to Y$ un'applicazione f si dice continua nel punto $x \in X$ se $\forall$ intorno V di $f(x)$ $\exists$ un intorno U di x / $f(U) \subset V$.
f è detta continua se è continua in tutti i punti di X.

TFAE
(i) f è continua
(ii) $\forall A \subset Y$ A aperto $f^{-1}(A)$ aperto di X
(iii) $\forall A \subset Y$ A chiuso $f^{-1}(A)$ chiuso di X
(iv) $\forall V$ intorno di $f(x)$ $f^{-1}(V)$ intorno di X

Def. Un'applicazione $f: X \to Y$ si dice OMEOMORFISMO se è continua, invertibile, e l'inversa f^{-1} è continua.
f continua e invertibile, è omeomorfismo se f è aperta (A aperto di $X \Rightarrow f(A)$ aperto di Y)



oggetti: spazi topologici
frecce: omeomorfismi
proprietà invarianti per frecce

Def. (X, τ) è detto compatto se da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito, cioè $X = \bigcup_{i \in I} V_i$ V_i aperto
$\Rightarrow \exists \ J \subset I$ / $X = \bigcup_{j \in J} U_j$

Def. $A \subset X$, A è detto compatto se è tale rispetto alla τ_A.

Def. (X, τ) spazio topologico è detto connesso se $\nexists$ alcun sottoinsieme proprio e non vuoto A di X che sia aperto e chiuso, o equivalentemente se $X = U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 aperti propri di X, $U_1, U_2 \neq \emptyset \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

Un sottoinsieme $A \subset X$ è connesso se è tale rispetto a τ_A.

Una componente connessa di X è un sottoinsieme connesso massimale cioè non propriamente contenuto in alcun sottoinsieme connesso di X.

Le componenti connesse di X sono sottoinsiemi chiusi e costituiscono una partizione di X.

Def. X, Y spazi topologici, $X \times Y$ prodotto cartesiano.

La topologia prodotto su $X \times Y$ è la topologia MENO FINE rispetto alla quale p e q sono continue.

La topologia prodotto su $X \times Y$ ha per base la famiglia dei prodotti $U \times V$, con U aperto di X e V aperto di Y. Gli U formano una base per X e V una base per Y.

- Sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X

  $\pi : X \to X/\sim$ proiezione naturale sul quoziente

  τ topologia su X.

  I sottoinsiemi M di $X/\sim$ / $\pi^{-1}(M)$ sia un aperto di τ sono gli aperti di $X/\sim$

  Formano quella che viene detta topologia quoziente: è la PIÙ FINE su $X/\sim$ rispetto alla quale π è continua.

- $\mathbb{A}^n(K)$ spazio affine

  $y_1, \dots, y_n$ le coordinate affini di $\mathbb{A}^n$

  $$V : K[y_1, \dots, y_n] \longrightarrow \mathbb{A}^n$$
  $$\mathcal{N} \longmapsto V(\mathcal{N}) = \{y \in \mathbb{A}^n \,/\, f(y) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{N}\}$$

  $V(\mathcal{N})$ è il luogo degli zeri dei polinomi di $\mathcal{N}$ {ideali di $K[y_1, \dots, y_n]$}

  $$I : \mathbb{A}^n \longrightarrow K[y_1, \dots, y_n]$$
  $$\text{(U)} \quad X \longmapsto I(X) = \{f \in K[y_1, \dots, y_n] \,/\, f(x) = 0 \quad \forall x \in X\}$$

  polinomi che si annullano su tutto X.

VARIETÀ DIFFERENZIABILI

Richiami

- Denotiamo con $u_1, \dots, u_n$ le funzioni coordinate in $\mathbb{R}^n$. Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$.

  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in U$ $\quad F: U \to \mathbb{R}$ funzione $\quad \underline{v} \in \mathbb{R}^n$

  Indichiamo con $\underline{v}(F)_{\underline{a}}$ la derivata direzionale di F in $\underline{a}$ nella direzione $\underline{v}$

  $\underline{v} = e_j \to e_j(F)_{\underline{a}} =$ j-esima derivata parziale di F in $\underline{a}$

  $\hookrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial u_j}(\underline{a})$

- **Def.** Una funzione $F: U \to \mathbb{R}$ è detta di classe $C^{(k)}$, $k \geq 0$ in U se è continua in U ($C^{(0)}$) e se tutte le sue derivate parziali di ogni ordine $\leq k$ esistono in ogni punto di U e sono funzioni continue.
- Se F è $C^{(k)}$, $k \geq 2$, la sua derivata parziale di ordine $h \leq k$ eseguita rispetto alle variabili $u_{i_1}, \dots, u_{i_h}$ in $\underline{a} \in U$ si denota con:

$$\frac{\partial^h F}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_h}}(\underline{a})$$

- Se $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $F: U \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione $\forall \underline{x} \in U$ si ha $F(\underline{x}) = (F_1(\underline{x}), \dots, F_m(\underline{x}))$, dove $F_i: U \to \mathbb{R}$ $\forall i = 1, \dots, m$ sono le funzioni coordinate (o componenti) di F. Diremo F di classe $C^{(k)}$ in U se le sue funzioni $F_1, \dots, F_m$ sono $C^{(k)}$ in U.
- **Def.** Se $U, V \subset \mathbb{R}^n$ aperti, una biezione $F: U \to V$ si dice diffeomorfismo di classe $C^{(k)}$ ($C^{(\infty)}$) se le compositioni $F: U \to V \subset \mathbb{R}^n$ e $F^{-1}: V \to U \subset \mathbb{R}^n$ sono entrambe applicazioni $C^{(k)}$ ($C^{(\infty)}$).
  Se esiste un diffeomorfismo $F: U \to V$, allora F^{-1} è un diffeomorfismo, e U e V si dicono diffeomorfi di classe $C^{(k)}$ ($C^{(\infty)}$)

Estensione a insiemi di definizione qualsiasi

- **Def.** Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme e sia $F: X \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione. Diremo F di classe $C^{(k)}$ ($C^{(\infty)}$) in X se $\forall x \in X$ $\exists$ un intorno aperto $U_{\underline{x}}$ in $\mathbb{R}^n$ ed una applicazione $F: U_{\underline{x}} \to \mathbb{R}^m$ di classe $C^{(k)}$ ($C^{(\infty)}$) tale

per cui $\overline{F}|_{X \cap U_x} = F|_{X \cap U_x}$.

- **Def.** Se $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ un'applicazione $F: X \to Y$ si dirà di classe $C^{(k)}$ ($C^{(\infty)}$) se la composizione $F: X \to Y \subset \mathbb{R}^m$ è di classe $C^{(k)}$ ($C^{(\infty)}$) in X.
- **Def.** $F: X \to Y$ si dice diffeomorfismo di classe $C^{(k)}$ ($C^{(\infty)}$) se è biettiva di classe $C^{(k)}$ ($C^{(\infty)}$) e anche F^{-1} è di classe $C^{(k)}$ ($C^{(\infty)}$)

  Se tale F esiste, diciamo che X e Y sono diffeomorfi di classe $C^{(k)}$ ($C^{(\infty)}$)

- **Def.** Sia X uno spazio topologico.

  Una coppia (U, φ_U) dove U è un aperto e φ_U è un omeomorfismo di U su un aperto di $\mathbb{R}^n$ si dice una n-carta locale oppure un n-sistema di coordinate locali in X.
  - Due n-carte locali (U, φ_U), (V, φ_V) in X si dicono $C^{(k)}$-compatibili o differenziabilmente compatibili di classe $C^{(k)}$ $(k \geq 0,\ k = \infty)$ se $U \cap V = \emptyset$ oppure se $U \cap V \neq \emptyset$ e l'applicazione $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}: \varphi_U(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V)$ è un diffeomorfismo di classe $C^{(k)}$.

  Scriveremo $\varphi_U(P) = (x_1(P), \dots, x_n(P))$ dove $x_1, \dots, x_n \quad U \to \mathbb{R}$ sono le funzioni componenti dell'applicazione $\varphi_U: U \to \mathbb{R}^n$ che chiameremo coordinate locali in U definite da φ_U.

  U si chiama aperto coordinatizzato di X.

  Oss. Un aperto contenuto in U è ancora un aperto coordinatizzato, in quanto si tratta della restrizione di un'applicazione (carta locale) ad un aperto (più piccolo), che è ancora una carta locale.

  Es. In $\mathbb{R}$ le coppie $(\mathbb{R}, t)$, $(\mathbb{R}, t^3)$ sono 1-carte locali ma non sono $C^{(1)}$-compatibili, infatti la funzione $\sqrt[3]{x}$ non è $C^{(1)}$ in 0.

  Oss. Se due n-carte locali (U, φ_U), (V, φ_V) in X sono $C^{(k)}$-compatibili, allora sono anche $C^{(h)}$-compatibili ogni $0 \leq h \leq k$

22.10.2010

- Siano (U, φ_U), (V, φ_V) due n-carte locali in X tali che $U \cap V \neq \emptyset$; $x_1, \dots, x_n : U \to \mathbb{R}$ le coordinate locali definite da φ_U e $y_1, \dots, y_n$ le coordinate locali definite da φ_V.
  Le componenti dell'applicazione $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$ sono funzioni da $\varphi_U(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$ che si chiamano funzioni di transizione dalle coordinate $x_1, \dots, x_n$ alle coordinate $y_1, \dots, y_n$
- Un n-atlante differenziabile di classe $C^{(k)}$ nello spazio topologico X è una famiglia di n-carte locali $\{(U_\lambda, \varphi_{U_\lambda})\}_{\lambda \in \Lambda}$ tale che $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sia un ricoprimento di X e le carte locali $(U_\lambda, \varphi_{U_\lambda})$ siano a 2 a 2 $C^{(k)}$-compatibili.
- Uno spazio topologico T_2 a base numerabile in cui è assegnato un n-atlante differenziabile $C^{(k)}$ per qualche intero $n \geq 0$ si dice varietà differenziabile di classe $C^{(k)}$ se $k \geq 1$, $k = \infty$; si dice varietà topologica se $k = 0$.
  $n :=$ dimensione della varietà X
  Diciamo anche che l'atlante $A = \{(U_\lambda, \varphi_{U_\lambda})\}_{\lambda \in \Lambda}$ definisce in X una struttura di varietà differenziabile di classe $C^{(k)}$
  In generale si lavorerà su elementi di classe $C^{(\infty)}$.
- Diciamo che due n-atlanti differenziabili $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{(V_\mu, \psi_\mu)\}_{\mu \in M}$ sono equivalenti oppure definiscono la stessa struttura di varietà differenziabile in X
  $\iff$ la loro unione $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda), (V_\mu, \psi_\mu) : \mu \in M, \lambda \in \Lambda\}$ è ancora un atlante differenziabile.
  Ciò equivale a dire che ogni carta locale $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ è differenziabilmente compatibile con ogni carta locale (V_μ, ψ_μ)
  In tal modo per una data struttura di varietà diff. su X $\exists$ un atlante differenziabile massimale ottenuto prendendo l'unione di tutti gli atlanti che definiscono quella data struttura.

  Es. $\mathbb{R}^n$ con atlante $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$
  $U \underset{ap}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ con atlante $\{(U, i)\}$ $i =$ inclusione $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$
  Ogni aperto A di una varietà differenziabile X è ancora una varietà differenziabile della stessa dimensione che si dice sottovarietà aperta di X.

Infatti se $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ è un n-atlante differenziabile di X allora la famiglia: $\{(U_\lambda \cap A \mid \varphi_\lambda|_{U_\lambda \cap A})\}_{\lambda \in \Lambda^*}$, dove $\Lambda^* \subseteq \Lambda$ è il sottoinsieme costituito dagli indici λ tali che $U_\lambda \cap A \neq \emptyset$ è un n-atlante differenziabile di A.

Es. X spazio discreto è una varietà differenziabile di dimensione 0. Le carte locali sono le applicazioni $\begin{array}{ccc} X & \to & \{0\} \\ p & \mapsto & 0 \end{array}$

Def. Una varietà differenziabile (topologica) di dimensione 2 è detta superficie differenziabile (topologica)

Oss. L'importanza delle varietà differenziabili sta nel fatto che ad esse è possibile applicare gli strumenti e i risultati del calcolo infinitesimale in più variabili utilizzando le carte locali per ricondursi allo spazio euclideo.

X = var. diff. $\quad A \subseteq_{\text{op}} X$

- Una funzione $F: A \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile se $\forall$ carta locale (U, φ_U) t.c. $U \cap A \neq \emptyset$ la funzione $F \circ \varphi_U^{-1} \cdot \varphi_U(U \cap A) \to \mathbb{R}$, $\varphi_U(U \cap A) \subseteq \mathbb{R}^n$ è differenziabile

- Siano X, Y varietà differenziabili, con $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$. Un'applicazione $F: X \to Y$ si dice differenziabile oppure morfismo se $\forall$ carta locale (U, φ_U) in X e $\forall$ carta locale (V, ψ_V) in Y la composizione $\psi_V \circ F \circ \varphi_U^{-1}$: $\varphi_U(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile.

  Si dirà diffeomorfismo se è un omeomorfismo e F, F^{-1} sono differenziabili.

Prop.

- $F: X \to Y$ è un diffeomorfismo $\Rightarrow F^{-1}$ è un diffeomorfismo
- La composizione di morfismi è un morfismo
- La composizione di diffeomorfismi è un diffeomorfismo

Se esiste un diffeomorfismo $F: X \to Y$, diciamo che X è diffeomorfa a Y.

Def. Sia X una varietà differenziabile, una curva differenziabile in X è un'applicazione C^∞ $\alpha: J \to X$ dove $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

Def. Un sottospazio X di $\mathbb{R}^N$ si dice sottovarietà differenziabile di dimensione n se $\forall x \in X$ possiede un intorno aperto in X che, come sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$, è diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Struttura differenziabile di una sottovarietà.

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ sottovarietà $\overset{\text{def.}}{\Longrightarrow}$ $\forall x \in X$ $\exists U$ intorno aperto di x in $\mathbb{R}^N$ e $\exists$ diffeomorfismo tra U e un aperto di $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ $\forall x \in X$ $\exists U$ intorno aperto di x in $\mathbb{R}^N$, $\exists$ un'applicazione differenziabile $F_x: U \to \mathbb{R}^n$ che induce una biezione $F_x: U \cap X \to V$, dove $V \underset{\text{ap.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ tale che $F_x^{-1}: V \to U \cap X \subseteq \mathbb{R}^N$ è differenziabile.

$\Rightarrow$ Questo implica che le coppie $(U \cap X, F_x)$ sono n-carte locali tra di loro differenzialmente compatibili al variare di x in X, e quindi costituiscono un atlante differenziabile in X. Quindi X è una varietà differenziabile di dimensione n.

Def. Una parametrizzazione in $\mathbb{R}^N$ è un'applicazione differenziabile $f: A \to \mathbb{R}^N$ definita su un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ che è un diffeomorfismo sull'immagine. In tal caso, l'immagine $f(A)$ è una sottovarietà di dimensione n di $\mathbb{R}^n$

Es. $p \in \mathbb{R}^n$

$\underline{v}$ = vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$t \mapsto p + t\underline{v}$

è una parametrizzazione della retta r passante per p e di direzione $\underline{v}$.

$\Rightarrow$ r è una sottovarietà di dim. 1 di $\mathbb{R}^N$

N.B. Non ogni sottovarietà di $\mathbb{R}^N$ si può ottenere come immagine di una parametrizzazione. Perché non è detto che possegga un atlante costituito da una sola carta locale (f^{-1})

Def. Una sottovarietà di dimensione n in $\mathbb{R}^{n+1}$ è detta ipersuperficie differenziabile

$n=1 \rightarrow$ curve piane differenziabile

$n=2 \rightarrow$ superficie differenziabile in $\mathbb{R}^3$

Lemma Sia $U_{ap} \subset \mathbb{R}^n$ e sia $f: U \to \mathbb{R}$ un'applicazione differenziabile. L'applicazione

$$\varphi: U \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \underline{x} \mapsto \varphi(\underline{x}) = (\underline{x}, f(\underline{x}))$$

è una parametrizzazione, detta parametrizzazione di Monge, che ha per immagine un'ipersuperficie differenziabile di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Osserviamo che l'immagine di φ è il grafico di f.

Dim.
- φ è differenziabile (poiché lo sono le componenti)
- φ è biunivoca sull'immagine
- $\varphi^{-1}: \varphi(U) \to U$, $(x,y) \mapsto x$ è differenziabile (perché è una restrizione della proiezione)

25.10.2010

Esempi:

- La circonferenza $S^1 \subset \mathbb{R}^2$
  - L'applicazione $\varphi^+: (-1,1) \to S^1$, $t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$ è una parametrizzazione di Monge dell'aperto $V^+ = \{(x,y) \in S^1 : y > 0\}$ quindi la sua inversa $(\varphi^+)^{-1}$, ovvero la proiezione sulla prima coordinata, è una carta locale in S^1 relativa all'aperto V^+.
  - Analogamente l'applicazione $\varphi^-: (-1,1) \to S^1$, $t \mapsto (t, -\sqrt{1-t^2})$ è una parametrizzazione di Monge dell'aperto $V^- = \{(x,y) \in S^1 : y < 0\}$ e quindi la sua inversa $(\varphi^-)^{-1}$, ovvero la proiezione sulla prima coordinata, è una carta locale relativa all'aperto V^-.
  - Le carte locali $(V^+, (\varphi^+)^{-1})$, $(V^-, (\varphi^-)^{-1})$ non costituiscono un atlante poiché $(-1,0)$ e $(1,0)$ non appartengono a V^+ o V^-. Per ottenere un atlante differenziabile bisogna considerare anche le due parametrizzazioni di Monge:

$$\psi^+: (-1,1) \to S^1, \quad t \mapsto (\sqrt{1-t^2}, t)$$

$$\psi^-: (-1,1) \to S^1, \quad t \mapsto (-\sqrt{1-t^2}, t)$$

che hanno per inverso la proiezione sulla seconda coordinata definite rispettivamente sugli aperti:

$W^+ = \{(x,y) \in S^1 : x > 0\}$

$W^- = \{(x,y) \in S^1 : x < 0\}$.

Le quattro carte:

$\{(V^+, (\varphi^+)^{-1}), (V^-, (\varphi^-)^{-1}), (W^+, (\psi^+)^{-1}), (W^-, (\psi^-)^{-1})\}$

sono differenziabilmente compatibili, e costituiscono quindi un 1-atlante per S^1, e S^1 è una varietà differenziabile di dimensione 1

Es. Verificare che S^1 è una varietà differenziabile assegnando come carte locali in S^1 le proiezioni stereografiche:

$$\pi_+ : S^1 \setminus \{(0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \frac{x}{1-y}$$

$$\pi_- : S^1 \setminus \{(0,-1)\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \frac{x}{1+y}$$

- La sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$
- Costruiamo un atlante differenziabile per S^2 con le proiezioni stereografiche:

$$\pi_+ : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1,x_2,x_3) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right)$$

$$\pi_- : S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1,x_2,x_3) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}\right)$$

$V_1 = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$

$V_{-1} = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$

$V_{-1} \cup V_1 = S^2 \Longrightarrow V_{-1}, V_1$ costituiscono un ricoprimento di S^2

- $\pi_\pm : V_{\pm 1} \longrightarrow \pi_\pm(V_{\pm 1}) \subset \mathbb{R}^2$ sono omeomorfismi
- sono differenziabilmente compatibili:

$$\pi_-^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{(0,0,1)\}, \quad (x,y) \longmapsto \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, 1-x^2-y^2)$$

$$\pi_+ \circ \pi_-^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \longmapsto \frac{1}{x^2+y^2}(x,y)$$

Prop. Se X e Y sono varietà differenziabili, $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$, allora il loro prodotto cartesiano $X \times Y$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $n+m$ tale che le proiezioni $X \times Y \to X$, $X \times Y \to Y$ sono morfismi.

Dim. Siano:

- (U, φ_U) carta locale in X
- (V, φ_V) carta locale in Y

$\Rightarrow U \times V$ è un aperto in $X \times Y$ e:

$$\varphi_U \times \varphi_V : U \times V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$
$$(a, b) \longmapsto (\varphi_U(a), \varphi_V(b))$$

tale che $(U \times V, \varphi_U \times \varphi_V)$ è una carta locale in $X \times Y$, e ovviamente se $(U' \times V', \varphi_{U'} \times \varphi_{V'})$ è un'altra carta locale allora le 2 carte locali sono differenziabilmente compatibili.

Es. Verificare che le proiezioni sono morfismi

- **Cilindro** $S_1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$

è una superficie differenziabile e un atlante è costituito:

$$(\pi_+, 1_{\mathbb{R}}) : [S^1 \setminus \{(0,1)\}] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, v) \longmapsto \left(\frac{x}{1-y}, v\right)$$

$$(\pi_-, 1_{\mathbb{R}}) : [S^1 \setminus \{(0,-1)\}] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, v) \longmapsto \left(\frac{x}{1+y}, v\right)$$

- **Toro** $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^4$

è una superficie differenziabile. Un atlante differenziabile è costituito dalle 4 carte locali:

$$(\pi_+, \pi_+) : [S^1 \setminus \{(0,1)\}] \times [S^1 \setminus \{(0,1)\}] \to \mathbb{R}^2$$
$$(\pi_+, \pi_-) : [S^1 \setminus \{(0,1)\}] \times [S^1 \setminus \{(0,-1)\}] \to \mathbb{R}^2$$
$$(\pi_-, \pi_+) : [S^1 \setminus \{(0,-1)\}] \times [S^1 \setminus \{(0,1)\}] \to \mathbb{R}^2$$
$$(\pi_-, \pi_-) : [S^1 \setminus \{(0,-1)\}] \times [S^1 \setminus \{(0,-1)\}] \to \mathbb{R}^2$$

SPAZI TANGENTI

Sia X una varietà differenziabile $p \in X$.

Denotiamo con $\mathcal{E}(X,p) = \{f : U \to \mathbb{R}\}$ (U intorno di p) cioè l'insieme delle funzioni a valori reali definite in qualche intorno di $p \in X$

Oss. Se $F, G \in \mathcal{E}(X,p)$, allora le funzioni $F+G$, $F \cdot G$ sono ben definite in un intorno di p che è l'intersezione degli intorni di definizione di F e G.

$\Rightarrow F+G, F \cdot G \in \mathcal{E}(X,p)$

Def. Sia X una varietà differenziabile, $p \in X$. Un vettore tangente a X in p è un'applicazione $v : \mathcal{E}(X,p) \to \mathbb{R}$ tale che:

- $v(aF+bG) = a \cdot v(F) + b \cdot v(G) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}, F,G \in \mathcal{E}(X,p)$
- $v(FG) = v(F) \cdot G(p) + v(G) \cdot F(p)$

L'insieme di tutti i vettori tangenti a X in p si denota con $T_p(X)$ e si chiama spazio tangente a X in p.

Prop.

a) Se $c : X \to \mathbb{R}$ è una funzione costante, allora $v(c) = 0 \quad \forall v \in T_p(X)$

b) Se $F, G \in \mathcal{E}(X,p)$ coincidono in un intorno U di p allora $v(F) = v(G) \quad \forall v \in T_p(X)$

Dim.

a) Sia $1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione costante uguale a 1. Allora:

$$c \cdot v(1) = v(c \cdot 1) = v(c) \cdot 1 + c \cdot v(1)$$
$$0 = v(c) \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad v(c) = 0$$

b) Sia $1_U : U \to \mathbb{R}$ la funzione identicamente uguale a 1 su U

$\overset{Hp}{\Rightarrow} 1_U F = 1_U G$

$$v(1_U F) = v(1_U) \cdot F(p) + 1 \cdot v(F)$$
$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$$
$$v(1_U G) = v(1_U) \cdot G(p) + 1 \cdot v(G)$$
$$\Rightarrow \quad v(F) = v(G)$$

Supponiamo $\dim(X) = n$

Sia $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta locale definita in un intorno U di p e siano $x_1, \dots, x_n$ le funzioni coordinate locali definite da φ

Definiamo i vettori tangenti

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \in T_p(X)$$

ponendo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p (F) = \frac{\partial (F \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)) \qquad \forall\, i = 1, \dots, n$$

dove $u_1, \dots, u_n$ sono le funzioni coordinate in $\mathbb{R}^n$

Lemma I vettori $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ soddisfano le condizioni della definizione di $T_p(X)$, per cui effettivamente vi appartengono.

Lemma $\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_p = \delta_{ij}$

Dim. $\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_p = \frac{\partial (x \circ \varphi^{-1})}{\partial u_j}(\varphi(p)) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

27. 10. 2010

Lemma Sia $\dim(X) = n$, $p \in X$, e siano $x_1, \dots, x_n$ coordinate locali in un intorno di p tale che $x_i(p) = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n$

Allora, $\forall\, F \in \mathcal{E}(X, p)$, $\exists\, F_1, \dots, F_n \in \mathcal{E}(X, p)$ tali che in un intorno di p sussista l'identità di funzioni $F = F(p) + \sum_{i=1}^{n} u_i F_i$ (*)

dove $F(p)$ è la funzione costante con valore $F(p)$

Dim. Sia $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ la carta locale che definisce le coordinate $x_1, \dots, x_n$. Allora $\varphi(p) = 0$.

Sia $G := F \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, 0)$.

Dimostriamo innanzitutto che $\exists\, G_1, \dots, G_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, 0)$ tale che $G = G(0) + \sum_{i=1}^{n} u_i G_i$, dove $u_1, \dots, u_n$ sono funt. coordinate in $\mathbb{R}^n$.

Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ un disco aperto di centro $\underline{0}$ la cui chiusura $\overline{D}$ è contenuta nell'aperto di definizione di G.

$\forall\, \underline{u} = (u_1, \dots, u_n) \in D$, $s \in [0, 1]$ si ha:

$$\frac{d}{ds} G(s, \underline{u}) = \sum \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\underline{u}) \frac{du_i}{ds}(s\underline{u}) = \sum \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\underline{u})\, u_i$$

quindi, poiché $\int_0^1 \frac{d}{ds} G(s\underline{u})\, ds = G(\underline{u}) - G(0)$

$$\Rightarrow \quad G(\underline{u}) = G(0) + \int_0^1 \frac{d}{ds} G(s\underline{u})\, ds$$

$$= G(0) + \int_0^1 \sum \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\underline{u})\, u_i\, ds$$

$$= G(0) + \sum u_i \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\underline{u})\, ds}_{\text{si pone } G_i(\underline{u})} \Rightarrow G = G(0) + \sum u_i G_i$$

Ora: $F = G \circ \varphi$

$$= (G(0) + \sum u_i G_i) \circ \varphi$$

$$= F(p) + \sum (u_i \circ \varphi)(G_i \circ \varphi)$$

Pongo $F_i = G_i \circ \varphi$

Prop. Ponendo $(v+w)(F) = v(F) + w(F)$

$(\alpha v)(F) = \alpha [v(F)]$

$\forall F \in \mathcal{E}(X,p)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $v, w \in T_p(X)$

si definisce su $T_p(X)$ una struttura di spazio vettoriale reale tale che $\dim(T_p(X)) = \dim(X)$

Dim.

- $v, w \in T_p(X) \Rightarrow v+w \in T_p(X)$
- $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in T_p(X) \Rightarrow \alpha v \in T_p(X)$
- $\underline{0} \in T_p(X)$

Dunque $T_p(X)$ è uno spazio vettoriale.

Sia ora $n = \dim(X)$, e $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta locale definita in un intorno U di p e siano $x_1, \dots, x_n$ le funzioni coordinate locali definite da φ.

Dimostriamo che $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ costituiscono una base di $T_p(X)$.

Supponiamo $\varphi(p) = 0$, non restrittivo. Allora:

$\underline{a} = \varphi(p)$, $\psi(x) = \varphi(x) - \underline{a}$ è una carta locale tale che $\psi(p) = 0$, e dette $y_1, \dots, y_n$ le coordinate locali definite da ψ si ha $\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \quad \forall i$

$$\forall F \in \mathcal{E}(X,p) = \frac{\partial F}{\partial x_i} \overset{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(F(p) + \sum_{j=1}^{n} x_j F_j\right)$$

$$= 0 + \sum_j \left\{ \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)_p F_j(p) + x_j(p) \cdot \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)_p \right\}$$

$$= F_i(p)$$

$$v \in T_p(X) \Rightarrow v(F) = v\left(F(p) + \sum_j x_j F_j\right)$$

$$= 0 + \sum_j \left\{ v(x_j) \cdot \underbrace{F_j(p)}_{\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_p} + x_j(p) \cdot v(F_j) \right\}$$

$$\Rightarrow v(F) = \sum_{j=1}^{n} v(x_j) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_p$$

Poichè vale $\forall F \in \mathcal{E}(X,p)$

$$\Rightarrow v = \sum_j v(x_j) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \text{ generano } T_p(X)$$

Resta da dimostrare che sono linearmente indipendenti.

Se $v = \sum_j a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$, allora $v(x_i) = \sum_j a_j \underbrace{\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_p}_{\delta_{ij}} = a_i$

Def. Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, \dots, y_n\}$ sono due sistemi di coordinate locali nell'intorno di $p \in X$ allora la matrice $\left(\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)_p\right)$ si chiama matrice di transizione dalle coordinate x_i alle coordinate y_i nel punto p. Si ottiene applicando $v = \sum_j v(x_j) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$ a $(\partial/\partial y_i)_p$: $(\partial/\partial y_i)_p = \dots = \sum (\partial x_j/\partial y_i) \cdot (\partial/\partial x_j)_p$

03. 11. 2010

Se $f: X \to Y$ è un morfismo di varietà differenziabili, e $p \in X$, allora $\forall F \in \mathcal{E}(Y, f(p))$ si ha che $F \circ f \in \mathcal{E}(X, p)$.

Quindi resta definita una applicazione.

$$f_{*p} : T_p(X) \longrightarrow T_{f(p)}(Y)$$
$$v \longmapsto f_{*(p)}(v) \quad \text{tale che}$$
$$f_{*p}(v)(F) = v(F \circ f) \qquad \forall F \in \mathcal{E}(Y, f(p))$$

$\Rightarrow$ f_{*p} è un' applicazione lineare che chiameremo differenziale di f in p.

Prop. Siano X, Y, Z varietà differenziabili, e siano $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ morfismi. Allora $\forall p \in X$, si ha:

$$(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p} : T_p(X) \to T_{g(f(p))}(Z)$$

dove $f_{*p} : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ è il differenziale di f in p

$g_{*f(p)} : T_{f(p)}(Y) \to T_{g(f(p))}(Z)$ è il differenziale di g in $f(p)$

Cor. a) Se $f: X \to Y$ è un diffeomorfismo allora $\forall p \in X$ il differenziale $f_{*p} : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ è un isomorfismo;

b) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e $f: A \to X$ è l'inversa di una carta locale, allora $f_{*p} : T_p(A) \to T_{f(p)}(X)$ è un isomorfismo $\forall p \in A$.

Dim. a) Sia $f^{-1}: Y \to X$ il diffeomorfismo inverso di f.

$$(1_X)_{*p} = (f^{-1} \circ f)_{*p} = (f^{-1})_{*f(p)} \circ f_{*p} : T_p(X) \to T_p(X)$$

Da ciò segue che f_{*p} è iniettiva.

D'altro canto:

$$(1_Y)_{*f(p)} = (f \circ f^{-1})_{*f(p)} = f_{*p} \circ f^{-1}{}_{*f(p)} : T_{f(p)}(Y) \to T_{f(p)}(Y)$$

dunque f_{*p} è suriettiva.

b) Sia $\varphi : f(A) \to \mathbb{R}^n$ l'inversa di f

$$\Rightarrow (\varphi \circ f)_{*p} = (\varphi)_{*f(p)} \circ f_{*p} \qquad T_p(A) \to T_p(A)$$

che è l'identità su $T_p(A)$, e pertanto f_{*p} deve essere iniettiva

Def. Se $\alpha : J \to Y$ è una curva differenziabile sulla varietà Y dove J è un intervallo aperto e se $t_0 \in J$, allora il vettore $\alpha_{*t_0}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0}\right) \in T_{\alpha(t_0)}(Y)$ si chiama vettore velocità di α in t_0 e si denota con $\alpha'(t_0)$

$$\alpha_{*t_0} : T_{t_0}(J) \to T_{\alpha(t_0)}(Y)$$
$$\frac{d}{dt} \longmapsto$$

Prop. Sia $f: X \to Y$ un' applicazione differenziabile tra le due varietà X e Y, e sia $\alpha : J \to X$ una curva differenziabile. Allora la composizione $f \circ \alpha : J \to Y$ è una curva differenziabile su Y.

Sia $p = \alpha(t_0)$, e sia $v = \alpha'(t_0)$, quindi $v \in T_p(X)$ il vettore velocità di α in p. Allora $f_{*p}(v) = (f \circ \alpha)'(t_0)$, cioè il differenziale f_{*p} può essere calcolato sul vettore v come il vettore velocità della curva $f \circ \alpha$.

Prop. (*) Sia X una varietà differenziabile, $P \in X$, e sia $v \in T_p(X)$. Allora esiste una curva differenziabile $\alpha: J \to X$ definita in un intervallo J contenente 0 tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Dim. Se $X = \mathbb{R}^n \Rightarrow \alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$t \mapsto \alpha(t) = p + tv$

Caso generale: sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $\phi: A \to X$ l'inversa di una carta locale tale che $\phi(u) = p$, per un certo $u \in A$

Cor. Il differenziale $\phi_{*u}: \underbrace{T_u(A)}_{\mathbb{R}^n} \to T_p(X)$ è un isomorfismo

Sia $w \in T_u(A) = \mathbb{R}^n$ t.c. $\phi_{*(u)}(w) = v$

$\alpha(t) = \phi(u + tw)$

Una curva α che gode delle proprietà (*) si dice adattata a v.

(08.11.2010)

Prop. Sia $f: X \to Y$ un morfismo di varietà differenziabili, $p \in X$, $\{x_1, \dots, x_n\}$ coordinate locali in un intorno di p, $\{y_1, \dots, y_m\}$ coordinate locali in un intorno di $f(p)$. Allora il differenziale $f_{*p}: T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ è rappresentato dalla matrice jacobiana $If(p) = \left(\left(\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_j}\right)_p\right)$ rispetto alle basi

$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ di $T_p(X)$ (**)

$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(p)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_{f(p)}$ di $T_{f(p)}(Y)$ (***)

Dim. Supponiamo che $f: X \to Y$ sia un morfismo di varietà differenziabili, e sia $p \in X$.

Consideriamo le coordinate locali $\{x_1, \dots, x_n\}$ in un intorno di p, e le coordinate locali $\{y_1, \dots, y_m\}$ in un intorno di $f(p)$, dove $n = \dim(X)$, $m = \dim(Y)$.

Si ha:

$$f_* = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}\right)_p\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}$$

$$Jf(p) = \left(\left(\frac{\partial y_i \circ f}{\partial x_j}\right)_p\right) \qquad \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial(y_1 \circ f)}{\partial x_1}\right)_p & \cdots & \left(\frac{\partial(y_1 \circ f)}{\partial x_n}\right)_p \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial(y_m \circ f)}{\partial x_1}\right)_p & \cdots & \left(\frac{\partial(y_m \circ f)}{\partial x_n}\right)_p \end{pmatrix}$$

Es. Toro in $\mathbb{R}^4$

L'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

$$(u,v) \longmapsto (\cos(u), \sin(u), \cos(v), \sin(v))$$

ha per immagine il toro $T^2 = S^1 \times S^1$

$$I_{\varphi(u,v)} = \begin{bmatrix} \partial\varphi_1/\partial u & \partial\varphi_1/\partial v \\ \partial\varphi_2/\partial u & \partial\varphi_2/\partial v \\ \partial\varphi_3/\partial u & \partial\varphi_3/\partial v \\ \partial\varphi_4/\partial u & \partial\varphi_4/\partial v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & -\sin(v) \\ 0 & \cos(v) \end{bmatrix}$$

ha ovunque rango 2.

Il piano tangente a T^2 in $\varphi(u,v)$ è generato dalle colonne di $J_{\varphi(u,v)}$

ORIENTABILITÀ

L'orientabilità è una proprietà globale.

In generale le diversità globali consentono di dimostrare che due varietà non sono diffeomorfe.

Sia X una varietà differenziabile e siano $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, \dots, y_m\}$ due sistemi di coordinate locali definiti negli aperti U e V rispettivamente.

I due sistemi di coordinate si dicono orientati concordemente [discordemente] in $p \in U \cap V$ se:

$$\det\left(\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)_p\right) > 0 \qquad \left[\det\left(\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)_p\right) < 0\right]$$

Oss. Poiché $\det\left(\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)_p\right)$ è una funzione di p continua e mai nulla, il suo segno è costante sulla componente connessa di p in $U \cap V$.

Def Una varietà differenziabile X si dice orientabile se possiede un atlante differenziabile $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ tale che in ogni $p \in U_\lambda \cap U_{\lambda'}$ i sistemi di coordinate locali definiti da φ_λ e $\varphi_{\lambda'}$ sono orientati concordemente $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$.

Un atlante fatto in questo modo si dice orientato.

Se non possiede un atlante orientato X si dice non orientabile.

Due atlanti orientati si dicono concordemente orientati, o concordi, se la loro unione è un atlante orientato, altrimenti si dicono discordemente orientati (o discordi).

L'essere concordemente orientati è una relazione di equivalenza

Quindi se X è orientabile, l'insieme di tutti gli atlanti orientati è ripartito in 2 classi disgiunte, ognuna costituita da atlanti concordemente orientati. Queste classi costituiscono le orientazioni di X.

Se in X è assegnato un atlante orientato, la chiameremo varietà orientata.

Dalla definizione segue immediatamente che se X è orientabile, allora ogni sua sottovarietà aperta è orientabile. Il viceversa è falso: infatti ogni varietà (orientabile oppure no) possiede un aperto diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, e quindi orientabile.

Quindi per dimostrare che una varietà X non è orientabile, è sufficiente trovare una sua sottovarietà aperta che non è orientabile.

Es. Sia I intervallo. Abbiamo che $M^\circ = \frac{I \times (0,1)}{\sim}$, dove la relazione di equivalenza $\sim$ identifica tra loro i punti $(0,t)$, $(1,1-t) \in I \times (0,1)$.

Sia $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. L'applicazione differenziabile:

$$g : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(s,t) \longmapsto \Big(\cos(2\pi s) + (t-\tfrac{1}{2}) \sin(\pi s) \cos(2\pi s),\ \sin(2\pi s) + (t-\tfrac{1}{2}) \sin(\pi s) \sin(2\pi s),\ (t-\tfrac{1}{2}) \cos(\pi s)\Big)$$

ha immagine omeomorfa a M°.

Si verifica che M° è una varietà differenziabile.

La mappa $g : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1) \to M^\circ$ è differenziabile e $\forall x \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1)$ il differenziale

$$g_{*x} : T_x\big((-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1)\big) \longrightarrow T_{g(x)}(M^\circ)$$

è un isomorfismo (infatti la restrizione di g a un intorno sufficientemente piccolo di x è una parametrizzazione)

Il segmento $(-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \{\frac{1}{2}\} \subset (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1)$ ha immagine diffeomorfa a S^1

$$y := g\big((0,\tfrac{1}{2})\big) = g\big((1,\tfrac{1}{2})\big)$$

Cerco le basi di $T_y(M^\circ)$ trasformate della base canonica di

$T_{(0,\frac{1}{2})}\big((-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1)\big)$ $\quad \beta_1$

$T_{(1,\frac{1}{2})}\big((-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1)\big)$ $\quad \beta_2$

$$g_* \rightsquigarrow Jg = \begin{bmatrix} \partial g_1/\partial s & \partial g_1/\partial t \\ \partial g_2/\partial s & \partial g_2/\partial t \\ \partial g_3/\partial s & \partial g_3/\partial t \end{bmatrix}$$

$$Jg_{(0,\frac{1}{2})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Jg_{(1,\frac{1}{2})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2\pi & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\beta_1 = \{v_1 = (0, 2\pi, 0),\ v_2 = (0,0,1)\}$

$\beta_2 = \{w_1 = (0, 2\pi, 0),\ w_2 = (0,0,-1)\}$

$v_1 = w_1 \qquad v_2 = -w_2$

$$\Rightarrow \det\left(\left(\frac{\partial v_j}{\partial w_i}\right)_p\right) = \det\begin{pmatrix} \partial v_1/\partial w_1 & \partial v_2/\partial w_1 \\ \partial v_1/\partial w_2 & \partial v_2/\partial w_2 \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow$ le due basi sono discordi

(30.11.2010)

ORIENTABILITÀ

Si tratta di una caratteristica globale, definita su tutta una varietà.

Sia X uno spazio topologico con una struttura di varietà differenziale, ovvero esista $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Consideriamo due sistemi di coordinate locali $U_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $U_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$, e sia $P \in U_1 \cap U_2$. Sia $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ la matrice di passaggio tra i due sistemi di coordinate.

Se $\det\left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_P\right) > 0$, i 2 sistemi di coordinate sono concordemente orientati. Se < 0, sono discordemente orientati.

Sia X varietà differenziabile, $A = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$.

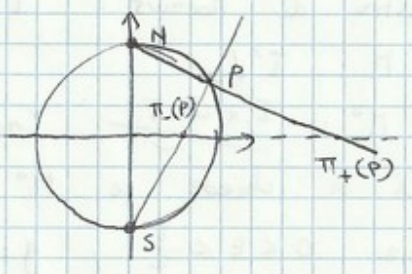
A è atlante orientato se, $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, i sistemi di coordinate locali definite da φ_λ e da $\varphi_{\lambda'}$ sono concordemente orientati.

In caso contrario, A non è orientato.

- A_1, A_2 sono atlanti orientati sono concordemente orientati se $A_1 \cup A_2$ è un atlante orientato.

La varietà X è orientabile se possiede un atlante orientato.

- Esempio: $X = S^1$



(U_1, φ_1) $\quad U_1 = S^1 \setminus \{(0,1)\}$

(U_2, φ_2) $\quad U_2 = S^2 \setminus \{(0,-1)\}$

$\varphi_1 = \pi_+ : S^1 \setminus N \to \mathbb{R}$

$\varphi_2 = \pi_- : S^1 \setminus S \to \mathbb{R}$

$\pi_+ \circ \pi_-^{-1}$ $\quad A = \{(S^1 \setminus N, \pi_+), (S^1 \setminus S, \pi_-)\}$

S^1 è orientata?

$\pi_+(x,y) = \frac{x}{1-y}$ $\qquad$ $\pi_-(x,y) = \frac{x}{-1-y}$

$(\pi_- \circ \pi_+^{-1})(t) = \frac{-1}{t}$

$\frac{\partial(-\frac{1}{t})}{\partial t} = -\frac{1}{t^2} < 0$

A non è orientato.

Per ottenere un atlante orientato A', è sufficiente cambiare di segno l'applicazione più esterna:

$A' = \{(S^1 \setminus N, \pi_+), (S^1 \setminus S, -\pi_-)\}$

$(-\pi_- \circ \pi_+^{-1})(t) = \frac{-1}{t}$ $\qquad$ $\frac{\partial(-\frac{1}{t})}{\partial t} = \frac{1}{t^2}$

- Esempio generalizzante: $X = S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$

Anche in questo caso possiamo considerare le proiezioni stereografiche: $N = (0, \dots, 0, 1)$ e $S = (0, \dots, 0, -1)$ sono i poli nord e sud, U_1 e U_2 sono $S^n \setminus N$ e $S^n \setminus S$, $\varphi_1 = \pi_+(P)$, $\varphi_2 = \pi_-(P)$, $A = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$

Per verificare l'orientabilità oppure meno, osserviamo che $U_1 \cap U_2 = S^n \setminus \{N, S\}$ è connesso. Poichè il segno di $\det\left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_p\right)$ non cambia all'interno di una stessa componente connessa, è sufficiente verificare il determinante in un punto. Se risulta positivo, è orientabile.

Se risulta negativo, non è orientabile, ma è sufficiente prendere, invece di π_-, la proiezione π_-^* che coincide con π_- tranne che sull'ultima coordinata, che cambia di segno.

- Se X è orientabile, ogni sua sottovarietà aperta è orientabile. Questo mostra che è sufficiente provare che una sottovarietà aperta non sia orientabile per mostrare che X non è orientabile.
- Nastro di Moebius: $I = [0,1]$, $\sim$: $(0,t) \sim (1, 1-t)$ $\forall t \in I$

M : $I^2/\sim$

M° : $\frac{I \times \text{int } I}{\sim}$ (nastro di Moebius aperto)

Ci si chiede se M° sia orientabile oppure meno.

Sia $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $g : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$;

$g(s,t) = \left(\cos(2\pi s) + \left(t - \frac{1}{2}\right)\sin(\pi s)\cos(2\pi s),\right.$

$\sin(2\pi s) + \left(t - \frac{1}{2}\right)\sin(\pi s)\sin(2\pi s),$

$\left.\left(t - \frac{1}{2}\right)\cos(\pi s)\right)$

$g((-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1))$ è omeomorfa a M°

Se $s_0 \in I$, $A = (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \times (0,1) \subset (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1)$,

$g(A)$ è diffeomorfo ad A

Mediante g, abbiamo che M° è varietà differenziabile.

$\xi : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1) \longrightarrow M^\circ$

$\xi_{*x} : T_x((-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1)) \longrightarrow T_{\xi(x)}(M^\circ)$

$\{e_1, e_2\} \longmapsto \{\xi_{*x}(e_1), \xi_{*x}(e_2)\}$

Se $x \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$\xi((-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1)) \cong S^1$

M° non è orientabile poichè la base dello spazio tangente cambia dopo un giro completo.

- $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è orientabile?

$\pi : S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

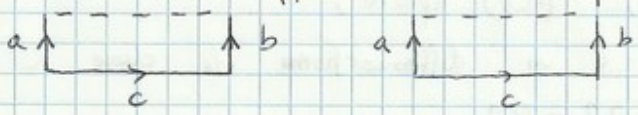
Si identificano i punti antipodali $P \sim P'$ se stanno sulla stessa retta per O

Possiamo provare che non è orientabile trovando una sottovarietà non orientabile.

Sia $S^2_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_3 \geq 0\}$, $G : \pi|_{S^2_+} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $S^2_{+\varepsilon} = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid 0 \leq x_3 < \varepsilon\}$

Reincollando opportunamente i pezzi:



si ottiene:



M° è dunque una sottovarietà aperta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e, non essendo orientabile, implica necessariamente che nemmeno $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ lo sia.

- Sia X una superficie topologica.

Un atlante $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ è olomorfo se, $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$, $U_\lambda \cap U_{\lambda'} \neq \emptyset$

$\varphi_{\lambda'} \cdot \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_{\lambda'}) \to \mathbb{C}$ è olomorfa.

Due atlanti olomorfi su X sono equivalenti se la loro unione è ancora atlante olomorfo.

Se X possiede un atlante olomorfo, allora è una superficie di Riemann. In tal caso è anche una superficie differenziabile orientabile

- Siano due parametrizzazioni $\{x_1, x_2\}$ su U_1, $\{y_1, y_2\}$ su U_2,

$\det\left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_P\right) > 0$, $P \in U_1 \cap U_2$

$\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'}^{-1}$ olomorfa

$(\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'}^{-1})(z) = u(z) + i \cdot v(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$

$\uparrow$

$\varphi_{\lambda'}(U_\lambda \cap U_{\lambda'})$

$$\begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 > 0$$

per le equazioni di Cauchy-Riemann: $\begin{cases} \partial u/\partial x = \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x \end{cases}$

Dunque si deve avere orientabilità.

Poiché due superfici per essere diffeomorfe devono essere entrambe orientabili o entrambe non orientabili, se una coppia di esse è composta da una orientabile e una no, allora possiamo escludere l'esistenza di un diffeomorfismo tra di loro.

DIFFEOMORFISMI LOCALI

Teor. (funzione inversa)

$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1

Supponiamo $\exists\, a \in U$ (aperto) t.c. $F_{*a}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isomorfismo

Allora $V \subseteq U$ aperto, $a \in V$, $f(V)$ aperto,

$f|_V: V \to f(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo di classe $C^{(1)}$

Es. $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_{*a}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Il luogo dei punti $x \in U$ tali per cui f_{*x} è un isomorfismo è un aperto.

Si ricordi che f_{*a} è isomorfismo $\iff Jf(a)$ è regolare (invertibile)

Ricapitolando, M^n non è orientabile; $\forall n$ S^n invece sì. Una varietà, una orientabile e l'altra no, non saranno MAI diffeomorfe tra loro.

(10.12.2016) DIFFEOMORFISMI LOCALI

A volte aiutano per trovare proprietà globali.

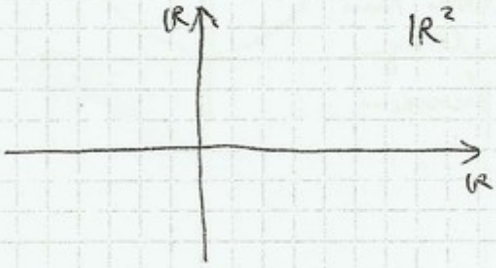
Teorema della funzione inversa.

$F: U \underset{\text{ap.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1. Supponiamo che

$\exists a \in U$ / $F_{*a}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è 1 isomorfismo di sp. vett.

Allora $\exists V \underset{\text{ap}}{\subseteq} U$ con $a \in V$ e $F(V)$ aperto e

$F|_V: V \longrightarrow F(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ è 1 diffeomorfismo di classe C^1.



$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se $f'(a)$ non fa cose strane, allora posso invertire f in un intorno di A.

$F: U \underset{\text{ap}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad a \in U$ $\quad F_{*a}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Il luogo dei punti $x \in U$ / F_{*x} è un iso, è un APERTO.

Se $Jf(a)$, la jacobiana con dentro le derivate parziali, è invertibile, allora F_{*a} è un iso.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_a = \det Jf(a) \neq 0 \iff \text{invertibilità}$$

$\Rightarrow F_{*a}$ è iso.

10/12

$a \in U$ $\quad F: V \to F(V)$ $\quad \forall x \in V$: $F_{*x} = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è iso.

$\Rightarrow$ i punti per cui F_{*x} è iso costituiscono un aperto.

$f: U \underset{\cong \mathbb{R}^2}{\subseteq} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ applicazione olomorfa

$$z = x + iy \longmapsto f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad C\text{-}R$$

Per quali punti a $f_{*a}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è isom? Faccio $Jf(a) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_a \qquad \det Jf(a) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_a \overset{C\text{-}R}{=} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)\Big|_a$$

si devono usare le ~~Cauchy~~ derivate: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz} \qquad (z = x + iy)$

~~Prop~~ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{df}{dz} \Rightarrow \frac{df}{dz} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$

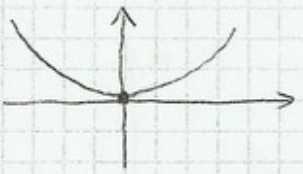
$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad f'(z) = \frac{df}{dz} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) \overset{C\text{-}R}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \left(= f'(z)\right) \Rightarrow$$

$$\|f'(a)\|^2 = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)\Big|_a \neq 0 \quad (\text{se } f'(a) \neq 0)$$

localmente invertibile tranne che nell'origine



quindi nei punti a tangenza orizzontale la funzione non è invertibile nemmeno localmente.

Def: $f: X \to Y$ morfismo di v.d. è un DIFFEOMORFISMO LOCALE in $x \in X$ se $\exists$ un intorno aperto $U \ni x$ / $f(U)$ è aperto e f induce un diffeo tra U e $f(U)$.
f è un "DIFFEOMORFISMO LOCALE" se lo è $\forall x \in X$.

Osservazione: diffeo $\Rightarrow$ diffeo locale. ma non necessariam. viceversa.

Esempio: $f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$
$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

$\mathbb{R}$ si avvolge a spirale attorno a S^1.



è diffeo locale ma non diffeo xché non è invertibile globalmente, in quanto f non è iniettiva.

Teorema della funzione inversa rivisitato e corretto
$F: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ F diffeo locale in $a \iff F_{*a}$ è un isomorfismo

Prop: se $f: X \to Y$ è un morfismo di v.d., è biunivoca ed è un diffeo locale, $\Rightarrow$ f è un diffeomorfismo.

Prop: se $f: X \to Y$ è un diffeo locale in $x \in X$ (anche solo in un punto), allora $\dim X = \dim Y$.

Teorema: se $f: X \to Y$ è un morfismo di v.d.; f è diffeo locale in $x \in X \iff f_{*x}$ è un isomorfismo. (estensione del caso particolare $X = \mathbb{R}^n$; senza dimostrazione).

Dim della prop: essendo isomorfi, X e Y hanno stessa dimensione (utilizza il teorema).

Esempio: $\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\quad z \mapsto e^z = e^{x(\cos y + i \sin y)}$ $\quad z = x + iy$

$i2\pi$ e $i4\pi$ sono mandati nello stesso $\cos 0 + i \sin 0 = 1$

∞ controimmagini per ogni punto dell'immagine, e sono discrete.

$f: X \longrightarrow Y$ morfismo v.d. $\quad y \in Y$ può essere un VALORE REGOLARE di f oppure VALORE CRITICO di f. Siamo nel primo caso se $\forall x \in f^{-1}(y)$: f è un diffeo locale in x, nel secondo caso altrimenti.

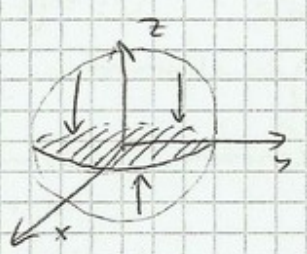
I punti non nell'immagine di f hanno $f^{-1}(y) = \emptyset$ e sono VALORI REGOLARI di f (questo per definizione). Segue i valori critici sono sempre nell'immagine di f.

Esempio:

$f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y,z) = (x,y)$

Valori regolari di f = ?

Tutti i punti del piano fuori dal disco di centro $(0,0)$ e $r = 1$ lo sono perché $\notin \operatorname{Im} f$.



Poi gli altri sono quelli in cui f_{*p} è un isomorfismo; guardo la matrice Jacobiana di f, che ha dimensione 2×2, e pongo $\det \neq 0$.

$(\pi_-)^{-1}(t_1, t_2) = \left(\frac{2t_1}{1+t_1^2+t_2^2}, \frac{2t_2}{1+t_1^2+t_2^2}, 1 - t_1^2 - t_2^2 \right)$ le proiez. stereog. - inversa di carta locale

$\left(f \circ (\pi_-)^{-1} \right)(t_1, t_2) = \left(\frac{2t_1}{1+t_1^2+t_2^2}, \frac{2t_2}{1+t_1^2+t_2^2} \right)$ $\quad \rightsquigarrow$ derivata

$$J\left(f \circ (\pi_-)^{-1} \right) = \begin{pmatrix} 2 - 2t_1^2 + 2t_2^2 & -4t_1 t_2 \\ -4t_1 t_2 & 2 + 2t_1^2 - 2t_2^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+t_1^2+t_2^2)^2}$$

$$\det J\left(f \circ \pi_-^{-1} \right) = \frac{4\left(1 - (t_1^2+t_2^2)^2\right)}{(1+t_1^2+t_2^2)^2} = 0 \iff t_1^2 + t_2^2 = 1$$

I punti di S^2 che proiettati stereograficamente nel piano hanno $t_1^2 + t_2^2 = 1$: la circonferenza di centro $(0,0)$ e $r = 1$. Presi nella circonferenza del piano, sono valori critici.
Gli altri punti sono valori regolari.

Teorema: $f: X \to Y$ morfismo di v.d. $y \in Y$ è un valore regolare. Allora:

① $f^{-1}(y)$ è un sottoinsieme discreto di X.

② se X è compatto, $f^{-1}(y)$ è finito; inoltre $\exists$ un aperto $V \subseteq Y$ con $y \in V$, tale che $\forall y' \in V$: y' valore regolare e $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y')$.

Dim:

① $\forall x \in f^{-1}(y)$: f è diffeo locale in x. $\Rightarrow$ $U \ni x$ è intorno aperto / f è un diffeo tra U e $f(U) \ni y$. $\Rightarrow U \cap f^{-1}(y) = \{x\}$.

② sia X è compatto. $f^{-1}(y)$ è un sottoinsieme chiuso ($\#$ ones e y chiuso perché è un punto) e discreto in un compatto. Allora $f^{-1}(y)$ è finito.
Posso allora scrivere $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ $\forall i = 1 \dots n$: U_i è aperto di X $x_i \in U_i$ / $U_i \cong f(U_i)$ per diff di valore regolare. Definisco poi $V := f(U_1) \cap \dots \cap f(U_n)$ che contiene almeno $y = f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n)$ con $f(x_i) \in f(U_i)$ $\forall i$. $V := [f(U_1) \cap \dots \cap f(U_n)] - f(X - (U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n))$ per eliminare "punti problematici". q.e.d.

Considero $n: V \longrightarrow \mathbb{N}$
$w \longmapsto \#f^{-1}(w) =$ numero finito

n è costante sulle componenti connesse di Y.

Poiché $\mathcal{N}$ è finitamente generato, $V(\mathcal{N})$ è il luogo degli zeri di un numero finito di polinomi

$f_j \in K[y_1, \dots, y_n] \quad j = 1, \dots, m$

RICHIAMI DI ALGEBRA COMMUTATIVA

Lavoreremo sempre su anelli commutativi con unità e $K = \overline{K}$.

Se K è finito, si parla di geometria aritmetica.

Se l'anello non è commutativo, siamo nella geometria non comm.

Def. Sia A anello. Un A-modulo è un gruppo abeliano M dotato di una moltiplicazione scalare cioè un'applicazione

$$A \times M \to M$$
$$(a, m) \mapsto am$$

che soddisfa:

$$(a+b)\, m = am + bm$$
$$a\,(m+n) = am + an$$
$$(ab)\, m = a\,(bm)$$
$$1\, m = m$$

$\forall\, a, b \in A, \quad m, n \in M, \quad 1 = 1_A$.

Gli ideali di A, in particolare A stesso, sono A-moduli.

Ogni anello quoziente A/I, I ideale, è un A-modulo, e così A^n. Se A è un campo, gli A-moduli sono gli spazi vettoriali.

Def. N sottogruppo di un A-modulo M si dice sottomodulo se $an \in N, \ \forall\, n \in N, \ a \in A$

Def. $S \subseteq M$, M è un A-modulo.

Il sottomodulo generato da S è indicato con (S) è il più piccolo sottomodulo di M che contiene S.

$$(S) = \left\{ \sum a_i s_i \ / \ a_i \in A, \ s_i \in S \right\}$$

S si dice sistema di generatori di M se $(S) = M$.

M si dice finitamente generato, o di tipo finito, se possiede un sistema di generatori finito.

Def. L'insieme degli ideali primi di un anello A si chiama spettro di A e si indica con $\mathrm{Spec}(A)$

L'insieme degli ideali massimali di A si dice spettro massimale di A e si indica con $\mathrm{Specm}(A)$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Specm}(A) \subset \mathrm{Spec}(A)$

ATIYAH - MACDONALD "Algebra commutativa"

Se $f: A \to B$ è un omomorfismo di anelli e $J \lhd B$, $f^{-1}(J) \lhd A$ che si chiama ideale CONTRATTO di J rispetto ad f e si indica con J^c.

Se $I \lhd A$, l'ideale generato da $f(I)$ si chiama ideale esteso di I rispetto ad f e si indica con I^e.

Si verifica che $I \subset I^{ec}$, $J^{ce} \subset J$.

Se $P \lhd B$ primo, $f^{-1}[P]$ è un ideale primo di A

$\Rightarrow$ f induce un'applicazione $f^*: \operatorname{spec} B \to \operatorname{spec} A$, per cui è un funtore controvariante.

Def. $I, J \lhd A$

$(I : J) = \{x \in A \mid xJ \subset I\}$ ideale quoziente

Si osserva che $(I : J)$ è un ideale contenente I e se $J \subset J' \Rightarrow (I : J) \supset (I : J')$

Def $I \lhd A$

$\sqrt{I} = \{a \in A \mid a^s \in I \text{ con } s > 0\}$

$\sqrt{I}$ è detto ~~ideale~~ radicale di A, e contiene I

È detto ideale radicale se $I \equiv \sqrt{I}$

(26.10.2010)

$I \trianglelefteq A$

$\sqrt{I} = \{a \in A : a^s \in I\}$ (s intero)

Si ha che:

$\sqrt{I} \trianglelefteq A$ $\qquad$ $\sqrt{I} = I$ $\qquad$ I ideale radicale

$\sqrt{I} \supseteq I$

Def. Una A-algebra è un anello B dotato di omomorfismo $f: A \to B$. In particolare è un A-modulo se si definisce $a \cdot b = f(a) \cdot b$.

Poichè $f(1) = 1 \neq 0$, $\ker f \trianglelefteq A$, $\ker f \neq A$

Oss. A campo $\Rightarrow$ f iniettiva

Es. $x_1, \dots, x_n$ indeterminate, A anello

$A[x_1, \dots, x_n]$ anello dei polinomi a coefficienti in A in $x_1, \dots, x_n$

$\Rightarrow$ $A[x_1, \dots, x_n]$ è una A-algebra

Se $I \trianglelefteq A \Rightarrow A/I$ è una A-algebra

Def. A, B campi, B è una A-algebra

$\Rightarrow$ $A \subset B$ e B si dice ampliamento di A.

Lo dimensione di B come A-spazio vettoriale si chiama grado dell'ampliamento e si indica con $[B : A]$

Def. A anello si dice locale se possiede un solo ideale massimale M

Es. campo: $M = (0)$

Prop. A anello locale. L'ideale massimale di A è:

$M = \{a \in A \mid a$ non è invertibile$\}$

Viceversa A anello in cui M è l'insieme degli elementi non invertibili. Se M è un ideale $\Rightarrow$ A è locale di ideale massimale m.

Dim. Sia A locale, se $a \in M$, a non è invertibile $\Rightarrow$ M è contenuto in un ideale massimale

Avendo A un unico ideale massimale, diciamo I, si ha che $M \subset I$. Se esiste $a \in I \setminus M$, a sarebbe invertibile e quindi $I \equiv A$, assurdo $\Rightarrow$ $I = M$.

Viceversa, se in un anello A l'insieme M degli elementi non invertibili è un ideale, mostriamo che A è locale di ideale massimale M. Sia I un ideale $M \subsetneq I \subseteq A \Rightarrow$ come sopra $I \equiv A$

$\Rightarrow$ M è un ideale massimale di A

Si procede in modo analogo per far vedere che M è l'unico ideale massimale.

Def. A anello

Una A-algebra $f: A \to B$ si dice finita su A se B è un A-modulo di tipo finito.

Es. $A \subset B$ campi $\Rightarrow$ allora B è finito su A $\Leftrightarrow$ $[B:A] < \infty$ cioè se B è un ampliamento algebrico finito di A.

Siano $b_1, \dots, b_n \in B$, $x_1, \dots, x_n$ indeterminate e $f: A[x_1, \dots, x_n] \to B$

$x_i \longmapsto b_i \quad i = 1, \dots, n$

L'immagine di f è una sotto A-algebra di B che si indica con $A[b_1, \dots, b_n]$.

È il più piccolo sottoanello di B che contiene sia $f(A)$ che $b_1, \dots, b_n$ e consiste in tutti i polinomi a coefficienti in $f(A)$ in $b_1, \dots, b_n$

B si dice A-algebra di tipo finito se $\exists\ b_1, \dots, b_n \in B$ / $A[b_1, \dots, b_n] = B$

Se A e B sono campi e $b_1, \dots, b_n \in B$ il più piccolo sottocampo di B che contiene sia A che $b_1, \dots, b_n$ si indica con $A(b_1, \dots, b_n)$ ed è il campo dei quozienti di $A[b_1, \dots, b_n]$

B si dice un ampliamento finitamente generato di A se $\exists\ b_1, \dots, b_n \in B$ $A(b_1, \dots, b_n) = B$

Se $B = A(b)$ per qualche $b \in B$ si dice ampliamento semplice di A.

Si può dimostrare che:

(i) Se B è una A-algebra finita $\Rightarrow$ B è una A-algebra di tipo finito

(ii) Un anello di polinomi $A[x]$ è una A-algebra di tipo finito che non è finita. Lo stesso è vero per $A[x_1, \dots, x_n]$ dove $x_1, \dots, x_n$ sono n indeterminate

iii) Se $A \subset B$ sono campi e B è una A-algebra di tipo finito $\Rightarrow$ B è un'estensione finitamente generata di A.

Prop. k campo, $x_1, \dots, x_n$ indeterminate e $k(x_1, \dots, x_n)$, campo delle funzioni razionali, campo dei quozienti di $k[x_1, \dots, x_n]$. Allora $k(x_1, \dots, x_n)$ è un ampliamento finitamente generato di k che non è una k-algebra di tipo finito.

Dim. (nel caso di una sola indeterminata)

Supponiamo per assurdo che $\exists\, b_1, \dots, b_n \in k(x)$ tali che $k(x) = k[b_1, \dots, b_n]$

Si indichi con b il prodotto dei denominatori di $b_1, \dots, b_n$.

$\forall\, z \in k(x)$ $\exists$ allora un $m > 0$ / $b^m z \in k[x]$

Ma ciò è assurdo: basta prendere $c \in k[x]$ irriducibile che non divide b e $z = c^{-1}$.

POLINOMI

Def. D si dice dominio a fattorizzazione unica (o fattoriale) se valgono le seguenti due condizioni:

i) ogni elemento non invertibile $a \in D$ si può fattorizzare come il prodotto $a_1 \cdot \dots \cdot a_r$ di un numero finito di elementi irriducibili di D.

ii) Se $a_1 \cdot \dots \cdot a_r = b_1 \cdot \dots \cdot b_s$ e a_i, b_j sono irriducibili e non invertibili $\Rightarrow$ $r = s$ e gli a_i si possono riordinare in modo che $a_i = b_i$.

Sia B un dominio e consideriamo $B[x_1, \dots, x_n]$.

Ogni polinomio di grado 1 a coefficienti invertibili in B è irriducibile.

L'irriducibilità di un polinomio dipende da B

Sia K campo qualsiasi.

Osserviamo che $k[x]$ contiene infiniti polinomi monici irriducibili. Infatti $k[x]$ contiene alcuni polinomi monici irriducibili $(x - \alpha)$, $\alpha \in k$.

Se per assurdo infatti $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in k[x]$ fossero tutti i polinomi monici irriducibili.

$\Rightarrow$ il polinomio monico $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$ sarebbe irriducibile perché non divisibile per nessuno di essi e $\neq$ da $f_1(x), \dots, f_n(x)$

$\Rightarrow f_1(x), \dots, f_n(x)$ non esauriscono i polinomi monici irriducibili che quindi devono essere infiniti. $\square$

Teor. di fattorizzazione unica

D UFD $\Rightarrow$ $D[x]$ è anch'esso un UFD

In particolare se k campo e $x_1, \dots, x_n$ indeterminate $k[x_1, \dots, x_n]$ è un UFD

Lemma di Gauss

D UFD e k sia il campo dei quozienti. Un polinomio monico non costante $f \in D[x]$ è irriducibile in $k[x]$ $\Leftrightarrow$ f è irriducibile in $D[x]$

$f = g_1^{e_1} \cdot \dots \cdot g_s^{e_s}$ g_i irriducibili e distinti

e_i sono le molteplicità di g_i in f.

Se $e_i > 1 \Rightarrow g_i$ è detto fattore multiplo di f.

Si ha l'identità:

$$g_r(f) = e_1 g_r(g_1) + \dots + e_s g_r(g_s)$$

Prop. k campo, X indeterminata

Dati $f, g \in k[x]$ $\exists\, h \in k[x]$ /

1) $h \mid f$, $h \mid g$
2) se $k \mid f$ e $k \mid g \Rightarrow k \mid h$
3) $\exists\, A, B \in k[x]$ / $h = Af + Bg$

$h = MCD(f, g)$ ed è individuato a meno di 1 fattore costante.

Def. D dominio $f(x) \in D[x]$

$gr(f) = m > 0$

Un elemento $\alpha \in D$ / $f(\alpha) = 0$ si dice radice di $f(x)$

Prop. $\alpha \in D$ radice di $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $x - \alpha \mid f(x)$

Dim. $\Leftarrow$ Se $x - \alpha \mid f(x) \Rightarrow f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)$

$\Rightarrow$ α radice di $f(x)$; se $\alpha = 0$ $f(x)$ ha termine noto uguale a 0 e pertanto $x \mid f(x)$

Se $\alpha \neq 0$ introduciamo Y e sia $k(Y) = f(Y + \alpha) \in D[Y]$

$\Rightarrow$ $k(0) = 0$ e quindi $k(Y) = Y \cdot h(Y)$ per un opportuno $h(Y) \in D[Y]$

Sostituendo $Y = x - \alpha$ troviamo:

$$f(x) = k(x - \alpha) = (x - \alpha) \cdot h(x - \alpha) = (x - \alpha) \cdot g(x)$$

Def. $a \in D$ si dice radice multipla di $f(x)$ se $x-\alpha$ è un fattore multiplo di $f(x)$: $f(x) = (x-\alpha)^e g(x)$, con $\max \text{gr } g(x) = \text{gr}(f) - e$, ed $e \geq 2$.
Il massimo intero e per cui $\exists$ una fattorizzazione si dice molteplicità di α per $f(x)$. Se $e=1$ α è semplice, se $e=2$ α è doppia e così via. Se α non è radice di $f(x)$, $e=0$.

Cor. $f(x) \in D[x]$ di grado d
$f(x)$ possiede al più d radici in D se ognuna viene contata con la sua molteplicità.

Dim. Per induzione su d. Se $d=1$ ovvio.
Se $d>2$ supponiamo che $f(x)$ possiede $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ radici distinte di molteplicità $e_1, \dots, e_s$
$\Rightarrow f(x) = (x-\alpha_1)^{e_1} \cdot g_1(x)$
$\forall\ j = 2, \dots, s$
si ha $0 = f(\alpha_j) = (\alpha_j - \alpha_1)^{e_1} \cdot g(\alpha_j)$
Poichè $\alpha_j \neq \alpha_1$ e D è un dominio
$\Rightarrow g(\alpha_j) = 0$. Per l'ipotesi induttiva
$e_2 + \dots + e_s \leq d - e_1 \Rightarrow e_1 + \dots + e_s \leq d$

Def. k campo. Se ogni $f(x) \in k[x]$ non costante possiede almeno una radice in k, k si dice algebricamente chiuso e si scrive $k = \bar{k}$. Da quanto detto segue

Teor. $k = \bar{k}$. Ogni polinomio $f(x)$ di $k[x]$ di grado d ha esattamente d radici se ognuna di esse viene contata con la sua molteplicità.
$f(x) = a \cdot (x-\alpha_1) \cdot \dots \cdot (x-\alpha_d)$

Teor. (fondamentale dell'algebra) $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.

Oss. $k = \bar{k} \Rightarrow k$ possiede infiniti elementi. Infatti dal teorema precedente segue che gli unici polinomi monici irriducibili in $k[x]$ sono della forma $x-\alpha$ con $\alpha \in k$ che sono infiniti.

Principio di identità dei polinomi

K campo, $f(X_1, \dots, X_N) \in K[X_1, \dots, X_N]$, $N \geq 1$.

Se esiste un sottoinsieme infinito $J \subset K$ tale che $f(a_1, \dots, a_N) = 0$

$\forall (a_1, \dots, a_N) \in J^N \Rightarrow f(X_1, \dots, X_N) = 0$

Dim. Per induzione su N. $N = 1$ ovvio.

$N \geq 2$ Supponiamo che il risultato sia vero per polinomi in $N-1$ indeterminate a coefficienti in K.

Scriviamo $f(X_1, \dots, X_N) = f_0 + f_1 \cdot X_N + \dots + f_d \cdot X_N^d$

con $f_i \in K[X_1, \dots, X_{N-1}]$

Se $f \neq 0$ possiamo supporre che $f_d \neq 0$. Per l'ipotesi induttiva $\exists (a_1, \dots, a_{N-1}) \in J^{N-1}$

$f_d(a_1, \dots, a_{N-1}) \neq 0 \Rightarrow \exists$ al più d valori di a_N / $f(a_1, \dots, a_N) = 0$

Contro ipotesi $\Rightarrow f = 0$

In particolare se K è infinito e $f(0) = 0 \quad \forall a \in K^N \Rightarrow f = 0$

Questo non è vero se non si suppone K infinito.

Definiamo anche in modo formale la derivata di un polinomio.

Teorema di Taylor

D dominio che contiene $\mathbb{Q}$

$\forall f(x) \in D[x]$ di grado d e $\forall a \in D$

$$f(x) = f(0) + f(a)(x-a) + \frac{f'(0)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(d-1)}(a)}{d!}(x-a)^d$$

Dim. nelle dispense

Prop. Supponiamo che D abbia caratteristica 0; $a \in D$ è una radice multipla di $f(x) \Leftrightarrow a$ è radice di $f(x)$ e $f'(x)$

Dim a radice di molteplicità $e > 1$ di $f(x) \Leftrightarrow$

$f(x) = (x-a)^e g(x)$

$f'(x) = e \cdot (x-a)^{e-1} \cdot g(x) + (x-a)^e \cdot g'(x)$

Se $e > 2 \Rightarrow f'(0) = 0$, il che completa la dimostrazione.

Polinomi omogenei

K campo, $F(X_0, \dots, X_N] \in K[X_0, \dots, X_N]$ si dice omogeneo se tutti i suoi monomi hanno lo stesso grado

Se fissiamo un grado d, scrivendo $K[X_0, \dots, X_N]_d$, otteniamo (previo inserimento del polinomio nullo) uno spazio vettoriale di dimensione $\binom{N+d}{d}$

(02.11.2010)

Argomenti della giornata

- polinomi omogenei
- risultante di due polinomi
- anelli noetheriani
- localizzazione

- Vogliamo calcolare la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle quartiche in $\mathbb{P}^2$. Questo è pari a $\binom{4+2}{4} = \binom{6}{4} = 15$. Dimostriamo che vale $\binom{N+d}{d}$.

Prop. $\forall\, d \geq 0$, $\dim_K (k[x_0, \dots, x_N]_d) = \binom{N+d}{d}$

Dim. Doppia induzione su N e d.

Base induttiva: $N = 1$, $\forall\, d \geq 0$, esistono $d+1$ monomi di grado d in x_0 e x_1: $x_0^d, x_0^{d-1}x_1, \dots, x_0 x_1^{d-1}, x_1^d$

Ipotesi induttiva: $N \geq 2$, sia la tesi vera per $N-1$.

Supponiamo $d = 0$: la tesi in questo caso è ovvia

Sia ora $d \geq 1$, e la tesi vera per $d-1$.

Sia $T = \{\text{monomi di grado } d \text{ in } x_0, \dots, x_N\}$

$T = T' \overset{\text{disgiunta}}{\cup} T''$, con T' insieme dei monomi in cui compare x_N, e T'' insieme degli altri monomi.

Dividiamo ogni monomio di T' per x_N.

T' corrisponde biunivocamente all'insieme dei monomi di grado $d-1$ in $x_0, \dots, x_N$.

Per l'ipotesi induttiva su d:

$\# T' = \dim_K (k[x_0, \dots, x_N]_{d-1}) = \binom{N+d-1}{d-1}$

$\# T'' = \#\{\text{monomi di grado } d \text{ in } x_0, \dots, x_{N-1}\}$

Per l'ipotesi induttiva su N:

$\# T'' = \binom{N+d-1}{d}$

$\# T = \# T' + \# T'' = \binom{N+d-1}{d-1} + \binom{N+d-1}{d} = \binom{N+d}{d}$ per Stiefel.

Prop

(i) $F \neq 0$ $F(x_0, \dots, x_N)$ è omogeneo di grado d

$\Leftrightarrow F(tx_0, \dots, tx_N) = t^d F(x_0, \dots, x_N)$

(ii) $f, g \in k[x_0, \dots, x_N]$, $g \mid f$

Se f è un polinomio omogeneo anche g lo è.

(iii) $F(x_0, \dots, x_N)$ omogeneo di grado di d

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{N} x_i \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} = dF$

Dim.

i) $\Rightarrow$ ovvia

$\Leftarrow$ $F = F_1 + \dots + F_r$

$F_j \neq 0$ e F_j omogeneo di grado d_j

la tesi si traduce nell'identità:

$t^{d_1} F_1 + \dots + t^{d_r} F_r = t^d F_1 + \dots + t^d F_r$

$\Rightarrow t^{d_1} = t^d$, $t^{d_2} = t^d$, $\dots$, $t^{d_r} = t^d$ $\quad d_j = d$

ii) $f = gh$, supponiamo che g non sia omogeneo:

$g = G_j + G_{j+1} + \dots + G_{j+r}$

$G_j \neq 0$, $G_{j+r} \neq 0$, $r > 0$ $\quad gr(G_j) = j$

$h = H_i + H_{i+1} + \dots + H_{i+k}$

$H_i \neq 0$, $H_{i+k} \neq 0$, $k > 0$

$f = (\ )(\ ) = G_j H_i + \dots + G_{j+r} H_{i+k}$

$\Rightarrow$ f non omogeneo, assurdo

iii) $F(tx_0, \dots, tx_N) = t^d F(x_0, \dots, x_N)$

derivando entrambi i membri rispetto a t troviamo:

$$\sum_{i=0}^{N} x_i \cdot \frac{\partial F(tx_0, \dots, tx_N)}{\partial x_i} = d t^{d-1} F(x_0, \dots, x_N)$$

Ponendo $t = 1$ segue la tesi.

- $f(x_1, \dots, x_N) \in K[x_1, \dots, x_N]$ di grado d.

polinomio omogeneizzato di f è $F(x_0, \dots, x_N) \in K[x_0, \dots, x_N]$

$F(x_0, \dots, x_N) = x_0^d \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_N}{x_0}\right)$

Viceversa se $F(x_0, \dots, x_N) \in K[x_0, \dots, x_N]$ omogeneo, il suo polinomio deomogeneizzato è $f(x_1, \dots, x_N) = F(1, x_1, \dots, x_N)$

Prop. $\quad K = \overline{K}$

$F(x_0, x_1) = K[x_0, x_1]$ omogeneo di grado d.

$\exists\ a \neq 0$, $a \in K$ e d coppie $(a_i, b_i) \in K^2$ $\quad i = 1, \dots, d$ tutte diverse dalla coppia $(0,0)$, tali che

$F(x_0, x_1) = a \cdot (a_1 x_1 - b_1 x_0) \cdot \dots \cdot (a_j x_1 - b_j x_0)$

Le coppie (a_i, b_i) sono univocamente determinate a meno del loro ordine ed ognuna di esse a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Esse si dicono radici di $F(x_0, x_1)$

Dim Supponiamo che r sia la molteplicità di x_0 come fattore in $F(x_0, x_1)$ $\Rightarrow$ $F(x_0, x_1) = x_0^r \cdot G(x_0, x_1)$

pol. di grado $d+r$

Il polinomio $G(1, x_1)$ ha grado $d-r$ e poiché $K = \bar{K}$ si fattorizza in:

$$G(1, x_1) = a \cdot (x_1 - b_1) \cdot \dots \cdot (x_1 - b_{d-2})$$

Omogeneizziamo e otteniamo:

$$G(x_0, x_1) = a \cdot (x_1 - b_1 x_0) \cdot \dots \cdot (x_1 - b_d x_0)$$

$$\Rightarrow F(x_0, x_1) = a \cdot x_0^r \cdot (x_1 - b_1 x_0) \cdot \dots \cdot (x_1 - b_{d-2} x_0)$$

Eliminazione

Dati 2 polinomi $\in D[x]$ mi chiedo se hanno dei fattori comuni non costanti.

Prop. $f, g \in D[x]$ di gradi n ed m, f, g possiedono un fattore non costante in comune

$\Leftrightarrow \exists A, B \in D[x] / \; gr(A) \leq gr(f), \; gr(B) \leq gr(g), \; e \; Bf = Ag.$

Dim $\Rightarrow$ f, g hanno un fattore non costante in comune $h \Rightarrow f = Ah, \; g = Bh$

$$h = \frac{f}{A} = \frac{g}{B} \Rightarrow Ag = Bf$$

$\Leftarrow$ Supponiamo che $Bf = Ag$. Ognuno dei fattori irriducibili di g divide Bf. Poiché $gr(B) < gr(g)$ almeno uno dei fattori non costanti di g ~~divide~~ diviso da $f \Rightarrow f, g$ hanno un fattore non costante in comune.

Def Il risultante di f e g, $R(f, g)$, con:

$$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \qquad a_n \neq 0$$

$$g = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m \qquad b_m \neq 0$$

è la matrice:

$$R(f,g) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 & \dots & a_n \\ b_0 & \dots & b_m & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_m \end{bmatrix}$$

Teor. f e g hanno un fattore non costante in comune

$\Leftrightarrow R(f, g) = 0.$

Dim. $\Rightarrow$ f, g hanno un fattore non costante in comune

$\exists A, B \in D[x]$ della forma:

$$A = -\alpha_1 - \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1}$$

$$B = \beta_1 + \beta_2 x + \dots + \beta_n x^{n-1}$$

$\alpha_j \neq 0$, $\beta_k \neq 0$ per almeno un j e un k, $Bf = Ag$

$\Rightarrow$ $a_0 \beta_1 = -b_0 \alpha_1$

$a_1 \beta_1 + a_0 \beta_2 = -b_1 \alpha_1 - b_0 \alpha_2$

$\dots\dots$

$a_n \beta_m = -b_m \alpha_n$

Queste equazioni esprimono l'esistenza di una soluzione non banale $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ di un sistema di equazioni lineari omogenee la cui matrice dei coefficienti è la trasposta della matrice risultante $\Rightarrow R(f,g) = 0$

$\Leftarrow$ $R(f,g) = 0 \Rightarrow$ il sistema di equazioni scritto prima nelle incognite $\beta_1, \dots, \beta_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, ha una soluzione non banale in F, campo dei quozienti di D e quindi anche in D poichè il sistema è omogeneo $\exists\ \alpha_j \neq 0$, $\beta_k \neq 0$, per qualche j e k $\Rightarrow$ $Bf = Ag \Rightarrow f, g$ hanno un fattore non costante in comune D.

Prop. $f, g \in D[X]$, D' un UFD che contiene D.
Se f e g hanno un fattore non costante in comune in $D'[X]$
$\Rightarrow$ ne hanno uno anche in $D[X]$.
($R(f,g) = 0$ dipende solo dai coefficienti di f e g)
$R(f, f')$ viene definito discriminante di f, si denota $\Delta(f)$

Prop. $f \in D[X]$ ha un fattore multiplo non costante $\Leftrightarrow$ $\Delta(f) = 0$

Dim. Supponiamo $\Delta(f) = 0 \Rightarrow$ f e f' hanno un fattore non costante g in comune, che possiamo supporre irriducibile
Si ha che $f = gh$, e $f' = g'h + gh'$. Poichè $g \mid f'$, $g \mid g'h$.
Dal momento che $gr(g') < gr(g)$ e g è irriducibile
$\Rightarrow$ $g \mid h \Rightarrow g^2 \mid f$
Viceversa se $\exists\ g$ non costante $/$ $f = g^2 k$
$\Rightarrow$ $f' = 2gg'k + g^2 k' \Rightarrow g \mid f$ e $g \mid f' \Rightarrow \Delta(f) = 0$
$k = \bar{k}$
$R(f,g) = 0$ implica che f e g hanno una radice in comune.

Oss. $f, g \in D[X_1, \dots, X_N]$ con $N \geq 2$.
Se si pensano come polinomi in X_N a coefficienti in $D[X_1, \dots, X_{N-1}]$, il loro risultante $R(f,g)$ rispetto a X_N è un polinomio di $D[X_1, \dots, X_{N-1}]$. Viene anche detto polinomio ottenuto da f e g eliminando X_N.

Teo. $K = \bar{K}$ $f, g \in K[X_1, \dots, X_N]$, f irriducibile.
Se $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^N / f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$
$\Rightarrow f / g$

Teo. $F = A_n + A_{n-1} X_N + \dots + A_0 X_N^n$
$G = B_m + B_{m-1} X_N + \dots + B_0 X_N^m$
A_j e B_k omogenei di grado j e k in $X_1, \dots, X_{N-1}$ e $A_0 \cdot B_0 \neq 0$
$\Rightarrow R(F,G)$ rispetto a λ_N è un polinomio in $X_1, \dots, X_{N-1}$ omogeneo al grado $m \cdot n$ oppure $R(F,G) = 0$

Anelli noetheriani

Def. Un anello A in cui ogni ideale è finitamente generato si dice noetheriano.
Esempi in tale proposito sono costituiti dai campi, dai PID, da $\mathbb{Z}$, da $K[X]$ con K campo, e da quozienti dei precedenti.

Teorema (della base di Hilbert)
R anello noetheriano $\Rightarrow R[X]$ è noetheriano

Prop. caratterizzante gli anelli noetheriani
A anello noetheriano $\iff$ ogni catena ascendente di ideali
$I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \dots \subset A$
è stazionaria, cioè $\exists \; n > 1 / I_n = I_{n+1} = \dots$

Dim. A noetheriano e siano (*) una catena ascendente di ideali tali che possiamo supporre tutti propri. Allora,
$I := \bigcup I_n$
è un ideale proprio di A perché se $1 \in I \Rightarrow 1 \in I_n$ per qualche n contro ipotesi. Ma per ipotesi A è noetheriano $\Rightarrow \exists \; a_1, \dots, a_m \in I$
$I = (a_1, \dots, a_m)$
Gli $a_i \in I_{n(i)} \Rightarrow n_0 = \max\{n(1), \dots, n(m)\}$
$\Rightarrow a_1, \dots, a_m \in I_{n_0} \Rightarrow \forall n$ si ha che $I_n \subset I \subset I_{n_0}$
$\Rightarrow I_{n_0} = I_{n_0+1} = I_{n_0+2}$

Viceversa sia I un ideale di A.
Se I non fosse finitamente generato sarebbe possibile trovare una successione $a_1, a_2, \dots$ di elementi di I

$$(a_1) \subsetneq (a_1, a_2) \subsetneq (a_1, a_2, a_3)$$

(08.11.2010)

Anelli noetheriani

Def Un anello A in cui ogni ideale è finitamente generato si dice *noetheriano*

Esempi: campi, $PID(\mathbb{Z}, K[x]$ con K campo), quozienti di anelli noetheriani.

Teorema della base di Hilbert

R anello noetheriano $\Rightarrow R[x]$ è noetheriano.
(x indeterminata)

Oss $R[x_1]$ noether $\Rightarrow R[x_1][x_2]$ noether $\Rightarrow \dots \Rightarrow R[x_1,\dots,x_n]$ anello noetheriano !!!
(th Ricci)

Prop caratterizzante gli anelli noetheriani

A anello noeth $\Leftrightarrow$ ogni catena ascendente di ideali $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \dots \subset A$ è stazionaria, cioè $\exists\, n>1 \;/\; I_n = I_{n+1} = \dots$

dim $\Rightarrow$ Sia $I_1 \subset \dots \subset A$ una catena ascendente di ideali che vogliamo supporre tutti propri. Allora $I := \bigcup_n I_n$ è un ideale proprio di A perché se $1 \in I \Rightarrow 1 \in I_n$ per qualche n contro ipotesi. Ma A è noetheriano $\Rightarrow \exists\, a_1,\dots,a_m \in I \;/ I = (a_1,\dots,a_m)$
Gli $a_i \in I_{n(i)} \Rightarrow n_0 = \max\{n(1),\dots,n(m)\} \Rightarrow a_1,\dots,a_m \in I_{n_0}$
$\Rightarrow \forall n$ si ha $I_n \subset I \subset I_{n_0} \Rightarrow I_{n_0} = I_{n_0+1} = I_{n_0+2} = \dots$

$\Leftarrow$ I ideale di A. Se I non fosse finitamente generato sarebbe possibile trovare una successione $a_1, a_2, \dots$ di elementi di I /
$(a_1) \subsetneq (a_1, a_2) \subsetneq (a_1, a_2, a_3) \dots$ **ass**

Oss $R[x_1,\dots,x_n,\dots]$ non è noetheriano perché ha la catena ascendente di ideali: $(x_1) \subsetneq (x_1,x_2) \subsetneq \dots \subsetneq (x_1,\dots,x_n) \subsetneq \dots$ che non è stazionaria.

Dim Teorema $f(x) = a_0 + a_1 x \dots + a_i x^i$ $a_i \neq 0$ coeff. direttore di f
$I \trianglelefteq R[x]$ $\forall i > 0$ indichiamo con J_i l'insieme dei coeff direttori dei polinomi di grado $\leq i$ che appartengono a I
J := insieme dei coeff direttori dei polinomi di I
$J_0 \subset J_1 \subset \dots \subset J$. Si può vedere che J_i e J sono ideali di R
R noeth $\Rightarrow$ ogni J_i è generato da un numero finito di elementi $\{a_{ij}\}_j$ che sono i coeff. direttori di altrettanti $\{F_{ij}\}$ di grado $\leq i$ che appartengono a I.
Analogamente J è finitamente generato $\Rightarrow \exists\, \{F_m\}\, F_m \in I$, in numero finito i cui coeff direttori $\{a_m\}$ generano J. Sia $N = \max\{\deg(F_m)\}_m$, $I' = \left(\{F_{ij}\}_{i\leq N, j}\right) = \{F_m\}_m$ ← ideale generato dai polinomi in questione

Vogliamo far vedere che $I = I'$ (metodo doppia inclusione)
- Si ha che $I' \subset I$
- Supponiamo RAA che $I' \neq I$ cioè $\exists\, G \in I \setminus I'$ di grado minimo con questa proprietà.

- Se $\deg(G) > N$ possiamo trovare dei polinomi $Q_1, Q_2, \dots \in R[x]$ / $\sum_m Q_m F_m$ e G abbiano lo stesso grado e lo stesso coeff. direttore.

$G = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$
$a_d \in J \Rightarrow a_d = \sum_m q_m a_m$ (coeff. direttori di alcuni dei polinomi F_m)

$\Rightarrow$ il polinomio $\sum_m x^{d-\deg(F_m)} q_m F_m$ ha lo stesso grado e lo stesso coeff. direttore di G
$\Rightarrow$ i polinomi $Q_m = x^{d-\deg(F_m)} q_m$)
Considero $\deg(G - \sum_m a_m F_m) < \deg G \Rightarrow G - \sum_m Q_m F_m \in I'$
$\Rightarrow G = G - \sum Q_m F_m + \sum Q_m F_m$ assurdo.

- Se $\deg(F) \leq N$ possiamo trovare costanti q_j tali che $\sum_j q_j F_{ij}$ abbiano grado i e lo stesso coeff. direttore di G. Infatti: $G = a_0 + a_1 x + \dots + a_i x^i$ $a_i \in J$, $a_i = \sum_j q_j a_{ij}$
$\Rightarrow$ il polinomio $\sum q_j F_{ij}$ ha stesso grado e coeff direttore di G. La conclusione segue come prima. **qed**

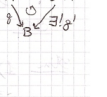
Corollario A anello noeth, ogni A-algebra di tipo finito è un anello noeth

Dim B è una A-algebra di tipo finito $\Rightarrow B \cong A[b_1,\dots,b_n] = \phi(A)$ dove ϕ è l'omomorfismo $\phi : A[x_1,\dots,x_n] \to B$, $x_i \mapsto b_i$
$B \cong \frac{A[x_1,\dots,x_n]}{\ker\phi}$
Quozienti di anelli noeth sono anelli noeth $\Rightarrow B$ noeth. **qed**

LOCALIZZAZIONE

A anello, S sottoinsieme $\subset A$. Cerco un procedimento per costruire A in modo da rendere invertibili gli elementi di S.

Def Una *localizzazione* di A rispetto ad S è un omomorfismo di anelli $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ tale che l'immagine $f(s)$ $\forall s \in S$ sia invertibile in $S^{-1}A$ e tale che $\forall\, g : A \to B$ anello / $g(s)$ sia invertibile $\forall s \in S$ $\exists!$ l'omomorfismo $g' : S^{-1}A \to B$ / $g = g' \circ f$. f si dice *omomorfismo di localizzazione*.



Si può verificare che $S^{-1}A$ è unico a meno di isomorfismi.

Es $\mathbb{Q}$ è l'esempio principale di localizzazione
$\mathbb{Q}$ campo dei razionali. $A = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
Considero $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. $\equiv$ rel. equivalenza (EST) $(n,u) \equiv (n',u') \Leftrightarrow nu' - un' = 0$
$\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*}{\equiv} \ni (n,u)$ come $\frac{n}{u}$ FRAZIONE
$+ : \frac{n}{u} + \frac{n'}{u'} = \frac{nu'+un'}{uu'}$ $\cdot : \frac{n}{u} \cdot \frac{n'}{u'} = \frac{nn'}{uu'}$

Se $\mathbb{Z}$ avesse divisori dello zero non potrei dimostrare la transitività di $\equiv$

In generale: A anello qualsiasi, $S \subset A$ sistema moltiplicativo

$A \times S$, $\equiv$: $(a,s) \equiv (b,s') \iff \exists t \in S$ / $t(s'a - sb) = 0$

La presenza di t giustificata con il fatto che possono esserci divisori dello zero in S

es $A = \mathbb{Z}_{12}$ $S = \{1,2,4,6,8,10\}$ $\frac{5}{2} \equiv \frac{8}{8}$, $\frac{6}{8} \equiv \frac{1}{1}$ $t=1$ ma $\frac{6}{8} \equiv \frac{1}{1}$ solo se prendo $t=4$

$S^{-1}A = \underline{A \times S}$ $\ni \frac{a}{s}$ $+$, $\cdot$ $\quad f(a) = \frac{a}{1}$

In generale l'omomorfismo $f: A \to S^{-1}A$ non è iniettivo.

PROP $S \subset A$ sist. moltiplicativo. Il nucleo di $f: A \to S^{-1}A$ è
$\ker(f) = \{a \in A \,/\, sa = 0$ per qualche $s \in S\}$. In particolare
f è iniettiva $\iff S$ non contiene 0-divisori

Dim Se $sa = 0$ per qualche $s \in S \Rightarrow f(a) = \frac{a}{1} = \frac{as}{s} = \frac{0}{s} = 0$
Viceversa se $f(a) = 0 \Rightarrow (a,1) \equiv (0,s')$ per qualche $s' \in S$
$\Rightarrow \exists t \in S$ / $t(s'a) = 0 \Rightarrow sa = 0$ con $s = ts'$. q.ed

Def $S \subset A$ formato da tutti gli elementi che non sono 0-divisori
$S^{-1}A$ si dice allora anello totale delle frazioni di A. Se A è un dominio e $S = A \setminus \{0\}$ allora $S^{-1}A$ è il CAMPO dei quozienti di A

PROP $S \subset A$ sistema moltiplicativo. $f: A \to S^{-1}A$. Allora
1) Se $J \subset S^{-1}A$ è un ideale allora $J = J^{ce} = f^{-1}(J)\, S^{-1}(A)$
In altre parole tutti gli ideali di $S^{-1}A$ sono della forma $I^e = I(S^{-1}A)$
con I ideale di A
2) Se $J, J' \subset S^{-1}A$ sono due ideali allora $f^{-1}(J) = f^{-1}(J') \iff J = J'$
cioè l'applicazione dall'insieme degli ideali di $S^{-1}A$ in quello degli
ideali di A che manda un ideale J nell'ideale $f^{-1}(J)$ è iniettiva.
3) Ogni ideale primo di $S^{-1}A$ è della forma $\mathfrak{p} S^{-1}A$ per qualche
$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ con $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Viceversa $\forall\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) / \mathfrak{p} \cap S = \emptyset$
l'ideale $\mathfrak{p} S^{-1}A$ è primo.

Oss $\exists$ una corrispondenza tra $\left\{\begin{matrix}\text{ideali primi di } A \\ \text{che non} \\ \text{intersecano } S\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{ideali primi} \\ \text{di } S^{-1}A\end{matrix}\right\}$

Dim 1) Poniamo $I = f^{-1}(J)$. Se $x = \frac{a}{s} \in J$ allora $xf(s) = f(a) \in J$
$\Rightarrow a \in I$ e $x = \left(\frac{1}{s}\right) f(a) \in I(S^{-1}A) \Rightarrow I(S^{-1}A) \supset J$. Ultima inclusione è ovvia.
(?! $S^{-1}A$ I)
2) $J = J^{ce}$ $\forall$ ideale J di $S^{-1}A$ implica ciò asserito.

3) $\Rightarrow$ Se $\mathfrak{q}$ è ideale primo di $S^{-1}A$ allora $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$ è un ideale primo di A
e $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} S^{-1}A$ per 1). Inoltre $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ perché altrimenti $\mathfrak{q}$
conterrebbe un elemento invertibile
$\Leftarrow$ $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ / $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ e sia $\frac{a}{s}\frac{b}{t} \in \mathfrak{p} S^{-1}A$
$\Rightarrow \exists\, u \in S$ / $u(ab) \in \mathfrak{p}$ e poiché $u \notin \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$
e quindi $\frac{a}{s} \in \mathfrak{p} S^{-1}A$ o $\frac{b}{t} \in \mathfrak{p} S^{-1}A$. Inoltre $1 \notin \mathfrak{p} S^{-1}A$
$\Rightarrow \mathfrak{p} S^{-1}A$ è primo. q.ed

Esempio $\mathfrak{p} \lhd A$ ideale primo, $S = A \setminus \mathfrak{p}$ è sistema moltiplicativo
La localizzazione $S^{-1}A$ si indica con $A_{\mathfrak{p}}$ e indichiamo con $\mathfrak{M} = \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ (ideale primo)
Se $\frac{a}{s} \notin \mathfrak{M} \Rightarrow a \notin \mathfrak{p}$ cioè $a \in S$ e quindi $\frac{a}{s}$ è invertibile
$\Rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ è anello locale d'ideale massimale $\mathfrak{M}$

PROP A anello, $S \subset A$ sistema moltiplicativo, A noetheriano. Allora $S^{-1}A$ noeth.

LOCALIZZAZIONE DI UN A-MODULO

Def $S \subset A$ sistema moltiplicativo. M A-modulo. Si definisce $S^{-1}M = \underline{M \times S}$
$(m,s) \underset{\text{def}}{\equiv} (m',s') \iff \exists\, u \in S$ / $u(ms' - sm') = 0$
(def equiv; ms' sm' moltiplicazione in M)
$S^{-1}M$ ha un'ovvia struttura di $S^{-1}A$-modulo definita dall'operazione $\frac{a}{s}\frac{m}{t} = \frac{am}{st}$
$S^{-1}M$ è detta localizzazione di M rispetto a S

$K[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriano

$\mathcal{U} = (f_1, \dots f_m)$ finitamente generato $\quad I(X) = (g_1, \dots g_m)$ finitamente generato

Le corrispondenze V e I sono in biezione con inclusioni di ideali radicali

$I(X) = (g)$ $\quad X$ ipersuperficie

$\mathbb{A}^2$ $K[x,y]$ $\quad (g(x,y))$ curva piana affine

$\mathbb{P}^2$ $K[x_0, x_1, x_2]$ $\quad (G(x_0, x_1, x_2))$ curva piana proiettiva

$\mathbb{A}^3$ superfici (quadriche)

$\mathbb{P}^3$ $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ quadriche omogenee

SPAZI PROIETTIVI

- Studiare proprietà di enti geometrici non legate alla metrica
- Desargues cancella il concetto di parallelismo, è nato poi nel 1800 (Poncelet, Monge)

Def V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dim. finita. $\mathbb{P}(V)$ è **spazio proiettivo associato a V** i cui punti sono i sottospazi vettoriali di dim 1 di V (le rette).

$\overline{v} \in V \setminus \overline{0}$, $\overline{v}$ genera il sottospazio $\langle \overline{v} \rangle = \{\lambda \overline{v} / \lambda \in \mathbb{K}\} = [\overline{v}]$

$[\overline{v}] = [\overline{w}] \iff \exists \lambda / \overline{v} = \lambda \overline{w}$

$\dim V = 0$	$\dim \mathbb{P}(V) = -1$	$\longrightarrow \emptyset$
$= 1$	$= 0$	1 punto
$= 2$	$= 1$	retta proiettiva
$n+1$	$= n$	spazio proiettivo di dim n

$V = \mathbb{K}^{n+1}$ $\quad \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n$

$[\overline{v}] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ non nulle su $\dim_{\mathbb{K}} n$

$[\overline{w}] = [y_0 : y_1 : \dots : y_n]$

$[\overline{v}] = [\overline{w}] \iff x_i = \lambda y_i \quad \lambda \neq 0$

$[0 : \dots : 0]$ non è una retta vettoriale, e quindi NON RAPPRESENTA un punto di $\mathbb{P}^n$

$e_0, \dots, e_n$ base di $V \longleftrightarrow [e_0], \dots, [e_n]$, $[u] = [1 : \dots : 1] = [e_0 + \dots + e_n]$

($[e_0], \dots, [e_n]$ punti che costituiscono una variabile) ⇒ dunque aggiungo PUNTO UNITÀ per poter tornare a V e avere una base

$W \underset{\text{sott. vett.}}{\subset} V \longrightarrow \mathbb{P}(W) \underset{\text{sottospazio proiettivo}}{\subset} \mathbb{P}(V)$

Def **Codimensione** di W = $\dim V - \dim W$

$\text{cod} = 1 \Rightarrow$ iperpiano
$\text{cod} = n-1 \Rightarrow$ retta
$\text{cod} = n-2 \Rightarrow$ piano

Un iperpiano è individuato dall'equazione omogenea $a_0 X_0 + \dots + a_n X_n = 0$ (l'eq. due rette omogenee per poter raccogliere λ) IPERPIANO PROIETTIVO di dim $n-1$

$X_i = 0$ i-esimo iperpiano coordinato H_i

In $\mathbb{P}^1$ gli iperpiani coordinati sono $[1:0]$, $[0:1]$

$\begin{cases} a_{00} X_0 + \dots + a_{0n} X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{t0} X_0 + \dots + a_{tn} X_n = 0 \end{cases}$ t equazioni omogenee, individuano $W \underset{\text{sp.}}{\subset} V$

$\Rightarrow A = (a_{ij})$ $\quad r = \text{rg}(A)$ $\quad \dim \mathbb{P}(W) = n - r$.

Stiamo in $\mathbb{P}^n$.

Def $P_1, \dots, P_t$ in **posizione generale** se
- $t \leq n+1$ se i vettori corrispondenti sono l.i.
- $t > n+1$ se presi comunque $n+1$ di essi i vettori corrispondenti sono l.i.

$\mathbb{P}^2$ piano proiettivo



i tre punti allineati non sono in posizione generale e stanno sulla stessa retta (i vettori corrispondenti sono l.d.) dunque per X generico $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_{0P} & x_{1P} & x_{2P} \\ x_{0Q} & x_{1Q} & x_{2Q} \end{vmatrix} = 0$ EQUAZIONE RETTA

$\mathbb{P}^3$ analogamente ho l'equazione del piano $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_{0P} & x_{1P} & x_{2P} & x_{3P} \\ x_{0Q} & x_{1Q} & x_{2Q} & x_{3Q} \\ x_{0T} & x_{1T} & x_{2T} & x_{3T} \end{vmatrix} = 0$

Oss Vale la formula di Grassmann:

S_1, S_2 sottospazi di $\mathbb{P}^n$ $\quad \dim(\underbrace{L(S_1, S_2)}_{\text{sottospazio di } \mathbb{P}^n \text{ generato da } S_1 \text{ e } S_2}) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$

Ovviamente ho il vincolo $\dim(L(S_1, S_2)) \leq n$

⇒ in $\mathbb{P}^2$ due rette si incontrano sempre ($\dim$(un punto) $= 0$)
in $\mathbb{P}^3$ due piani si incontrano sempre ($\dim$(retta) $= 1$)

Def S_1, S_2 sono in posizione generale se $\dim(S_1 \cap S_2) = \max\{0, \dim S_1 + \dim S_2 - n\}$
se $h + k \geq n$ o 0 se $h + k < n$

CONO PROIETTANTE J da P

$C_P(J) = \bigcup_{Q \in J} \overline{PQ}$



$L(S_1, S_2) = \bigcup_{P_1 \in S_1, P_2 \in S_2} L(P_1, P_2) = \bigcup_{P \in S_2} C_P(S_1)$

π proiezione da P su H iperpiano

$L(P,Q) \cap H = \pi_{P,H}(Q)$



$\forall J \subset \mathbb{P}^n$, $P \notin J$ $\quad P_{P,H}(J) = H \cap C_P(J)$ proiezione di J su H da P

Es $\mathbb{P}^n$ $H_0: x_0 = 0$ $P[1:0:\dots:0]$

$\forall\, Q \in \mathbb{P}^n$ $Q \neq P$ $Q[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ $\pi_{P,H_0}(Q) = [0 : x_1 : \dots : x_n]$

OSS Potevo definire $\mathbb{P}(V) = V \setminus \{\vec{0}\} / \sim$ con $\sim$ | $\vec{v} \sim \vec{w} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ | $\vec{v} = \lambda \vec{w}$

OSS Sottospazi non banali di $\mathbb{P}^n$ $\longleftrightarrow$ sottospazi non banali di vettori linearmente indipendenti di $n+1$ incognite

OSS $n \geq 1$ $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ = $\mathbb{K}$-spazio vettoriale formato dai polinomi omogenei di grado d in $x_0, \dots, x_n$

$\mathbb{P}(V) = \{$ ipersuperfici di grado d di $\mathbb{P}^n \}$

$n = 2 \Rightarrow \mathbb{P}(V)$ sono le curve piane

Esempio V spazio vettoriale, $1 \leq k \leq \dim V$

$G_k(V)$ = insieme dei sottospazi vettoriali di dim k di V

GRASSMANNIANA dei k-piani di V

$V = \mathbb{K}^n \longrightarrow G(k, n)$

$\mathbb{P}(V) = G_1(V) = (G(1, n))$ possibile def alternativa

Es $V = \mathbb{K}^4$ $G(2,4) \longrightarrow \mathbb{G}(1,3)$ = GRASSMANNIANA delle rette di $\mathbb{P}^3$ (isomorfismo)

$G(1,3) \hookrightarrow Q \subseteq \mathbb{P}^5$ QUADRICA DI KLEIN (Ipersuperficie di grado 2)

"dim" $P = [x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3$, $Q = [y_0, y_1, y_2, y_3] \in \mathbb{P}^3$ $P \neq Q$

$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ rg $2 \Leftrightarrow P \neq Q$ $\Rightarrow P_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = x_i y_j - x_j y_i$ non sono tutti nulli

$\overline{PQ} \longmapsto [P_{01} : P_{02} : P_{03} : P_{12} : P_{13} : P_{23}]$ non sono tutti nulli

$\overline{PQ} \in G(1,3)$ P_{ij} coordinate Plückeriane di $\overline{PQ}$

Si può fare vedere che questo punto non dipende da

(ogni) ① la scelta delle coordinate omogenee di P e Q

(ogni) ② la scelta di P e Q

$P' = \lambda P + \mu Q$ $Q' = \lambda' P + \mu' Q$

Si vede che le coordinate plückeriane della retta soddisfano l'identità

(*) $P_{01}P_{23} - P_{02}P_{13} + P_{03}P_{12} = 0$

infatti è il determinante della matrice $\begin{pmatrix} x_0 & y_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ che è chiaramente nullo.

$\Rightarrow [P_{01} : P_{02} : P_{03} : P_{12} : P_{13} : P_{23}] \in Q$ quadrica di equazione $X_{01}X_{23} - X_{02}X_{13} + X_{03}X_{12} = 0$

Viceversa: ogni punto $C \in Q$ proviene da una sola retta di $\mathbb{P}^3$ (dim)

$C = [P_{01} : P_{02} : P_{03} : P_{12} : P_{13} : P_{23}]$

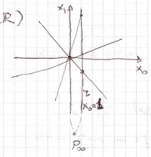
hp: C soddisfa (*) (non nulla)

$P = [0 : P_{01} : P_{02} : P_{03}]$ $Q = [-P_{01} : 0 : P_{12} : P_{13}]$

(ogni) Non dipende dalla scelta delle coordinate omogenee di C. "giù"

Geometria proiettiva / geometria affine

$\mathbb{P}^n$ = spazio affine $\mathbb{A}^n$ a cui vengono aggiunti dei punti detti impropri



$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{H_0\} \longrightarrow r$

$[x_0, x_1] \quad x_0 \neq 0$

$[x_0 : x_1] \longmapsto \left(1, \frac{x_1}{x_0}\right)$

$[1 : x] \longleftarrow (1, x)$

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 + H_0$ (retta che contiene)

In generale $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n +$ iperpiano improprio (che non c'è)

$\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_0$

$J_0 : (y_1, \dots, y_n) \longmapsto [1 : y_1 : \dots : y_n]$ (proiettivizzazione)

$\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \longleftarrow [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ $x_0 \neq 0$ (deomogeneizzazione)

$\Rightarrow$ corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{A}^n \cup H_0$ e $\mathbb{P}^n$

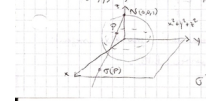
MODELLI GEOMETRICI di $\mathbb{P}^n$

Es① $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ = proiezione stereografica di una sfera meno il polo nord su un piano

Es② sfera S^n di E^{n+1} di centro l'origine e raggio 1 identificando i punti antipodali $= \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

① E^3 $p: z = 0$ piano, S^2 sfera di raggio 1 e centro $(0,0,0)$, $N = (0,0,1) \in S^2$ polo nord

(x, y, z) coordinate affini $\sigma : S^2 \setminus \{N\} \to p$ proiezione stereografica



$NP \begin{cases} x = 0 + tx' \\ y = 0 + ty' \\ z = 1 + t(z' - 1) \end{cases}$ $\sigma(x', y', z') = p \wedge NP = \left(\frac{x'}{1-z'}, \frac{y'}{1-z'}, 0\right)$

$\sigma^{-1}(u, v, 0) \begin{cases} x = 0 + tu \\ y = 0 + tv \\ z = 1 - t \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2+v^2+1} \\ y = \frac{2v}{u^2+v^2+1} \\ z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{cases}$

(22.11.2010)

SPAZI PROIETTIVI

$\mathbb{A}^n = (y_1, \dots, y_n)$

$\mathbb{P}^n \quad [x_0 : \dots : x_n]$

$H_0 = 0$

- $\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n - H_0$

$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto [1 : y_1 : \dots : y_n]$

$\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \longleftarrow [x_0 : \dots : x_n]$

Modelli geometrici:

① • $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ proiezione stereografica

E^3 $p : z = 0$ piano, S^2 sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 1,

$N = (0,0,1) \in S^2$ polo nord

(x, y, z) coordinate affini

$\sigma : S^2 - \{N\} \longrightarrow p$ proiezione stereografica

$$Np \begin{cases} x = 0 + tx' \\ y = 0 + ty' \\ z = 1 + t(z' - 1) \end{cases}$$

$$G(x', y', z') = p \cap Np = \left(\frac{x'}{1-z'}, \frac{y'}{1-z'}, 0\right)$$

$$G^{-1}(u, v, 0) \cdot \begin{cases} x = 0 + tu \\ y = 0 + tv \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{2}{u^2+v^2+1}\, u \\ y = \frac{2}{u^2+v^2+1}\, v \\ z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{cases}$$

$S^2 \longrightarrow p + N$

Se pensiamo a p come $\mathbb{C}$ $(u, v, 0) \to u + iv$

$$\nu : S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$N \longmapsto \infty$$

$$\sigma(x', y', z') = \frac{x'}{1-z'} + \frac{y'}{1-z'}\, i = \frac{x' + iy'}{1-z'} \qquad z' \neq 1$$

La sfera è un modello geometrico di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ detta sfera di Riemann.

② • $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ rette per l'origine di E^{n+1}

$S^n \subset E^{n+1}$ di centro l'origine e raggio 1

$$k : S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$x \longmapsto k(x)$ retta per l'origine che contiene x.

$k(x) \cap S^n = \{-x, x\}$ con x e $-x$ punti antipodali

k è suriettiva

$k^{-1}(r) = \{x, -x\}$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{\text{coppie di punti antipodali}\} = S^n / \equiv \qquad x \equiv y \iff y = -x$

③ · $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

r retta per $(0,0)$ $\quad r \neq x_0$

C circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1

$r \cap C = \{(0,0), 1 \text{ punto variabile}\}$

$r \cap H_0 = (0,0)$

$\gamma : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) - H_0 \longrightarrow C - \{(0,0)\}$

$r \longmapsto \gamma(r)$

$H_0 \longmapsto (0,0)$

CAMBIAMENTI DI COORDINATE PROIETTIVE E PROIETTIVITÀ

V spazio vettoriale $\rightsquigarrow \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}$ di dimensione n

2 basi di V $\rightsquigarrow$ 2 riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}$

$\bar{e}$ $\{\bar{e_0}, \bar{e_1}, \dots, \bar{e_n}\}$

$\bar{f}$ $\{\bar{f_0}, \bar{f_1}, \dots, \bar{f_n}\}$

Dall'algebra lineare:

$A = M_{f,e} \in GL_{n+1}(K)$ matrice che esprime il cambiamento di coordinate dei vettori da $\bar{e}$ ad $\bar{f}$

$\Rightarrow \bar{y} = A\bar{x}$ $\quad \forall$ vettore $\bar{v} \in V$

$\bar{v} = x_0 \bar{e_0} + \dots + x_n \bar{e_n} = y_0 \bar{f_0} + \dots + y_n \bar{f_n}$

Passando al proiettivo:

$[\bar{v}] \in \mathbb{P}^n$ $\qquad [\bar{x}] \to [\lambda\bar{x}] \Rightarrow [\bar{y}] \to [\lambda\bar{y}]$

$\quad \| \quad \| \qquad\qquad \| \quad \|$

$\quad P \text{ in } \bar{e} \quad P \qquad\qquad P \quad \text{in } \bar{f} \quad P$

La matrice A non è univocamente determinata dai due riferimenti proiettivi assegnati perchè $\bar{e}$ ed $\bar{f}$ sono individuate a meno di un fattore di proporzionalità.

Diverse scelte per $\bar{e}$ ed $\bar{f} \Rightarrow A$ viene sostituita da αA con $\alpha \neq 0$ e si avrà $\bar{y} = \alpha A \bar{x}$, e per P dato da $\bar{x}$ troviamo di nuovo delle coordinate omogenee $\bar{y}$ in $\bar{f}$.

Prop. Siano $\bar{e}, \bar{f}$ 2 riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}$.

Esiste $A \in GL_{n+1}(K)$ individuata a meno di un fattore di proporzionalità diverso da zero, tale che se

$\bar{x}$ = coordinate omogenee di $P \in \mathbb{P}$ rispetto ad $\bar{e} \Rightarrow$

$\bar{y}$ = coordinate omogenee di P rispetto ad $\bar{f}$ si ottiene $\bar{y} = A\bar{x}$.

Oss ① $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$

$\bar{y} = A\bar{x}$ $\qquad \bar{z} = B\bar{y}$ $\qquad \bar{z} = (BA)\bar{x}$

$f \leftarrow e$ $\qquad g \leftarrow f$ $\qquad g(ff) \leftarrow e$

② $\bar{x} = A^{-1}\bar{y}$

$e \leftarrow f$

- $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$

sistema di riferimento proiettivo $\bar{e_0}, \dots, \bar{e_n}$

$n+1$ punti fondamentali

$F_0 = [\bar{e_0}], \dots, F_n = [\bar{e_n}]$

e il punto unità $U = [\bar{e_0} + \bar{e_1} + \dots + \bar{e_n}]$

$F_0, \dots, F_n, U$ sono $n+2$ punti in posizione generale

- Viceversa, dati $n+2$ punti in posizione generale $P_0, \dots, P_N$, $N \in \mathbb{P}$, esiste un unico sistema di coordinate omogenee in cui essi sono i punti fondamentali.

Infatti consideriamo i vettori $\bar{v_0}, \dots, \bar{v_n} \in V$, $[\bar{v_i}] = P_i$ $i = 0, \dots, n$

$P_0, \dots, P_n$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \{\bar{v_0}, \dots, \bar{v_n}\}$ è una base di V.

Quindi scegliamo un vettore $\bar{n} \in V$ / $[\bar{n}] = N$

$$\bar{n} = \lambda_0 \bar{v_0} + \dots + \lambda_n \bar{v_n} \qquad \lambda_i \in K, \ \lambda_i \neq 0$$

perché $P_0, P_1, \dots, P_n$ sono in posizione generale $\Rightarrow$ $(\lambda_0 \bar{v_0}), \dots, (\lambda_n \bar{v_n})$ hanno le proprietà volute e la loro "unità" segue da quella di $\lambda_0, \dots, \lambda_n$.

In pratica:

H, $\bar{e_0}, \dots, \bar{e_n}$ riferimento proiettivo

$P_0 = [P_{00} : \dots : P_{0n}]$

$P_1 = [P_{10} : \dots : P_{1n}]$

$\dots$

$P_n = [P_{n0} : \dots : P_{nn}]$

$M = [m_0 : \dots : m_n]$

punti in posizione generale

$\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = M$

$\lambda_0 [P_{00} : \dots : P_{0n}] + \dots +$

$\lambda_n [P_{n0} : \dots : P_{nn}] = [m_0 : \dots : m_n]$

$\bar{y} = A\bar{x}$

$A = B^{-1}$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_0 P_{00} & \dots & \lambda_n P_{n0} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_0 P_{0n} & \dots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix}$$

↑ vettori di V che formano una base di V che individua il nuovo riferimento

B esprime il cambiamento di coordinate da $P_0, \dots, P_n, M$ e $\bar{e_0}, \dots, \bar{e_n}$

Esempio

$\mathbb{P}^1$ $P_1 = [\lambda_1 : \mu_1]$ $P_2 = [\lambda_2 : \mu_2]$ $M = [\lambda_3 : \mu_3]$

Siano $\alpha, \beta \in k$ / $M = \alpha P_1 + \beta P_2$

cioè $\begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$

$\forall\ P = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}'$ siano $\gamma, \delta \in k$ /

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \alpha\lambda_1 \\ \alpha\mu_1 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} \beta\lambda_2 \\ \beta\mu_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ P ha coordinate omogenee $[\gamma : \delta]$ nel sistema di riferimento P_1, P_2, Π

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}}$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & \beta\lambda_2 \\ x_1 & \beta\mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha\lambda_1 & \beta\lambda_2 \\ \alpha\mu_1 & \beta\mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\beta(x_0\mu_2 - \lambda_2 x_1)}{\alpha\beta(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & \lambda_2 \\ x_1 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}$$

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & x_0 \\ \mu_1 & x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}$$

da cui poi mandar via i denominatori.

Def Un'applicazione biunivoca

$$f : \mathbb{P} = \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}' = \mathbb{P}(V')$$

è un isomorfismo se $\exists$ un isomorfismo

$$\varphi : V \to V' \ / \quad f([\bar{v}]) \equiv [\varphi(\bar{v})]$$

L'isomorfismo si dice indotto $\forall [\bar{v}] \in \mathbb{P}$ da φ, e se $\exists$ un isomorfismo $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ allora $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$ si dicono isomorfi.

Una proiettività di $\mathbb{P}$ è un isomorfismo da $\mathbb{P}$ in sè stesso.

$$\varphi : V \to V' \qquad f\ \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$$

Oss

① L'isomorfismo è una relazione di equivalenza tra spazi proiettivi.

② Due spazi proiettivi isomorfi hanno la stessa dimensione. Poichè ogni k-spazio vettoriale di dimensione $n+1$ è isomorfo a k^{n+1}, ogni spazio proiettivo di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{P}^n$.

③ $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ indotta a φ, indotta anche da $\lambda\varphi$ $\forall \lambda \in k^*$

infatti $[(\lambda\varphi)(\bar{v})] = [\lambda(\varphi(\bar{v}))] = [\varphi(\bar{v})] = f([\bar{v}])$ $\forall v \in V \setminus \{\bar{0}\}$.

Viceversa:

$\psi : V \to V$ induce $f \Rightarrow \psi = \lambda\varphi$, $\lambda \in k^*$.

Infatti $\forall\ \bar{v} \in V \quad \exists\ \lambda \in k^* \ / \ \varphi(\bar{v}) = \lambda\psi(\bar{v})$, cioè

$(\psi^{-1} \circ \varphi)(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$

Ne segue che $\bar{v} \in V - \{\bar{0}\}$ è un autovettore di $\psi^{-1} \circ \varphi \Rightarrow \psi^{-1} \circ \varphi = \lambda \cdot 1_V$ cioè $\psi = \lambda\varphi$

Ne segue che l'automorfismo che induce una data proiettività è individuato solo a meno di un fattore di proporzionalità.

- $1_{\mathbb{P}}$ identità = proiettività indotta da 1_V
- f, g proiettività $\Rightarrow$ $g \circ f$ è la proiettività indotta da $\psi \circ \varphi$ indotte da $\varphi, \psi \in GL(V)$

f proiettività $\Rightarrow$ f^{-1} proiettività indotte da φ^{-1}

$\Rightarrow$ $PGL(\mathbb{P})$ = gruppo proiettivo di $\mathbb{P}$
= gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}$

$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(k) \Rightarrow PGL_{n+1}(k)$ gruppo lineare proiettivo di ordine $n+1$. Abbiamo l'omomorfismo suriettivo di gruppi:

$$GL(V) \longrightarrow PGL(\mathbb{P}(V))$$
$$\varphi \longmapsto 1_{\mathbb{P}} \iff \varphi = \lambda 1_V \qquad \lambda \in k^*$$
$$\ker \pi = \{\varphi \,/\, \pi(\varphi) = 1_{\mathbb{P}}\} = \{\lambda 1_V : \lambda \in k^*\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \overset{\varphi}{\longrightarrow} & \mathbb{P}(V) \\ [\bar{e}] & & [\bar{e}] \\ f \text{ indotte da } \varphi & & A \in GL_{n+1}(k) \\ & & \text{matrice associata a } \varphi \end{array}$$

A definisce f rispetto ad $[\bar{e}]$, ed è individuata a meno di un fattore di proporzionalità

Prop. $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(V') = n$

$n+2$ punti in posizione generale di $\mathbb{P}$ $\quad P_0, \dots, P_{n+1}$

$n+2$ " $\mathbb{P}'$ $\quad Q_0, \dots, Q_{n+1}$

$\Rightarrow \exists!$ l'isomorfismo $f: \mathbb{P} \to \mathbb{P}' \,/\, f(P_i) = Q_i$

In particolare una proiettività che lascia fissi $n+2$ punti di $\mathbb{P}$ in posizione generale è l'identità.

① $f: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$

4 punti a 3 a 3 non allineati, possono sempre essere mandati in altri 4 punti a 3 a 3 non allineati

② $W \subset V$ sottinsieme $\qquad \varphi|_W \to f|_{\mathbb{P}(W)}$

③ **Def.** F, F' 2 figure di $\mathbb{P}$ sono dette proiettivamente equivalenti se $\exists\, f \in PGL(\mathbb{P}) \,/\, f(F) = F'$

Es. S, S' sottospazi di $\mathbb{P}(V)$

$\dim S = \dim S' \Rightarrow$ sono proiettività equivalenti

Es. k punti in posizione generale sono proiettivamente equivalenti se $k \leq n+2$

Prob. Quando due quaterne di $\mathbb{P}^1$ sono proiettivamente equivalenti?

Risposta: birapporto

Definiamo il birapporto. Siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1$, $P_1 \neq P_2 \neq P_3$ distinti.

Allora $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{y_1}{y_0} \in k \cup \{\infty\}$

dove $[y_0, y_1]$ sono le coordinate omogenee di P_4 nel riferimento proiettivo con P_1, P_2 punti fondamentali e P_3 punto unità.

Se $P_i = [\lambda_i, \mu_i]$ $\quad i = 1, \dots, 4$

allora $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}$

In coordinate non omogenee $z_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}$ per P_i:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)} \quad \text{se } \lambda_i \neq 0$$

Se $P_4 = P_1, P_2, P_3 \Rightarrow \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = 0, \infty, 1$

<u>Teor.</u> $\exists$ una proiettività $f: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ / $f(P_i) = Q_i$

$\iff \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$

(23.11.2010)

Esercitazioni di geometria proiettiva

$P = P(V)$ $\quad V = K^{n+1}$

$\dim V = n+1$ $\quad P(V) = \mathbb{P}^n$

Def. Riferimento proiettivo

$\{\underline{e}_0, \dots, \underline{e}_n\}$ base di V

$\underline{v} \in V \quad \underline{v} = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n$

$[\underline{v}] \in P \quad [\underline{v}] \longleftrightarrow [x_0, \dots, x_n]$

$\lambda \underline{v}, \ \lambda \in K^* \quad\quad [\lambda x_0, \dots, \lambda x_n]$

Oss. Per definire un riferimento proiettivo a partire da punti di P servono $n+2$ punti in posizione generale, ovvero tali per cui $n+1$ punti comunque scelti tra gli $n+2$ sono linearmente indipendenti. Infatti, $n+1$ non sono sufficienti, in quanto potrebbe essere:

$P_1 \longleftrightarrow v_1 \quad\quad P_1 \longleftrightarrow v_1$

$P_2 \longleftrightarrow v_2 \quad\quad P_2 \longleftrightarrow 2v_2$

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \neq \{\underline{v}_1, 2\underline{v}_2\}$

Due assegnazioni equivalenti dei punti portano a basi diverse. Serve pertanto un $(n+2)$-esimo punto, solitamente $U = \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_{n+1}$

Esercizi

i) Siamo in $\mathbb{R}^2(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$. Dati i punti $P_0 = [1, 0, -2]$, $P_1 = [0, -1, 1]$, $P_2 = [2, 0, 1]$, $P_3 = [1, -2, 5]$, dimostriamo che sono in posizione generale

Ris. Costruiamo la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Si verifica immediatamente che $\operatorname{rank}(A) = 3$ e che, per ogni cancellazione di una riga da A, il rango si mantiene.

ii) Con riferimento all'esempio precedente, costruiamo un riferimento proiettivo associato a $P_0, \dots, P_3$

Ris Costruiamo il riferimento proiettivo con P_0, P_1, P_2 linearmente indipendenti e scriviamo $P_3 = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$.

Sappiamo che $\exists!\ (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ che soddisfano il sistema lineare:

$$\begin{cases} 1 = \lambda_0 + 2\lambda_2 \\ -2 = -\lambda_1 \\ 5 = -2\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

Risulta $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \left(-\frac{13}{5}, 2, \frac{9}{5}\right)$.

Se scegliamo come coordinate omogenee $(\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$ abbiamo che P_0, P_1, P_2, P_3 sono i punti fondamentali del riferimento proiettivo cercato.

Cambiamenti di riferimento proiettivi

$P = P(V)$ $\quad \dim V = n+1$

Due basi diverse: $\{e_0, \dots, e_n\}$, $\{f_0, \dots, f_n\}$

$\underline{v} = x_0 \underline{e_0} + \dots + x_n \underline{e_n} \qquad X = (x_0, \dots, x_n)$

$\quad = y_0 \underline{f_0} + \dots + y_n \underline{f_n} \qquad Y = (y_0, \dots, y_n)$

$Y = AX \qquad A \in GL(n+1, K)$

A ha come colonne le componenti della base B rispetto alla base B'

Se $[x_0, \dots, x_n]$ e $[y_0, \dots, y_n]$ sono le coordinate omogenee di $P = [\underline{v}]$, allora tutte le matrici λA con $\lambda \in K^*$ danno lo stesso cambiamento di riferimento proiettivo.

Esercizio

Dati $P_0, \dots, P_3$ come prima, determinare le formule del cambiamento di riferimento proiettivo che consentono di passare da $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$ a P_0, P_1, P_2, P_3.

Ris.

$P_0 = [1, 0, -2] \qquad P_1 = [0, -1, -1] \qquad P_2 = [2, 0, 1]$

$P_3 = -\frac{13}{5} P_0 + 2 P_1 + \frac{9}{5} P_2$ (coordinate omogenee $\left[-\frac{13}{5} x_0, 2x_1, \frac{9}{5} x_2\right]$)

$[\mu_0 x_0, \mu_1 x_1, \mu_2 x_2]$

Costruiamo:

$$B = \begin{bmatrix} \mu_0 \cdot P_{0x} & \mu_1 \cdot P_{1x} & \mu_2 \cdot P_{2x} \\ \mu_0 \cdot P_{0y} & \mu_1 \cdot P_{1y} & \mu_2 \cdot P_{2y} \\ \mu_0 \cdot P_{0z} & \mu_1 \cdot P_{1z} & \mu_2 \cdot P_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{5} \cdot 1 & 2 \cdot 0 & \frac{9}{5} \cdot 2 \\ -\frac{13}{5} \cdot 0 & 2 \cdot (-1) & \frac{9}{5} \cdot 0 \\ -\frac{13}{5} \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) & \frac{9}{5} \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{13}{5} & 0 & \frac{18}{5} \\ 0 & -2 & 0 \\ \frac{26}{5} & -2 & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

Se x sono le coordinate rispetto al riferimento standard, e y le coordinate rispetto a $P_0, \dots, P_3$, $X = BY$ e $Y = B^{-1}X$

Def. $f: \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ applicazione biunivoca si dice proiettività se esiste un automorfismo $\varphi: V \to V$ tale che $f([\underline{v}]) = [\varphi(\underline{v})]$

Se $\mathcal{B}$ è una base di V e $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$ è la matrice associata a φ rispetto a $\mathcal{B}$, allora tutte le matrici λA, $\lambda \in K^*$, definiscono la stessa proiettività f.

Per definire in modo univoco una proiettività, è necessario e sufficiente dare l'immagine di $n+2$ punti in posizione generale.

Es. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$

Determinare la proiettività che abbia come punti fissi $A = [1,0,0]$, $B = [1,0,1]$, $C = [1,1,0]$ e che mandi $D = [1,2,1]$ in $E = [0,1,2]$

Oss. Sia $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la proiettività cercata.

Allora esisterà $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isomorfismo con $f([\underline{v}]) = [\varphi(\underline{v})]$.

Cosa significa che $f([\underline{v}]) = [\underline{v}]$

$$[\varphi(v)] \quad \varphi(v) = \lambda \underline{v}$$

I punti fissi della proiettività sono dunque gli autovettori associati a φ. Possiamo definire, utilizzando A, B, C, una base di autovettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \qquad [A^t B^t C^t] \cdot \mathrm{diag}(\lambda_i) \cdot [A^t B^t C^t]^{-1}$$

φ sarà necessariamente di questa forma in termini matriciali.

Facendo i conti risulta:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1+\lambda_3 & -\lambda_1+\lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Imponendo che $f(D) = E$, con fattore di proporzionalità 1:

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

da cui, risolvendo, $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$

La proiettività è dunque del tipo:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

dove alla matrice può essere sostituito qualunque suo multiplo.

- Riepilogando:
  - $f: P \to P$ proiettività
  - $\varphi: V \to V$ isomorfismo
  - punti fissi di f $\leftrightarrow$ autovettori di φ
  - rette fisse di f $\leftrightarrow$ autovettori di "${}^t\varphi$"

Considerando $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, infatti:

$r: \; c_0 x_0 + c_1 x_2 + c_2 x_3 = 0$

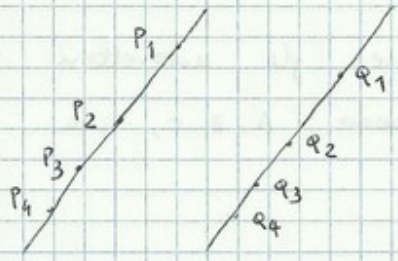
$f \longleftrightarrow \varphi \longleftrightarrow A \in GL_3$

$${}^tCX = 0 \iff {}^tCA^{-1}AX = 0 \iff {}^t(\underbrace{{}^tA^{-1}C}_{C'})AX = 0$$

$$AX \in r \iff {}^tC(AX) = 0 \iff C' = \lambda C$$
$${}^tA^{-1}C = \lambda C$$
$$C = \lambda {}^tAC$$
$$\lambda^{-1}C = {}^tAC \Rightarrow C \text{ autovettore di } {}^tA$$

Birapporto

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$



$\exists f$ proiettività con $f(P_i) = Q_i$ $\iff$ $B(P_i) = B(Q_i)$

Esercizio

$P_1 = [3,2]$, $P_2 = [1,7]$, $P_3 = [2,1)$, $P_4 = [0,1]$

(i) Calcolare $B(P_i)$

(ii) Determinare se esiste una proiettività che manda i P_i in:

$Q_1 = [1,0]$, $Q_2 = [0,1]$, $Q_3 = [1,1]$, $Q_4 = [7,4]$

Ris.

(i) Calcoliamo $$B(P_1,P_2,P_3,P_4) = \frac{\begin{vmatrix}3&0\\2&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\7&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\7&1\end{vmatrix}} = \frac{3\cdot(-13)}{(-1)\cdot 1} = 39$$

(ii) Calcoliamo $$B(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4) = \frac{\begin{vmatrix}1&7\\0&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0&7\\1&4\end{vmatrix}} = \frac{4\cdot(-1)}{1\cdot(-7)} = \frac{4}{7}$$

Poiché $B(Q_i) \neq B(P_i)$, non esiste una tale proiettività

Esercizio Trovare i punti impropri delle curve seguenti:

$y = x^2$ $\quad (x,y) \to [x_0, x_1, x_2]$

$\downarrow$

$[1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}] \leftarrow [x_0, x_1, x_2]$

Ris. L'equazione omogenea diventa:

$$\frac{x_2}{x_0} = \frac{x_1^2}{x_0^2}$$

$$x_2 x_0 = x_1^2$$

Per trovare i punti impropri è sufficiente mettere a sistema con $x_0 = 0$:

$$\begin{cases} x_2 x_0 = x_1^2 \\ x_0 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \to [0,0,1]$$

- $y^2 - x^3 + x = 0$

Ris. $x_0 x_2^2 + x_1^3 + x_0^2 x_1 = 0$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 x_2^2 + x_1^3 + x_0^2 x_1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \to [0,0,1]$$

- $(x^2+y^2)^2 + 3x^2 y - y^3 = 0$

Ris. $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 3x^2 y - y^3 = 0$

$x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 3x_1^2 x_2 x_0 - x_2^3 x_0 = 0$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 3x_1^2 x_2 x_0 - x_2^3 x_0 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_0 = 0 \\ (x_1^2 + x_2^2)^2 = 0 \end{cases}$$

$\to [0,1,i], [0,i,1]$

(24.11.2010)

CURVE ALGEBRICHE – Capitolo 4 Sernesi

Def. Una curva algebrica piana, di $\mathbb{A}^2(k)$, è una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di $k[x,y]$.

Un suo rappresentante $f(x,y)=0$ è detto equazione della curva.

$C \subseteq \mathbb{A}^2(k)$, insieme dei punti che soddisfano $f(x,y)=0$, è detto supporto della curva.

$\deg f(x,y)$ è detto grado della curva

1, 2, 3, 4 rette, coniche, cubiche, quartiche...

- In $\mathbb{P}^2(k)$, occorre che se $f(x_0,x_1,x_2)=0$, allora $f(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)=0$, ovvero che f sia omogeneo.

Def. Una curva algebrica di $\mathbb{P}^2(k)$ è una classe di proporzionalità di polinomi di $k[x_0,x_1,x_2]$.

$F(x_0,x_1,x_2)=0$ equazione curva.

Analogamente a prima, si definiscono supporto e grado.

Esempi:

- $\mathbb{A}^2 \supseteq r \qquad ax+by+c=0 \qquad (ax+by+c)^n=0$

  Hanno lo stesso supporto, ma sono curve differenti.

- $\forall\, c>0 \qquad x^2+y^2+c=0$

  Su $\mathbb{R}$ il supporto è $\emptyset$

  Due valori distinti di c individuano due curve distinte di uguale supporto.

- $C: x^2+y^2=0 \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R}), \quad C=\{(0,0)\}$

  Ma su $\mathbb{C}$ il supporto è diverso, contenendo infiniti punti.

  È più facile lo studio della curva se $k=\bar{k}$

Def. Sia C curva di $\mathbb{A}^2(k)$ $(\mathbb{P}^2(k))$

Una curva $\mathcal{D}$ si dice affinemente (proiettivamente) equivalente a $\mathcal{C}$ se esiste un'affinità (proiettività) T / $\mathcal{C} = T(\mathcal{D})$

Si tratta di una relazione di equivalenza.

I supporti di due curve affinemente (proiettivamente) equivalenti sono affinemente (proiettivamente) equivalenti.

Ci interessano le proprietà affini (proiettive) delle curve cioè la proprietà che una curva ha in comune con tutte quelle ad esse equivalenti affinemente (proiettivamente)

CLASSIFICAZIONE DELLE CURVE

- rette di $\mathbb{A}^2(k)$ ($\mathbb{P}^2(k)$) : esiste una sola classe di equivalenza affine (proiettiva) di rette. Ogni retta può essere trasformata in un'altra.
- coniche
- curve di grado superiore.

- Data $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ di equazione $f(x,y) = 0$, $\mathcal{C}^* \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ è la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ definita da $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, dove F è il polinomio omogeneizzato di f. $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^*$ hanno lo stesso grado.

  $P(x,y) \longrightarrow P[1, x_1, x_2]$

  $P\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \longleftarrow P[x_0, x_1, x_2]$

  $\mathcal{C}^* \cap H_0$ è l'insieme dei punti impropri rispetto a x_0.
  Tali punti sono del tipo $[0 : x_1 : x_2]$ e soddisfano $F(0, x_1, x_2) = 0$

  $f(x,y) = F_0 + F_1(x,y) + \dots + F_{n-1}(x,y) + F_n(x,y)$

  $F_k \in k[x,y]$ omogeneo di grado k

  $F(x_0, x_1, x_2) = F_0 x_0^n + F_1(x,y) x_0^{n-1} + \dots + F_n(x,y)$

  $\Rightarrow F(0, x_1, x_2) = 0 \Rightarrow F_n(x_1, x_2) = 0$

  I punti impropri di $\mathcal{C}$ sono le soluzioni non banali di $F_n(x_1, x_2) = 0$.
  Se $x_0^r \mid F$, ma $x_0^{r+1} \nmid F$, allora $\deg(\mathcal{C}) = \deg(\mathcal{C}^*) - r$

- Nelle curve algebriche reali, può succedere che il supporto sia $\emptyset$.
  In $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, sia $\mathcal{C}$ una curva di equazione $f(x,y) = 0$, $\operatorname{gr}(f(x,y)) = m \geq 1$. Pensiamo a $f(x,y)$ come polinomio nella variabile y

  $f(x,y) = f_0(x) + f_1(x)\, y + \dots + f_m(x)\, y^m$

  Sia Δ = sottoinsieme finito di $\mathbb{C}$ delle radici di $f_n(x)$.
  Allora, $\forall \bar{x} \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, il polinomio in y:

  $f(\bar{x}, y) = f_0(\bar{x}) + f_1(\bar{x})\, y + \dots + f_m(\bar{x})\, y^m$

  ha grado m e per il teorema fondamentale dell'algebra possiede m radici, $\gamma_1(\bar{x}), \dots, \gamma_m(\bar{x})$, non necessariamente distinte.
  I punti $(\bar{x}, \gamma_1(\bar{x})), \dots, (\bar{x}, \gamma_m(\bar{x})) \in \mathcal{C}$.
  Al variare di $\bar{x} \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ si ottengono tutti i punti di $\mathcal{C}$ con l'eccezione, al più, di un numero finito, corrispondenti alle radici dei polinomi $f(\bar{x}, y) = 0$ per $\bar{x} \in \Delta$.

$\bar{x}$ variando in $\mathbb{C} \setminus \Delta$ descrive un ente a 2 dimensioni reali
$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$, dal punto di vista reale, è un ente a 2 dimensioni.
$\Rightarrow$ In particolare, il supporto di una curva affine complessa contiene infiniti punti.

Un ragionamento simile porta a dimostrare che il supporto di una curva proiettiva complessa contiene infiniti punti:

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ $\quad F(x_0, x_1, x_2) = 0.$

Se $\mathcal{C} \not\ni x_0 = 0$ (retta impropria, infiniti punti)

Il supporto di $\mathcal{C}$ contiene quello di $f(x,y) = 0$, che per quanto visto prima contiene infiniti punti.

Def. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ è detta reale se può essere definita da un'equazione $f(x,y) = 0$, con $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$

Def. analoga per $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Oss. $f(x,y) = 0$ è equivalente ad $\alpha \cdot f(x,y) = 0$, con $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

- Dunque una curva reale può essere definita da un polinomio a coefficienti non reali.

  $ix + iy + i = 0 \iff x + y + 1 = 0$

  Esistono affinità che trasformano una curva reale in curve che non sono reali.

  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \supseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come sottoinsieme, cioè l'insieme dei punti $[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tali che $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

  Il piano proiettivo complesso <u>non</u> può essere in alcun modo considerato come uno spazio proiettivo reale.

  $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, invece, può essere visto come spazio affine reale a 4 dimensioni, di base $\{(1,0), (0,1), (i,0), (0,i)\}$ (canonica).

- I punti reali di $\mathcal{C}$ sono dati da $\mathcal{C} \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
  - $x^2 + y^2 = 0$
  - $x^2 + y^2 = (x - iy)(x + iy)$
  - $x^2 + y^2 = c \in \mathbb{R}$

(29.11.2010)

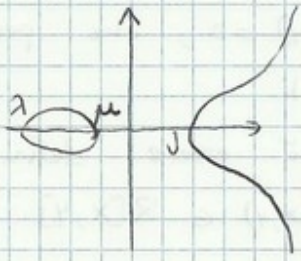
Curve affini reali di grado 3 (parabole cubiche di Newton)

- $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Il luogo dei punti reali dipende dalle tre radici λ, μ, ν di $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Sono i punti $(\lambda, 0)$, $(\mu, 0)$, $(\nu, 0)$ di intersezione di e con l'asse y di equazione $y = 0$.

Si possono presentare i seguenti casi:

- λ, μ, ν reali distinte $\Rightarrow$ parabola campaniforme con ovale



- λ, μ, ν distinte, 2 non reali $\Rightarrow$ parabola campaniforme senza ovale
- λ, μ, ν reali, $\lambda = \mu$
  - $\lambda = \mu < \nu$ parabola campaniforme puntata
  - $\lambda = \mu > \nu$ parabola nodata
  - $\lambda = \mu = \nu$ parabola cuspidata

Un'interessante generalizzazione delle nozioni introdotte finora è la seguente. $e \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ è definita su K. Se può essere definita da un'equazione $f(x,y) = 0$ / $f(x,y) \in K[x,y]$, e $C \cap \mathbb{A}^2(K)$ sono i punti K-razionali di e:

- se $K = \mathbb{R}$, troviamo la solita curva reale, a punti reali.
- se $K = \mathbb{Q}$, troviamo lo studio geometrico delle equazioni polinomiali su $\mathbb{Q}$ e delle loro soluzioni in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{Z}$.

Per esempio, sia e: $x^2 + y^2 = 1$. Un punto $\mathbb{Q}$-razionale di e che si può scrivere come $(\pm\frac{p}{r}, \pm\frac{q}{r})$, $p,q,r \in \mathbb{N}$, dà luogo alla terna (p,q,r) / $p^2 + q^2 = r^2$, ovvero una terna pitagorica. La ricerca delle terne pitagoriche si può quindi ricondurre alla ricerca dei punti $\mathbb{Q}$-razionali di $x^2 + y^2 = 1$.

Si può dimostrare che esistono infinite terne pitagoriche.

Consideriamo ora la curva e_n di equazione $x^n + y^n = 1$, $n \geq 3$.

Non esistono punti $\mathbb{Q}$-razionali $(x,y) \in e_n$, con $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Ciò equivale al teorema di Fermat.

Nel 1983 Faltings dimostrò che le soluzioni di $x^n + y^n = z^n$, fissato n, sono in numero finito.

CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE PROIETTIVE

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2(K)$ si può scrivere nella forma standard:

(*) $\cdot\ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$

$a_{ij} \in K$ non tutti nulli

Ponendo $a_{21} = a_{12}$, $a_{10} = a_{01}$, $a_{20} = a_{02}$, possiamo porre la matrice:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Se $X = {}^t(x_0, x_1, x_2) \Rightarrow$ (*) è ${}^tXAX = 0$

Sia $M \in GL(K)$. Se sostituiamo MX al posto di X troviamo:

$0 = {}^tX\,{}^tMAMX = {}^tXBX$, ponendo ${}^tMAM = B$.

La conica che ha questa equazione è proiettivamente equivalente a $\mathcal{C}$, e viceversa ogni conica proiettivamente equivalente a $\mathcal{C}$ si ottiene in questo modo.

Osserviamo che $\det({}^tMAM) = \det(B) = 0 \iff \det(A) = 0$;

più nel dettaglio, A e B possiedono lo stesso rango.

Il rango di A è dunque una proprietà proiettiva della conica $\mathcal{C}$, si dice rango di $\mathcal{C}$ e si indica con $r(\mathcal{C})$.

In particolare l'annullarsi o meno del $\det(A)$ è una proprietà proiettiva di $\mathcal{C}$. Vale la disuguaglianza $1 \le rg(\mathcal{C}) \le 3$, poichè almeno uno dei coefficienti a_{jk} è $\neq 0$.

Def. $\mathcal{C}$ conica non degenere se $\det A \neq 0$; degenere se $\det A = 0$.

Semplicemente degenere se $r(\mathcal{C}) = 2$, doppiamente se $r(\mathcal{C}) = 1$.

Teor. Sia $K = \bar{K}$. Ogni conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{P}^2(K)$ è proiettivamente equivalente ad una delle seguenti:

- $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ conica generale
- $x_0^2 + x_1^2 = 0$ conica semplice degenere
- $x_0^2 = 0$ conica doppiamente degenere

Dim. Come abbiamo visto una proiettività M trasforma la conica associata ad A nella conica associata a $B = {}^tMAM$. Poichè A e B sono congruenti, $\exists\ M \in GL_3(K)$, tale che $B = e_{00} + e_{11} + e_{22}$, $e_{00} + e_{11}$, e_{00}.

$\mathcal{C}$ sarà proiettivamente equivalente a una di queste.

Tali coniche hanno ranghi distinti per cui sono a due a due non proiettivamente equivalenti.

Se $K \neq \bar{K}$, la situazione è differente.

Teor. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente ad una delle seguenti:

- rango 3
  - $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ conica generale
  - $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ conica generale a punti non reali
- rango 2
  - $x_0^2 - x_1^2 = 0$ due rette
  - $x_0^2 + x_1^2 = 0$ $(0,0)$
- rango 1
  - $x_0^2 = 0$ conica doppia degenere

Queste 5 coniche sono a due a due non proiettivamente equivalenti. Per la dimostrazione, si usa il teorema di Sylvester, ripetendo il ragionamento precedente.

Oss. ① Se una conica non degenere di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ possiede un punto, allora ne possiede infiniti.

② Quasi tutte le considerazioni per le coniche proiettive si estendono alle quadriche di $\mathbb{P}^n(K)$, $n \geq 3$.

$Q \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ ha un'equazione del tipo $Q(\bar{x}) = 0$, con $\bar{x} = {}^t(x_0, x_1, \dots, x_n)$ e $Q(\bar{x})$ polinomio omogeneo di 2° grado.

$Q(\bar{x}) = {}^t X A X$ A simmetrica e $M_{n+1}(K)$.

Ragionando come prima, se $K = \bar{K}$, ogni quadrica di $\mathbb{P}^n(K)$ è proiettivamente equivalente alla quadrica di equazione

$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_r^2 = 0$, con $r+1 = r(Q)$.

Se $K = \mathbb{R}$, Q di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente a una e una sola quadrica della forma:

$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 = 0$

con $0 \leq p \leq r \leq n$, $2p \geq r-1$.

INTERSEZIONI DI 2 CURVE

$K = \bar{K}$, $\mathcal{C} = \mathbb{A}^2(K)$, $\deg(\mathcal{C}) = n$, $f(x,y) = 0$

Def. $\mathcal{C}$ è irriducibile se $f(x,y)$ è irriducibile in $k[x,y]$, altrimenti è riducibile.

Se $\mathcal{C}$ è riducibile, allora si scompone in fattori irriducibili:

$f(x,y) = f_1(x,y) \cdot \dots \cdot f_k(x,y)$

Se $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ sono curve di equazione $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$, allora $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_k$. $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ sono dette componenti irriducibili di $\mathcal{C}$.

Se $f_j(x,y)$ fattore multiplo di $f(x,y)$ di molteplicità μ_j, $\mathcal{C}$ è detta componente multipla di $\mathcal{C}$ di molteplicità μ_j.

$\mathcal{C}$ è detta ridotta se non possiede componenti multiple.

Es. conica irriducibile $\Leftrightarrow$ non degenere

conica semplicemente degenere $\Leftrightarrow$ 2 componenti irriducibili distinte

conica doppiamente degenere $\Leftrightarrow$ non è ridotta (1 retta doppia)

Riducibilità e irriducibilità sono proprietà affini.

Anche il numero di componenti, il grado e la molteplicità delle componenti sono proprietà affini.

- Se $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2(k)$, le definizioni sono analoghe.

  deg $\mathcal{C}$ è la somma dei gradi delle sue componenti irriducibili, contate con la loro molteplicità.

- La teoria delle curve algebriche piane dipende dallo studio delle intersezioni di due curve, ovvero dalla risoluzione di sistemi di due equazioni polinomiali.

Teor. $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ $(\mathbb{P}^2(k))$ di gradi n ed m.

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ non hanno infiniti punti in comune, allora ne hanno al più $n \cdot m$ in comune.

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono proiettive, allora hanno almeno un punto in comune.

Dim. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ affini con un numero finito di punti in comune implica che anche le loro chiusure abbiano un numero finito di punti in comune.

Possiamo allora limitarci a dimostrare la tesi nel caso di $\mathbb{P}^2$.

Possiamo anche sostituire $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ con $T(\mathcal{C})$ e $T(\mathcal{D})$, con T proiettività e $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}^2$. Avremo che $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{P_1, \dots, P_N\}$, e $\forall j \neq k$, $r_{jk} = \overline{P_j P_k}$.

Esisterà dunque almeno un punto di $\mathbb{P}^2$ che non appartiene a $\mathcal{C} + \mathcal{D} + \sum_{j,k} r_{jk}$.

Supponiamo che sia $[0:0:1] \notin \mathcal{C} + \mathcal{D} + \sum_{j,k} r_{jk}$, altrimenti utilizziamo una proiettività per fare in modo che sia così

$F(x_0, x_1, x_2) = 0$ eq. di $\mathcal{C}$ $\quad G(x_0, x_1, x_2) = 0$ eq. di $\mathcal{D}$

- $F(x_0, x_1, x_2) = A_n(x_0, x_1) + A_{n-1}(x_0, x_1) x_2 + \dots + A_0 x_2^n$

  $G(x_0, x_1, x_2) = B_m(x_0, x_1) + B_{m-1}(x_0, x_1) x_2 + \dots + B_0 x_2^m$

  $A_h, B_k \in k[x_0, x_1]$ omogenei di grado h e k.

  $R(x_0, x_1)$ = risultante di F e G rispetto a x_2.

  Poiché $[0:0:1] \notin \mathcal{C}, \mathcal{D} \Rightarrow A_0 B_0 \neq 0$, le soluzioni di $R(x_0, x_1)$ sono le soluzioni comuni delle due curve

  $\Rightarrow A_0 \neq 0$ e $B_0 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \overline{x_0}, \overline{x_1} \in K$ tali che $\nexists$ polinomi in x_2.
$F(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ e $G(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ hanno grado effettivo n ed m rispettivamente.

$\Rightarrow$ $\overline{x_0}, \overline{x_1} \in K$ $R(\overline{x_0}, \overline{x_1})$ è il risultante di $F(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ e $G(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$.
Se $[\overline{x_0} : \overline{x_1} : \overline{x_2}] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \Rightarrow R(\overline{x_0}, \overline{x_1}) = 0$, in quanto $F(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ e $G(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ hanno la radice comune $\overline{x_2}$.
Viceversa, ad ogni $(\overline{x_0}, \overline{x_1}) / R(\overline{x_0}, \overline{x_1}) = 0$ corrisponde almeno una radice comune $\overline{x_2}$ di $F(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ e $G(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ che definisce il punto $[\overline{x_0} : \overline{x_1} : \overline{x_2}] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$
Poichè $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ è finito, $R(x_0, x_1)$ non si annulla identicamente, ed è dunque un polinomio omogeneo di grado $m \cdot n$.
Poichè $R(x_0, x_1)$ possiede al più $m \cdot n$ radici distinte è sufficiente far vedere che $\forall (\overline{x_0}, \overline{x_1})$, radice di $R(x_0, x_1)$, $\exists$ al più un punto $[\overline{x_0} : \overline{x_1} : \overline{x_2}] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.
Se per assurdo $[\overline{x_0} : \overline{x_1} : \overline{x_2}]$ e $[\overline{x_0} : \overline{x_1} : \overline{y_2}] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ con $\overline{x_2} \neq \overline{y_2} \Rightarrow$ tutte le rette per questi due punti passano per $[0 : 0 : 1]$, ma ciò contraddice l'ipotesi.

Caso particolare:
Sia $\mathcal{C}$ di grado n, $\mathcal{D}$ retta, con intersezione non infinita.
Nel caso affine due curve possono anche avere zero punti in comune. Se $K \neq \bar{K}$ due curve proiettive possono non avere punti in comune.
Vale il teorema di Bezout: due curve proiettive che non hanno infiniti punti in comune ne hanno esattamente $m \cdot n$ a patto che ognuno venga contato con la propria molteplicità

(01.12.2010)

QUADRICA DI KLEIN

Sia una retta r in $\mathbb{P}^3$, $P = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$, $Q = [y_0 : y_1 : y_2 ; y_3]$ due suoi punti, $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ la rispettiva matrice.

Consideriamo i minori $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$; il punto $[p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}]$ può essere visto come $\in \mathbb{P}^5$.

Queste vengono dette coordinate di Plücker.

Prop. 1 Le coordinate di Plucker sono indipendenti dalla scelta dei punti in $r \in \mathbb{P}^3$. Infatti, sia P' di coordinate $x_i' = \lambda x_i + \mu y_i$, la matrice diventa $\begin{pmatrix} \lambda x_0 + \mu y_0 & \lambda x_1 + \mu y_1 & \lambda x_2 + \mu y_2 & \lambda x_3 + \mu y_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$

e i rispettivi minori $p_{ik} = (\lambda x_k + \mu y_i) y_k - (\lambda x_k + \mu y_k) y_i$

Le coordinate vengono moltiplicate pertanto per λ e definiscono dunque lo stesso punto. Considerando

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad p_{01} p_{23} - p_{02} p_{13} + p_{03} p_{12} = 0$$

quadrica di Klein

Prop. 2 Ogni punto $C = [p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}]$ appartenente alla quadrica di Klein D rappresenta una ed una sola retta $r \subset \mathbb{P}^3$.

- Infatti, sia $p_{01} \neq 0$, possiamo scrivere:

$P = [0 : p_{01} : p_{02} : p_{03}]$ $\quad Q = [-p_{01} : 0 : p_{12} : p_{13}]$

$\begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ -p_{01} & 0 & p_{12} & p_{13} \end{pmatrix}$

e varrà $p_{23}' = p_{02} p_{13} - p_{03} p_{12} = p_{01} p_{23}$

che identifica il punto:

$[p_{01} p_{01} : p_{01} p_{02} : p_{01} p_{03} : p_{01} p_{12} : p_{01} p_{13} : p_{01} p_{23}]$

- Dimostriamone ora l'unicità

Sia $r' \subset \mathbb{P}^3$, ancora $p_{01} \neq 0$, $A = [0 : a_1 : a_2 : a_3]$, $B = [b_0 : 0 : b_2 : b_3]$, $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & 0 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$

$p_{01} = -a_1 b_0$ $\quad p_{02} = a_2 b_0$ $\quad p_{03} = a_3 b_0$

$p_{12} = a_1 b_2$ $\quad p_{13} = a_1 b_3$ $\quad p_{23} = a_2 b_3 - a_3 b_2$

Risulta:

$A = [0 ; a_1 : a_2 : a_3] = [0 : b_0 a_1 : b_0 a_2 : b_0 a_3] = [0 : p_{01} : p_{02} : p_{03}] = P$

$B = [b_0 : 0 : b_2 : b_3] = [a_1 b_0 : 0 : a_1 b_2 : a_1 b_3] = [-b_1 : 0 : p_{12} : p_{13}] = Q$

poiché $PQ = R_F$, questo verifica l'esistenza di una biezione.

Prop. • r, r' sono due rette in $\mathbb{P}^3$

$\exists$ r ed r' sono incidenti se e solo se i punti A e B in D quadrica di Klein che rappresentano le due rette sono reciproci in $\mathbb{P}^5$ rispetto a D.

Dim. Sia infatti $X = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ e $Y = [y_0 : y_1 : y_2 : y_3]$ una rappr. per r, $Z = [z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$ e $W = [w_0 : w_1 : w_2 : w_3]$ una rappr. per r',

Si ha che r, r' sono complanari se e solamente se:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Poiché questo significa che:

$$p_{01}p'_{23} - p_{02}p'_{13} + p_{03}p'_{12} + p'_{01}p_{23} - p'_{02}p_{13} + p'_{03}p_{12} = 0$$

ciò è equivalente a dire che A e B siano reciproci rispetto a D.

• Siano A e B reciproci in $\mathbb{P}^5$ rispetto a D, $A, B \in D$, $\overline{AB} \subset D$

Sia $c \in \overline{AB}$, C è reciproco di A e di B, inoltre c identifica una retta in $\mathbb{P}^3$ e sarà incidente sia ad a che a b.

Possiamo avere un piano rigato o una stella di rette.

Sia $\{\alpha\}$ il sistema associato ai piani rigati e sia $\{\beta\}$ il sistema dei piani che rappresentano la stella di rette.

Due piani di D che appartengono allo stesso sistema hanno in comune un punto solo, due stelle di rette, o due piani rigati.

Due piani che appartengono a due sistemi diversi possono avere in comune una retta oppure essere sghembi.

• Definiamo un complesso algebrico, considerando un polinomio omogeneo di grado n. Esso lo poniamo come l'insieme di rette in $\mathbb{P}^3$ le cui coordinate di Plücker soddisfano il polinomio.

$f(p_{ik}) = 0$ in $\mathbb{P}^5$ è una varietà V di ordine $2n$ e dimensione 3, intersezione della quadrica D con l'ipersuperficie.

Sia $l \subset D$ retta in $\mathbb{P}^5$, $l \cap V$ n punti distinti di D.

Il grado del complesso algebrico può essere visto come il numero di punti di D in comune tra l retta qualsiasi della quadrica e la varietà V.

se $n = 1$ il complesso è detto lineare, speciale se l'ipepiano $f(p_{ik}) = 0$ è tangente a D, generale altrimenti.

Se il complesso lineare è speciale allora è tangente a D in un punto che chiamo A.

a in $\mathbb{P}^3$ sia incidente a tutte le rette di k di $\mathbb{P}^3$; a è asse.

(06.12.2010)

Teor. Siano $C, D \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ $(\mathbb{P}^2(k))$ di gradi n ed m; se non hanno infiniti punti in comune, allora ne hanno al più $n \cdot m$.

Teor. Siano $C, D \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{P}^2)$, con D irriducibile, $C \cap D$ di infiniti punti. Allora D è una componente irriducibile di C.

Dim. Caso affine

- Caso in cui D = retta di equazione $ax + by + c = 0$

  C $f(x,y) = 0$

  $r \cap C$ = i punti le cui coordinate sono le soluzioni

  $$\begin{cases} ax+by+c = 0 \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$$

  Supponiamo $b \neq 0$ (altrimenti $a \neq 0$) $\Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

  Troviamo $f(x, -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}) = 0$

  $A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n = 0$

  Ogni soluzione di questa equazione fornisce le coordinate di un punto di $r \cap C$, e tutti i punti di $r \cap C$ sono ottenuti in questo modo.

  $r \cap C$ = infiniti punti $\Leftrightarrow$ $A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$ identicamente nullo

  D'altra parte:

  r componente irriducibile di C $\Leftrightarrow$ $y + b^{-1}ax + b^{-1}c$ divide $f(x,y)$

  $\Leftrightarrow$ $f(x,y) = (y + b^{-1}ax + b^{-1}c)\, h(x,y)$, con $h(x,y) \in k[x,y]$.

  Sostituendo $-(-b^{-1}ax + b^{-1}c)$ al posto di y si ottiene:

  $$f(x, -(b^{-1}ax + b^{-1}c)) = 0$$

  che è proprio la condizione di $C \cap D$ = infiniti punti che avevamo prima.

- Il caso generale segue così:

  $C \cap D = \infty$ punti, C, D di equazioni $f(x,y) = 0$ e $g(x,y) = 0$, con $f(x,y) \neq c$ e $g(x,y) \neq d$ $\in k[x,y]$ e $g(x,y)$ irriducibile.

  Supponiamo che $f(x,y)$ sia costante rispetto ad y.

  $\Rightarrow$ C = n° finito di rette // asse y

  D interseca almeno una di queste rette in ∞ punti e quindi l'ha come componente irriducibile, ma D è irriducibile e dunque coincide con una di queste rette,

e pertanto D è una componente irriducibile di $\mathcal{C}$.

Se $f(x,y)$ non è costante rispetto a y, consideriamo $f(x,y)$ e $g(x,y) \in (k[x])[y]$, e sia F il campo dei quozienti di D.

Per assurdo $g(x,y) \nmid f(x,y) \Rightarrow f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono privi di fattori comuni non costanti rispetto ad y, cioè in $D[y]$ non hanno fattori comuni non costanti.

$f(x,y)$ e $g(x,y)$ non hanno fattori comuni non costanti in $F[y]$ cioè $MCD(f,g) = 1$ in $F[y]$, e dunque $\exists\, A, B \in F[y] \;/\; 1 = Af + Bg$.

F è il campo dei quozienti di $k[x] = D$, $\exists\, h \in k[x]$, $h \neq 0$, tale per cui $Ah, Bh \in k[x]$; $h = (Ah) f + (Bh) g$.

$\Rightarrow$ Ogni punto comune a $\mathcal{C}$ e D appartiene alla curva $\mathcal{E}$ di equazione $h = 0$.

$\Rightarrow$ D ed $\mathcal{E}$ hanno ∞ punti in comune perchè $\mathcal{C}$ e D ne hanno ∞. Ma $\mathcal{E}$ è l'unione delle rette $\parallel$ asse y; come prima si deduce che D è una retta.

$\Rightarrow$ per quanto dimostrato prima, D è una componente irriducibile di $\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ $g \mid f$ assurdo.

Cor. Due curve (affini o proiettive) di grado m ed n rispettivamente che hanno in comune $mn+1$ punti allora hanno almeno una componente irriducibile in comune.

- Passando al proiettivo:

$\mathcal{C} = \mathbb{P}^2$ $\quad \deg \mathcal{C} = n \quad F(x_0, x_1, x_2) = 0$

$r = \overline{PQ} \quad P = [p_0 : p_1 : p_2] \quad Q = [q_0 : q_1 : q_2]$

$r \; [\lambda p_0 + \mu q_0 : \lambda p_1 + \mu q_1 : \lambda p_2 + \mu q_2] = \lambda P + \mu Q$

un punto di r è a $\mathcal{C} \iff F(\lambda p_0 + \mu q_0 : \dots : \lambda p_2 + \mu q_2) = 0$

$\iff F(\lambda P + \mu Q) = 0$ (*) equazione omogenea di grado n in λ e μ le cui soluzioni sono i punti di n.

L'equazione (*) si annulla identicamente $\iff$ r è una componente irriducibile di $\mathcal{C}$.

Se prendiamo $P' = [p_0' : p_1' : p_2']$ e $Q' = [q_0' : q_1' : q_2']$:

$P', Q' \in r \Rightarrow$ il punto generico di r sarà:

$\lambda' P' + \mu' Q' = [\lambda' p_0' + \mu' q_0' + \dots + \lambda' p_2' + \mu' q_2']$

Troviamo i punti di intersezione tra r e $\mathcal{C}$ risolvendo $F(\lambda' P' + \mu' Q') = 0$

$\lambda P + \mu Q = \lambda' P' + \mu' Q' \iff \exists (a_{ij}) \in GL_2(k)$

$$\begin{cases} \alpha\lambda = a_{11}\lambda' + a_{12}\mu' \\ \alpha\mu = a_{21}\lambda' + a_{22}\mu' \end{cases}$$

per qualche $\alpha \neq 0$. □

A meno di un α^n, sostituendo $(\square)$ in $F(\lambda P + \mu Q) = 0$ si trova $F(\lambda' P' + \mu' Q') = 0$.

$(\square)$ è invertibile $\Rightarrow$ fa corrispondere biunivocamente i fattori irriducibili dei due polinomi $F(\lambda P + \mu Q)$ e $F(\lambda' P' + \mu' Q')$.

Le soluzioni delle due equazioni si corrispondono biunivocamente e quelle corrispondenti hanno la stessa molteplicità

$\Rightarrow$ la molteplicità della radice di $F(\lambda P + \mu Q)$ che corrisponde ad un certo punto di $r \cap C$ dipende solo dal punto e non da P, Q.

Def. Siano $r, C \subseteq \mathbb{P}^2$.

$I(C, r; P_0)$ è la molteplicità di intersezione nel punto $P_0 = \lambda_0 P + \mu_0 Q$ se (λ_0, μ_0) è una radice di molteplicità $I(C, r; P_0)$ del polinomio $F(\lambda P + \mu Q)$.

Se $P_0 \in r \cap C \Rightarrow I(C, r; P_0) = 0$

Se $r \subset C \Rightarrow I(C, r; P_0) = \infty$

Teor. Siano $C \subset \mathbb{P}^2$ di grado n, r retta che non sia sua componente. Allora $\sum_{P_0 \in r} I(C, r; P_0) = n$.

Dim. Siano $C: F(x_0, x_1, x_2) = 0$, $r: \overline{PQ}$.

La sommatoria ha infiniti addendi, ma solo un numero finito di essi è diverso da zero.

La sommatoria è la somma delle molteplicità delle radici del polinomio $F(\lambda P + \mu Q)$ omogeneo di grado n. $\square$

- Nel caso affine, sia $C \subseteq \mathbb{A}^2$, $f(x, y) = 0$, $r: \begin{cases} x = a + Lt \\ y = b + Mt \end{cases}$.

Abbiamo che $f(a + Lt, b + Mt) = 0$ è l'equazione in t le cui soluzioni sono i punti di $C \cap r$.

Def. r e C hanno molteplicità di intersezione $I(C, r; P_0)$ nel punto $P_0 = (a + Lt_0, b + Mt_0) \in r$ se t_0 è una radice di molteplicità $I(C, r; P_0)$ del polinomio $f(a + Lt, b + Mt)$.

Al solito, $I(C, r, P_0) = 0$ se $P_0 \notin C \cap r$, mentre $I(C, r; P_0) = \infty$ se r componente di C.

Es. Riconducendosi al caso proiettivo, verificare che la definizione è ben posta.

- Che succede al punto all'infinito?

Siano: $P_\infty = [0 : L : M]$ punto improprio di C^*, $I(C^*, r^*, P_\infty)$ massima potenza di λ che divide il polinomio $F(\lambda, a\lambda + L\mu, b\lambda + M\mu)$

C^* $\quad F(x_0, x_1, x_2)$

$r^* \begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = a\lambda + L\mu \\ x_2 = b\lambda + M\mu \end{cases}$ $\quad [1 : a : b] \in r^*$ $\quad [0 : L : M] \in r^*$

$\Rightarrow$ grado in t di $f(a+Lt, b+Mt) = F(1, a+Lt, b+Mt)$
è $n - I(\mathcal{C}^*, r^*; P_\infty)$. $I(\mathcal{C}^*, r^*; P_\infty)$ può essere > 0.

Teor. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$, $\deg \mathcal{C} = n$, $r \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \sum_{P \in r} I(\mathcal{C}, r; P) \leq n$,
e l'uguaglianza vale se e soltanto se il punto improprio di r non è punto improprio di $\mathcal{C}$. □

Oss. Per calcolare la molteplicità di intersezione di una curva e una retta in un punto proprio P è indifferente usare le coordinate affini o quelle proiettive.

Invece per P_∞:
$I(\mathcal{C}^*, r^*, P_\infty) = n - gr(f(a+Lt, b+Mt))$

- $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ affini o proiettive
r: retta che non è componente né di $\mathcal{C}$, né di $\mathcal{D}$, $P_0 \in r$
$\Rightarrow I(\mathcal{C}, r; P_0) + I(\mathcal{D}, r; P_0) = I(\mathcal{C}+\mathcal{D}, r; P_0)$.
Nel caso affine, se $\mathcal{C}: f(x,y) = 0$, $\mathcal{D}: g(x,y) = 0$, la molteplicità di una radice t_0 del polinomio $g(a+Lt, b+Mt) \cdot f(a+Lt, b+Mt)$ è uguale alla somma delle molteplicità di t_0 per ognuno dei fattori $f(a+Lt, b+Mt)$ e $g(a+Lt, b+Mt)$.

Prop. $r, \mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $T: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ proiettività
$\forall P \in r$ si ha $I(\mathcal{C}, r; P) = I(T(\mathcal{C}), T(r); T(P))$,
ovvero la molteplicità di r di r e $\mathcal{C}$ è invariante per proiettività.

RISULTATI SUL BIRAPPORTO

Th. Esiste un isomorfismo $f: \begin{matrix} \mathbb{P} \to \mathbb{P}' \\ P_i \to Q_i \end{matrix} \iff \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$

Dim. Come noto, esiste sempre un isomorfismo $f: \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ $f(P_i) = Q_i$ se $i = 1, 2, 3$. Ora, P_4 ha coordinate omogenee y_0, y_1 rispetto a $P_1, P_2, P_3 \Rightarrow f(P_4)$ ha coordinate omogenee y_0, y_1 rispetto a Q_1, Q_2, Q_3.

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{y_1}{y_0} \beta(Q_1, Q_2, Q_3, f(P_4))$$

$$f(P_4) = Q_4 \iff \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{y_1}{y_0} = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) \qquad \square$$

Scambiando in tutti i modi possibili i punti, si ottengono i seguenti valori possibili per il birapporto: $\beta, \frac{1}{\beta}, 1-\beta, \frac{1}{1-\beta}, \frac{\beta-1}{\beta}, \frac{\beta}{\beta-1}$.

Sia ora $J(\beta) = \dfrac{(\beta^2-\beta+1)^3}{\beta^2(\beta-1)^2}$.

Th. $J(\beta) = J(\beta') \iff \beta' = \left\{\beta, \frac{1}{\beta}, \dots\right\}$

Dim. $\Leftarrow$ si prova verificando che $J(\beta) = J\left(\frac{1}{\beta}\right) = \dots$ $\square$

$\Rightarrow$ $J(\beta) = J(\beta') \iff q(\beta) = 0$

$$q(x) = (x^2-x+1)^3 - J(\beta)\, x^2 (x-1)^2$$

il polinomio si spezza se $\beta = -1, 2, \frac{1}{2}, -\varepsilon, -\varepsilon^2$

con $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Se $\beta = -1, 2, \frac{1}{2}$ $\quad J(\beta) = \frac{27}{4}$ $\quad q(x) = (x+1)^2 \cdot (x-2)^2 \cdot \left(x-\frac{1}{2}\right)^2$;

se $\beta = -\varepsilon, -\varepsilon^2$ $\quad J(\beta) = 0$ $\quad q(x) = (x^2-x+1)^3 = (x+\varepsilon)^3 (x+\varepsilon^2)^3$. $\square$

Possiamo pertanto scrivere semplicemente $J(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Th. $\{P_i\}$ e $\{Q_i\}$ in $\mathbb{P}$ sono proiettivamente equivalenti $\iff J(P_1,P_2,P_3,P_4) = J(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)$

$\Rightarrow$ $\exists$ isomorfismo $f: \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ $f(P_i) = Q_i$

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$$

$$\Rightarrow J(P_1, P_2, P_3, P_4) = J(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$$

$\Leftarrow$ $J(P_i) = J(Q_i)$ per il teorema precedente, anche le β sono uguali a meno di permutazioni.

SFERA DI RIEMANN E RETTA PROIETTIVA SUI COMPLESSI

$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \iff \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$PGL_2(\mathbb{C})$.

Consideriamo una trasformazione lineare fratta:

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$\rho : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\rho(\infty) \longrightarrow \frac{a}{c}$

$\rho(-\frac{d}{c}) \longrightarrow \infty$

$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$

Notiamo che $g, f \in TLF \Rightarrow g \circ f \in TLF$.

In coordinate omogenee, possiamo scrivere:

$f([x_0, x_1]) = [cx_1 + dx_0,\ ax_1 + bx_0]$

$(TLF, \cdot) \cong (PGL_2(\mathbb{C}), \cdot)$

Prop. $\forall g \in TLF \Rightarrow \forall \{x_i\}$

$\Rightarrow \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(g(P_1), g(P_2), g(P_3), g(P_4))$

- z viene detto polo se $\rho(z) = z$.

∞ è un polo $\iff f(\infty) = \infty \iff \frac{a}{c} = \infty \iff c = 0$

Per trovare i poli nel caso in cui $z \neq 0$:

$z = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$cz^2 + (d-a)z - b = 0$

Def. $\mathcal{P} \subseteq E^2 \Rightarrow \mathcal{P}$ è un cerchio di Moebius:

$E(x^2+y^2) + Ax + By + C = 0$

con $A^2 + B^2 - 4EC > 0$

Basandosi su elementari risultati dei complessi:

$z = x + iy\ ;\ z\bar{z} = x^2+y^2\ ;\ x = \frac{z+\bar{z}}{2}\ ;\ y = \frac{z-\bar{z}}{2}$

possiamo scrivere:

$Ez\bar{z} + A \cdot \frac{z+\bar{z}}{2} + B \cdot \frac{z-\bar{z}}{2} + C = 0$

Se $\rho \in TLF$, $\rho(z) = \frac{1}{z}$, ovvero nel caso dell'inversione, sarà $Cz\bar{z} + A \cdot \frac{z+\bar{z}}{2} + B \cdot \frac{z-\bar{z}}{2} + E = 0$

Inoltre, $\forall \rho \in TLF \Rightarrow \rho = p \circ q \circ q$, con q inversione.

$\rho = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$

- $PGL_2(\mathbb{R}) < PGL_2(\mathbb{C})$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\rho \in PGL_2(\mathbb{R})$ $\quad ad - bc = 1$

$\Rightarrow Im(\rho(z)) = Im(z)$ $\quad h = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$

modello di geometria iperbolica

- $SO(3) < PGL_2(\mathbb{C})$

  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S^2$

  Le TLF sono le trasformazioni di S^2

  $\rho \in SO(3) \iff \rho(z) = \dfrac{uz+v}{-\bar{v}z+\bar{u}} \quad (u\bar{u}+v\bar{v}=1)$

  Si definisce un modello per la geometria ellittica.

(07.12.2010)

PROPRIETÀ LOCALI DI CURVE ALGEBRICHE

Sia $k = \bar{k}$, ovvero un campo algebricamente chiuso.

Def. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{P}^2)$, P punto del piano

$m_P(\mathcal{C}) = \min_{r \text{ per } P} I(\mathcal{C}, r; P)$

molteplicità di $\mathcal{C}$ in P " di P per $\mathcal{C}$

Se esistono rette contenenti P e non contenute in $\mathcal{C} \Rightarrow m_P(\mathcal{C}) \neq \infty$

più precisamente $0 \leq m_P(\mathcal{C}) \leq gr(\mathcal{C})$ e $m_P(\mathcal{C}) = 0 \iff P \notin \mathcal{C}$.

Se $m_P(\mathcal{C}) = 1 \Rightarrow$ P punto semplice o non singolare di $\mathcal{C}$;

Se $m_P(\mathcal{C}) > 1 \Rightarrow$ P punto multiplo o singolare di $\mathcal{C}$,

in particolare m-multiplo se $m_P(\mathcal{C}) = m$

$\mathcal{C}$ è detta curva non singolare se tutti i suoi punti sono semplici, singolare se possiede almeno un punto singolare.

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$, $\mathcal{C}^* \subseteq \mathbb{P}^2$ chiusura di $\mathcal{C}$; $\forall P \in \mathcal{C}$, $m_P(\mathcal{C}) = m_P(\mathcal{C}^*)$

Il problema è ora quello di trovare i punti multipli di $\mathcal{C}$.

Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$, $f(x,y) = 0$, $P(a,b) \in \mathcal{C}$, $r \ni P$, $\begin{cases} x = a + Lt \\ y = b + Mt \end{cases}$

Con $(L,M) \neq (0,0)$, solo per $t=0$ troviamo P.

$I(\mathcal{C}, r; P)$ molteplicità di $t=0$ come radice di del polinomio $f(a+Lt, b+Mt)$.

Si ha: t radice multipla $\iff R(f, f') = 0$

$\iff f' = f'_x(x,y)\,L + f'_y(x,y)\,M$

$f'_x(a,b)\,L + f'_y(a,b)\,M = 0 \quad (*)$

$\iff f_x'(x,y) = f_y'(x,y) = 0$

perché altrimenti l'unica retta τ per $P(a,b)$ per cui $I(\mathcal{C}, \tau; P) \geq 2$ è quella per cui L ed M soddisfano $(*)$

ogni altra retta soddisfa $I(\mathcal{C}, r; P) = 1$ per cui P è semplice.

Prop. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$ $\quad f(x,y) = 0$

$P \in \mathbb{A}^2$ semplice per $\mathcal{C} \iff P \in \mathcal{C}$ e almeno una delle derivate parziali di f è $\neq 0$ in P

$P \in \mathbb{A}^2$ singolare per $\mathcal{C} \iff P \in \mathcal{C}$ e $f'_x|_P = f'_y|_P = 0$

Def. $P(a,b)$ semplice per $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$, allora l'unica retta τ per cui $I(\mathcal{C}, r; P) = 2$ si dice la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P

Se $f_x'(a,b)\, L + f_y'(a,b)\, M = 0$ sono non entrambe nulle, allora

$(L, M) = (f_y'(a,b), -f_x'(a,b))$

τ ha equazione $f_x'(a,b)(x-a) + f_y'(a,b)(y-b) = 0$

- Passiamo al proiettivo:

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $F[x_0, x_1, x_2) = 0$, $P = [p_0 : p_1 : p_2] \in \mathcal{C}$

r per P ha equazioni parametriche $\begin{cases} x_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \end{cases}$

$Q = [q_0 : q_1 : q_2]$ è un altro punto di r, $P \neq Q$.

Abbiamo l'equazione omogenea in λ e μ:

$F(\lambda p_0 + \mu q_0, \lambda p_1 + \mu q_1, \lambda p_2 + \mu q_2) = A(\lambda, \mu) = 0$

P si trova per $(\lambda, \mu) = (1, 0)$, cioè corrisponde alla radice $t = 0$, se si considera il parametro non omogeneo $t = \frac{\mu}{\lambda}$.

Troviamo $A(1, t) = F(p_0 + t q_0, p_1 + t q_1, p_2 + t q_2)$

e $I(\mathcal{C}, r; P) =$ molteplicità di t in $A(1, t)$

$t = 0$ radice multipla $\iff \frac{dA(1,t)}{dt} = 0 \iff F_0(P)\, q_0 + F_1(P) q_1 + F_2(P) q_2 = 0$

dove $F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$.

P singolare $\iff F_1(P) = F_2(P) = F_0(P) = 0$

Solo in questo caso l'equazione $F_0(P)\, q_0 + F_1(P)\, q_1 + F_2(P)\, q_2 = 0$ è soddisfatta $\forall\, Q \in \mathbb{P}^2$ e quindi $I(\mathcal{C}, r; P) > 1$ $\forall$ retta passante per P.

Oss. $n = gr(F) \Rightarrow \sum F_i x_i = nF \Rightarrow F_0(P) = F_1(P) = F_2(P) = 0 \Rightarrow F(P) = 0$, $P \in \mathcal{C}$

Prop. $\mathcal{C} \in \mathbb{P}^2$, $F(x_0, x_1, x_2) = 0$

$P \in \mathbb{P}^2$ semplice per $\mathcal{C} \iff P \in \mathcal{C}$ e almeno una delle derivate parziali non si annulla in P

$P \in \mathbb{P}^2$ singolare per $\mathcal{C} \iff F_0(P) = F_1(P) = F_2(P) = 0$

P semplice, la retta τ di equazione $F_0(P) x_0 + F_1(P) x_1 + F_2(P) x_2 = 0$ è l'unica retta $/\ I(\mathcal{C}, \tau; P) > 1$, ed è detta retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto semplice P.

Prop. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2 (\mathbb{P}^2)$ irriducibile possiede al più un numero finito di punti singolari.

Dim. Sia $f(x,y) = 0$; la ricerca dei punti singolari si riduce alla risoluzione del sistema: $\begin{cases} f(x,y) = 0 & \mathcal{C} \\ f_x(x,y) = 0 & \mathcal{C}_x \\ f_y'(x,y) = 0 & \mathcal{C}_y \end{cases}$

Facciamo vedere che $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_x$ è finito.

Si ha $\mathcal{C}$ irriducibile, $gr(\mathcal{C}_x) < gr(\mathcal{C})$; $\mathcal{C}_x$ non può essere una componente irriducibile di $\mathcal{C}$. Dunque $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}$ ha un numero finito di intersezioni.

Nel proiettivo:

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $F(x_0, x_1, x_2) = 0$

$\mathcal{C} \neq r_0$ di equazione $x_0 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ è la chiusura proiettiva della curva affine $\mathcal{D}$ di equazione $F(1, x, y) = 0$, che è ancora irriducibile.

I supporti di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ differiscono solo per i punti $\mathcal{C} \cap r_0$ che sono in numero finito. Inoltre $P \in \mathcal{D}$ è singolare $\Leftrightarrow$ P è singolare per $\mathcal{C}$.

$\mathcal{D}$ ha un numero finito di punti singolari, e pertanto pure $\mathcal{C}$.

Prop. $P \in \mathcal{C}$ singolare $\Rightarrow$ $I(\mathcal{C}, r; P) \geq m_P(\mathcal{C}) \geq 2$ $\forall$ retta per P

Def. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2 (\mathbb{P}^2)$, $P \in \mathcal{C}$, r / $I(\mathcal{C}, r; P) > m_P(\mathcal{C})$ è detta tangente principale a $\mathcal{C}$ in P

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$ $\quad \mathcal{C}^* \subseteq \mathbb{P}^2$

$r \subseteq \mathbb{A}^2$ $\quad r^* \subseteq \mathbb{P}^2$

Se r^* è tangente principale a $\mathcal{C}^*$ in suo punto improprio, è detta asintoto.

- Vediamo ora come trovare le tangenti principali. Abbiamo al solito:

$\mathcal{C}$, $f(x, y) = 0$, $P = (a, b) \in \mathcal{C}$, r per P $\begin{cases} x = a + lt \\ y = b + mt \end{cases}$

$f(a + lt, b + mt) = 0$

Usando Taylor:

$$f(a+lt, b+mt) = [f'_x(a,b)\, l + f'_y(a,b)\, m]\, t + \frac{1}{2!}[f_{xx}(a,b)\, l^2 + 2 f_{xy}(a,b)\, lm + f_{yy}(a,b)\, m^2]\, t^2 + \dots + \frac{1}{r!}\left[\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f_{x^{r-k}} f_{y^k}(a,b)\, l^{r-k} m^k\right] \cdot t^r + \dots$$

$t = \alpha$ è radice di molteplicità m per $f(a + lt, b + mt)$

$\Leftrightarrow$ annulla tutte le derivate di ordine $1, 2, \dots, m-1$ e almeno una derivata di ordine m non si annulla.

Questo significa che $m_P(\mathcal{C}) = m \Leftrightarrow \forall (l, m)$ la parte delle derivate di ordine $1, \dots, m-1$ è soddisfatta mentre $\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f_{x^{r-k}} f_{y^k}(a,b)\, l^{r-k} m^k\, t^r$ è soddisfatta per almeno una scelta di (l, m).

- $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ si tratta in modo simile:

$F(x_0, x_1, x_2) = 0$ $\qquad F(p_0 + tq_0, p_1 + tq_1, p_2 + tq_2) = 0$ $\qquad t = \frac{\mu}{\lambda}$

Per Taylor:

$$F(p_0 + tq_0, \dots, p_2 + tq_2) = \left(\sum_i F_i(p)\, q_i\right) t + \frac{1}{2!}\left(\sum_{jk} F_{jk}(p)\, q_j q_k\right) t^2 + \dots$$

Anche in questo caso $m_P(\mathcal{C}) = m$ se si annullano tutte le derivate parziali di F fino all'ordine $m-1$ e almeno una derivata parziale di F di ordine m è $\neq 0$ in P.

Poiché di nuovo F è omogeneo, la condizione di prima equivale al fatto che $P \in F_1$ e che si annullano tutte quelle di ordine inferiore.

Prop. 1) $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$, $f(x,y)=0$, $P \in \mathcal{C}$ ha molteplicità m
$\Leftrightarrow$ in P si annullano tutte le derivate parziali fino all'ordine $m-1$ e almeno una di ordine m non si annulla in P.

2) $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $F(x_0,x_1,x_2)=0$, $P \in \mathcal{C}$ ha molteplicità m
$\Leftrightarrow$ in P si annullano tutte le derivate parziali di ordine $m-1$ e almeno una di ordine m non si annulla in P.

- $\mathcal{C}$, $f(x,y)=0$, $P=(a,b) \in \mathcal{C}$, $m_P(\mathcal{C}) = m$
le rette tangenti principali sono le rette r per cui il vettore direzione (L,M) annulla $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f_{x^{m-k}y^k}(a,b)\, L^{m-k} M^k = 0$
Questo è un polinomio omogeneo di grado m in L, M
$\Rightarrow \exists$ almeno una tangente principale; ve ne sono al più $m = m_P(\mathcal{C})$ se le radici sono tutte distinte.

Prop. Al solito, $P \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2\ (\mathbb{P}^2)$, $m_P(\mathcal{C}) = m \geq 2$.
Il numero delle tangenti principali distinte a $\mathcal{C}$ in P, detto ξ, è $1 \leq \xi \leq m = m_P(\mathcal{C})$
- Se $\xi = m \Rightarrow$ P punto multiplo ordinario
- Se $\xi < m \Rightarrow$ " non ordinario

In particolare:
- se $\xi = 2 = m$ P è un punto doppio ordinario comunemente detto nodo
- se $\xi = 3 > m$ P è cuspide ordinaria

- Il calcolo delle tangenti principali di una curva affine di equazione $f(x,y)=0$ in un punto $P(a,b)$ si ottiene come segue:
supponiamo che $P(a,b) = (0,0)$.
Scriviamo $f(x,y)$ come somma di polinomi omogenei:
$$f(x,y) = F_0(x,y) + F_1(x,y) + F_2(x,y) + \dots$$
($F_0(x,y) = f(0,0) = 0$)
r per $(0,0)$ $\begin{cases} x = Lt \\ y = Mt \end{cases}$
Andando a sostituire in $f(x,y)$ e usando Taylor troviamo che:
$$F_r(L,M) = \frac{\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f_{x^{r-k}y^k}(0,0)\, L^{r-k} M^k}{r!}$$
coeff. di t^r
Sia $m = m_{(0,0)}(\mathcal{C})$
$\Rightarrow F_1(x,y) = \dots = F_{m-1}(x,y) = 0$ e $F_m(x,y) \neq 0$
cioè $m_{(0,0)}(\mathcal{C})$ è il minimo grado dei monomi non nulli in $f(x,y)$

Inoltre le tangenti principali a $\mathcal{C}$ in $(0,0)$ hanno equazione $Mx + Ly = 0$ al variare di (L,M) tra le radici di $F_m(x,y) = 0$

$\Rightarrow$ le tangenti principali si ottengono semplicemente uguagliando a zero i fattori lineari di $F_n(x,y) = 0$

- Caso generale $P(a,b) \neq (0,0)$

$r: \begin{cases} x = a + Lt \\ y = b + Mt \end{cases}$

poniamo

$f(U+a, V+b) = g(U,V) = G_0 + G_1(U,V) + G_2(U,V) + \dots$

$f(X,Y) = f((x-a)+a, (y-b)+b) = g(x-a, y-b)$

$= G_0 + G_1(x-a, y-b) + G_2(x-a, y-b) + \dots$

con $G_0 = g(0,0) = f(a,b) = 0$

Si procede esattamente come prima, cioè si effettua prima il cambio di coordinate spostando $P(a,b)$ in $(0,0)$.

$P(a,b)$ ha molteplicità m se $G_m(x-a, y-b) \neq 0$.

$G_m(x-a, y-b) = 0$ fornisce le tangenti principali.

- Esempi:

① $x^3 - x^2 + y^2 = 0$

$(0,0)$ punto doppio, nodo

$-x^2 + y^2 = 0 \rightarrow (y-x)(y+x) = 0$ 2 tangenti principali

② $x^3 - y^2 = 0$

$(0,0)$ punto doppio, cuspide

$y^2 = 0$ $y = 0$ contata due volte, tangente principale

③ $2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 = 0$

$(0,0)$ punto doppio, tacnodo (poiché $I(\mathcal{C}, \tau; (0,0)) = 4$)

$y^2 = 0$ $y = 0$ contata due volte è ancora la tang. principale

FLESSI

$\mathcal{C}$ affine o proiettiva, $P \in \mathcal{C}$ semplice, P è detto flesso se $I(\mathcal{C}, \tau; P) \geq 3$, dove τ è la retta tangente.

Viene detto flesso di specie k (≥ 1) se $I(\mathcal{C}, \tau; P) = k+2$

Se $k = 1$, in particolare, si parla di flesso ordinario.

Osserviamo che $\forall P \in \mathcal{C}$, $I(\mathcal{C}, r; P) \leq gr(\mathcal{C})$.

Dunque una conica irriducibile non può avere flessi, mentre una cubica irriducibile può contenere solo flessi ordinari.

Ogni punto di una retta è punto di flesso, poiché la retta coincide con la sua tangente.

La curva $y - x^{k+2} = 0$, $k \geq 1$ ha un flesso di specie k in $(0,0)$

Per studiare i flessi introduciamo la curva H hessiana, di equazione:

$$\begin{vmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} = 0$$

e $\deg H = 3(n-2)$

Prop. I flessi sono i punti non singolari che C ha in comune con la sua hessiana.

(13.12.2010)

Avviso di conferenze il 16 dicembre:

- prof. CILIBERTO (Roma Due) h. 14.30 Curve nodali su K3
- prof. VERRA (Roma Tre) h. 15.40 Sui moduli dei rivestimenti tripli non ramificati di curve di genere 4.

Riprendiamo ora dimostrando la proprietà precedente:

Dim. $\Rightarrow$ $P \in C$ $\quad P = [p_0 : p_1 : p_2]$ $\quad Q = [q_0 : q_1 : q_2] \in \mathbb{P}^2$

$$F(\lambda P + \mu Q) = F(P)\lambda^n + \sum_i F_i(P) \cdot q_i \cdot \lambda^{n-1} \cdot \mu + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} F_{ij}(P) \cdot q_i \cdot q_j \cdot \lambda^{n-2} \cdot \mu^2 + \dots$$

P è un flesso di $C \iff \sum_{i,j} F_{ij}(P)\, q_i q_j = 0 \quad \forall a / \sum_i F_i(P) \cdot q_i = 0$

cioè $\forall Q$ appartenente alla retta tangente τ in P di equazione $\sum_i F_i(P)\, x_i = 0$

$\Rightarrow$ P è un flesso $\iff$ τ è una componente della conica Γ di equazione $\sum_{i,j} F_{ij}(P)\, x_i x_j = 0 \Rightarrow P$ flesso

Γ degenere $\Rightarrow H(P) = 0$.

$\Leftarrow$ $H(P) = 0$ cioè Γ degenere

$$\sum_{i,j} F_{ij}(P)\, p_i p_j = \left[\sum_j F_{0j}(P)\, p_j\right] p_0 + \left[\sum_j F_{1j}(P)\, p_j\right] p_1 + \left[\sum_j F_{2j}(P)\, p_j\right] p_2$$

$$= (n-1) \cdot \sum_j F_j(P)\, p_i = (n-1)\, n\, F(P) = 0 \Rightarrow P \in \Gamma$$

La tangente a Γ in P ha equazione:

$$\sum_{i,j} F_{ij}(P)\, p_i x_i = (n-1) \cdot \sum_i F_i(P)\, x_i$$

$\Rightarrow$ la tangente a Γ in P è τ.

Poichè Γ è riducibile, τ è una componente di Γ, e pertanto P è un flesso.

Cor. $C \subset \mathbb{P}^2$, $\deg C = n \geq 3$. Se C non ha ∞ flessi, ne ha al più $3n(n-2)$ e, se non è singolare, ne ha almeno uno.

Prop. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $T: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ proiettività

① $\forall P \in \mathbb{P}^2 \quad m_P(\mathcal{C}) = m_{T(P)}(T(\mathcal{C}))$

P semplice (multiplo ordinario) (multiplo non ordinario) per $\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$ $T(P)$ semplice (m. ord.) (m non ord.) per $T(\mathcal{C})$

② r tangente (tg. principale) a $\mathcal{C}$ in P $\Leftrightarrow$ $T(r)$ tangente (tg. principale) a $T(\mathcal{C})$ in $T(P)$.

③ P flesso di specie k per $\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$ $T(P)$ flesso di specie k per $T(\mathcal{C})$

Oss.

① $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due curve $\subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{P}^2)$. Si può vedere che $\forall$ punto P del piano $m_P(\mathcal{C}) + m_P(\mathcal{D}) = m_P(\mathcal{C}+\mathcal{D})$

② $\mathcal{C}$ ridotta. Le curve irriducibili componenti di $\mathcal{C}$ sono in numero finito $\Rightarrow$ ogni curva ridotta possiede al più un numero finito di punti singolari.

③ $\mathcal{C}$ di grado n che si decompone in rette passanti tutte per un punto $P \Rightarrow m_P(\mathcal{C}) = n$.
Viceversa, se $\mathcal{C}$ di grado n possiede un punto P di molteplicità $n \Rightarrow \mathcal{C}$ si decompone in rette non necessariamente distinte passanti per P.

Dim. Ogni retta che contiene P e un altro punto di $\mathcal{C}$ ha almeno $n+1$ punti di intersezione con $\mathcal{C} \Rightarrow$ è una componente irriducibile di $\mathcal{C} \Rightarrow$ ogni componente irriducibile di $\mathcal{C}$ è una retta per P.

POLARITÀ

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $F(x_0, x_1, x_2) = 0 \qquad P = [p_0 : p_1 : p_2] \in \mathbb{P}^2$

$x + tP = [x_0 + tp_0 : x_1 + tp_1 : x_2 + tp_2]$

Consideriamo il polinomio $F(x+tP)$ e poniamo $t^r = 0$. Otteniamo una curva $\Gamma^r = \Gamma^r_P(\mathcal{C})$ detta r-esima polare di P rispetto a $\mathcal{C}$.

Si ha:

- $\deg(\mathcal{C}) = n$
- $\deg(\Gamma^r) = n - r$
- Γ^r ha equazione $\sum F_{i_1 \dots i_r}(x)\, p_{i_1} \dots p_{i_r} = 0$
- Γ^r è definita per $0 \le r \le n-1$
- $\Gamma^0 = \mathcal{C}$
- Γ^1 = prima polare ha equazione $\sum_i F_i(x)\, p_i = 0$

PROPRIETÀ DI Γ^1

$\mathcal{C} \cap \Gamma^1_P(\mathcal{C}) = \{ Q \in \mathcal{C} \,/\, Q$ singolare o la tangente a $\mathcal{C}$ in Q contiene $P \}$

Dim. $Q \in \mathcal{C} \cap \Gamma_P'(\mathcal{C}) \iff F(Q) = 0 = \sum F_i(Q) P_i$

cioè se $F_0(Q) = F_1(Q) = F_2(Q) = 0 \Rightarrow Q$ singolare per $\mathcal{C}$ o se $P \in$ retta tangente in Q a $\mathcal{C}$ che ha equazione $\sum F_i(Q) X_i = 0$. □

Quindi le tangenti condotte da P a $\mathcal{C}$ in suoi punti non singolari sono le rette congiungenti P con i punti non singolari di $\mathcal{C}_2$ che stanno su $\Gamma'_P(\mathcal{C})$, e il numero di tali tangenti è al più $n(n-1)$. Se $P \in \mathcal{C}$, allora $P \in \Gamma'_P(\mathcal{C})$.

Nel caso $n = 2$ (conica), si ha una relazione di polarità tra un punto e una retta.

Sia $\mathcal{C}$ una curva irriducibile di grado n.

Si può provare che possiede al più $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ punti doppi.

Se δ è il numero di punti doppi ordinari (nodi), e k è il numero delle cuspidi, allora possiamo definire il genere della curva g come:

$$g \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta - k.$$

Se $g = 0$, allora la curva è detta razionale, infatti può essere espressa nella forma:

$$\begin{cases} X = \rho_1(\lambda) \cdot [\rho_3(\lambda)]^{-1} \\ Y = \rho_2(\lambda) \cdot [\rho_3(\lambda)]^{-1} \end{cases}$$

con ρ_1, ρ_2, ρ_3 polinomi in λ, $\rho_3(\lambda) \neq 0$.

SISTEMI LINEARI DI CURVE PIANE

Sia $K = \bar{K}$, $n > 1$ intero. La totalità delle curve di grado n di $\mathbb{P}^2$ si dice SISTEMA LINEARE di tutte le curve di grado n e si indica con Λ_n

$K[X]_n = K[X_0, X_1, X_2]_n \subset K[X]$, se denotiamo con $K[X]_n$ lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei in X_0, X_1, X_2 di grado n.

$\mathcal{C} \in \Lambda_n$ si può identificare con un punto di $\mathbb{P}(K[X]_n)$, spazio proiettivo di dimensione $\binom{2+n}{n} - 1 = \frac{1}{2} n(n+3)$.

Per esempio, nel caso delle rette, si ha $\dim \Lambda_1 = 2$; per le coniche, $\dim \Lambda_2 = 5$; per le cubiche, $\dim \Lambda_3 = 9$.

Sia Λ un sottospazio lineare di Λ_n. Se Λ ha dimensione r, può essere individuato da $r+1$ curve indipendenti di equazioni $F_0(x) = 0, \dots, F_r(x) = 0$.

Ogni altra curva del sistema lineare è una combinazione lineare di queste:

$$\sum_j \lambda_i F_j(x) = 0 \qquad \text{con } (\lambda_0, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0)$$

Un sistema lineare Λ può essere assegnato anche come intersezione di iperpiani di Λ_n.

L'equazione di un iperpiano di Λ_n è lineare omogenea nei coefficienti della curva variabile e viene chiamata condizione lineare sulle curve del sistema lineare Λ_n.

Λ_n ha dimensione $\frac{1}{2}n(n+3)$.

Comunque si assegnino $M \leq \frac{n(n+3)}{2}$ condizioni lineari, esistono curve di grado n che le soddisfano e formano un sistema lineare di dimensione almeno $\frac{n(n+3)}{2} - M$.

La condizione più ovvia è data dal passaggio per un punto $P[P_0 : P_1 : P_2]$. Se un polinomio omogeneo di grado n in x_0, x_1, x_2 si può scrivere come $F(x) = \sum_{i+j+k=n} a_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k = 0$, abbiamo che $F(P) = 0 \Rightarrow \sum_{i+j+k=n} a_{ijk} P_0^i P_1^j P_2^k = 0$, dove l'ultima scrittura identifica un iperpiano di Λ_n.

Se imponiamo il passaggio per P con molteplicità r, con $r \geq 1$, si trovano $\frac{r(r+1)}{2}$ condizioni lineari corrispondenti allo annullarsi di tutte le derivate parziali di ordine $r-1$ rispetto a x_0, x_1, x_2.

Prop. $P_1, \dots, P_t$ t punti assegnati
$r_1, \dots, r_t$ interi / $\frac{n(n+3)}{2} \geq \sum_{j=1}^{t} \binom{r_j+1}{2}$
$\Rightarrow \exists$ curve di grado n passanti per $P_1, \dots, P_t$ con molteplicità almeno $r_1, \dots, r_t$ rispettivamente e la loro totalità costituisce un sistema lineare di dimensione almeno uguale a $\frac{n(n+3)}{2} - \sum_{j=1}^{t} \binom{r_j+1}{2}$

Per esempio, se si considerano i tipi di curve a cui prima:

- retta $= 1$ $\quad M \leq 2 \Rightarrow$ per 2 punti passa una retta.
- coniche $= 2$ $\quad M \leq 5 \Rightarrow$ per 5 punti passa almeno una conica
- cubiche $= 3$ $\quad M \leq 9 \Rightarrow$ per 9 punti passa almeno una cubica

Se $P_1, \dots, P_t$ impongo condizioni indipendenti

$\Rightarrow \dim [\Lambda_n (P_1^{r_1}, \dots, P_t^{r_t})] = \frac{n(n+3)}{2} - \sum_{j=1}^{t} \binom{r_j+1}{2}$

Def. P che appartiene a tutte le curve di un sistema lineare Λ si dice punto base di Λ.

Se tutte le curve di Λ hanno una componente irriducibile Φ_0 in comune $\Rightarrow$ Φ_0 si dice componente fissa di Λ.

Es. Se prendiam tre punti basi P_1, P_2, P_3 su una retta, allora r è la componente fissa di $\Lambda(P_1, P_2, P_3)$, e ogni altro punto di r è un punto base.

Prop. I punti base di un fascio Λ di dimensione 1 sono i punti di intersezione di due qualsiasi curve del fascio.

$\Leftarrow$ $C_0 \quad F_0(x) = 0 \qquad C_1 \quad F_1(x) = 0$

$C \in \Lambda \iff C: \lambda \cdot F_0(x) + \mu \cdot F_1(x) = 0$

$\Rightarrow C$ contiene ogni punto $P \in C_0 \cap C_1$

$\Rightarrow$ Ovvio

Se alle curve di un fascio si impone il passaggio per un punto P qualsiasi diverso dai punti base, allora si trova un'equazione lineare omogenea in λ e μ che ammette un'unica soluzione $\Rightarrow \exists!\ C \in \Lambda \mid a \in C$.

Più in generale:

- Λ sistema lineare di curve di grado n di dim. $r \geq 1$
- $P_1, \dots, P_r$ r punti distinti presi in modo sufficientemente generale.
- P_1 non è punto base di Λ
- P_2 " di $\Lambda \cap \Lambda_n(P_1)$
- P_3 " di $\Lambda \cap \Lambda_n(P_1, P_2)$

$\Rightarrow P_1, \dots, P_r$ impongono r condizioni indipendenti

Λ è individuato da $r+1$ curve

$\Rightarrow$ la curva di Λ che passa per $P_1, \dots, P_r$ ha equazione:

$$\begin{vmatrix} F_0(x) & \cdots & F_r(x) \\ F_0(P_1) & & \vdots \\ F_0(P_2) & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ F_0(P_r) & \cdots & F_r(P_r) \end{vmatrix} = 0$$

Teor. $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{P}^2$ $\deg C_1 = \deg C_2 = n$

$C_1 \cap C_2 = N$ $(\leq n^2)$ punti distinti

$m \cdot n$ punti di $C_1 \cap C_2$ appartengono a una curva irriducibile D di grado $m < n$

$\Rightarrow$ $N - m \cdot n$ punti rimanenti di $C_1 \cap C_2$ appartengono ad una curva di grado $\leq n - m$

Dim. $P \subset D$, $P \neq$ dagli $m \cdot n$ punti di $C_1 \cap C_2$ che stanno su D.

$\exists\, \mathcal{C}$ fascio individuato da C_1 e C_2 che contiene P.

$\mathcal{C} \cap D = n \cdot m + 1$ punti $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ ha una componente irriducibile con D

$\Rightarrow$ $\mathcal{C} = D + \mathcal{E}$ $\deg \mathcal{E} = n - m$

$\mathcal{C}$ contiene gli N punti di $C_1 \cap C_2$

D ne contiene $n \cdot m$ di questi e nessuno dei rimanenti (altrimenti D sarebbe una componente irriducibile di $C_1 \cap C_2$ contro ipotesi

$\Rightarrow$ i rimanenti $N - n \cdot m$ punti sono contenuti in $\mathcal{E}_D$.

Prop. $T: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$

$\Rightarrow$ $\forall\, n \geq 1$ l'applicazione $\Lambda_n \to \Lambda_n$ è una proiettività

$\mathcal{C} \to T(\mathcal{C})$

(14.12.2010)

CUBICHE

Sia $K = \mathbb{C}$, campo dei numeri complessi, nonchè algebricamente chiuso

Teor. $\mathcal{C} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ cubica non singolare $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente ad una cubica di equazione affine $y^2 = x(x-1)(x-c)$, per qualche $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Dim. $\mathcal{C}$ non singolare $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ possiede almeno un flesso P. Con una proiettività possiamo trasformare P nel punto $[0:0:1]$ in modo che la tangente di flesso sia $x_0 = 0$.

In coordinate affini la curva trasformata di $\mathcal{C}$ ha equazione $y^2 = g(x)$, con $g(x)$ polinomio di $3°$ grado.

Notare che non c'è y^3 perchè se ci fosse x_2^3 allora $F([0:0:1] \neq 0)$; non ci sono y^2x e yx^2 perché $x_0 = 0$ deve avere contatto triplo con $F = 0$.

$g(x)$ non può avere una radice multipla α perchè altrimenti la curva sarebbe singolare in $(\alpha, 0)$:

$g(x) = a\cdot(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot(x-\alpha_3)$ $\quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ distinti.

Effettuiamo il cambio di coordinate:

$$x = (\alpha_2-\alpha_1)\,x' + \alpha_1 \qquad y = \sqrt{a\cdot(\alpha_2-\alpha_1)^3}\,y'$$

da cui:

$$y^2 = g(x)$$
$$= a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$
$$a(\alpha_2-\alpha_1)^3 y'^2 = a\left((\alpha_2-\alpha_1)x' + \alpha_1 - \alpha_1\right)\left((\alpha_2-\alpha_1)x' + \alpha_1 - \alpha_2\right)\left((\alpha_2-\alpha_1)x' + \alpha_1 - \alpha_3\right)$$
$$a(\alpha_2-\alpha_1)^3 y'^2 = x'(x'-1)\,(\alpha_2-\alpha_1)\,x' + \alpha_1 - \alpha_3$$
$$\alpha_2-\alpha_1$$
$$y'^2 = x'(x'-1)(x'-c) \quad \text{con} \quad c = \frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_1}. \qquad \square$$

Teor.

1) $\mathcal{C}$ cubica non singolare ha esattamente 9 flessi che possiedono la proprietà che una retta che ne contiene 2, ne contiene un terzo.

2) Dati due flessi A e B di $\mathcal{C}$, $\exists\, \rho: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ proiettività / $\rho(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, $\rho(A) = B$, $\rho(B) = A$, e lascia fisso il terzo flesso allineato con loro.

Dim.

È sufficiente provare il teorema per le cubiche della forma:

$$y^2 = x(x-1)(x-c)$$

o equivalentemente:

$$f(x,y) = 0$$
$$f(x,y) = y^2 - x^3 + (c+1)x^2 - cx$$
$$h(x,y) = 8\left[(y^2+cx)(3x-(c+1)) + ((c+1)x-c)^2\right]$$
$$R(f, \tfrac{h}{8}) = 3x^4 - 4(c+1)x^3 + 6cx^2 - c^2 \quad \text{(rispetto a } y\text{)}$$
$$\Delta(R(R,R')) = c^4((c+1)^2 - 4c)^2 = c^4(c-1)^4 \neq 0 \qquad c\neq 0,\ c\neq 1$$

$\Rightarrow R(x)$ ha 4 radici distinte, nessuna delle quali è 0.

$f(x,y)$ e $h(x,y)$ contengono la y solo di grado 2 per cui $\forall (x,y)$ radice di entrambi anche $(x,-y)$ è radice di entrambi.

Allora $\forall$ radice di $R(x)$ corrispondono due punti propri distinti in comune a $\mathcal{C}$ e alla sua hessiana perché ogni punto (x,y) soddisfa la condizione $y=0$

$\Rightarrow [0:0:1]$ e altri 8 punti di flesso $\Rightarrow$ 9 flessi

Osserviamo che i flessi $[0:0:1]$ e $[1:x:y]$ sono allineati con $[1:x:-y]$

2) A, B due flessi di C, e c il terzo flesso allineato con A e B

$C = [0:0:1]$

$\Rightarrow A = (x, y) \qquad B = (x, -y)$

$\Rightarrow \rho([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 : x_1 : -x_2]$ è la proiettività cercata

Teor.

$\mathcal{C}$ cubica non singolare di $\mathbb{P}^2$, $P \in \mathcal{C}$ flesso.

Allora $\mathcal{C}$ possiede esattamente quattro tangenti distinte che contengono P inclusa la tangente in P.

Il loro modulo è indipendente dalla scelta di P.

$$j(\mathcal{C}) = j(c) = \frac{(c^2-c+1)^2}{c^2(c-1)^2}$$

Cor. Due cubiche non singolari $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ sono proiettivamente equivalenti $\Leftrightarrow j(\mathcal{C}) = j(\mathcal{C}')$

Si ha una corrispondenza biunivoca:

$M = \{$classi di equivalenza proiettiva di cubiche non singolari$\}$

$\leftrightarrow \{ j(c) \text{ con } c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \}$

Poiché $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ è infinito, le classi di equivalenza di cubiche sono infinite.

- CUBICHE SINGOLARI (caso inriducibile)

Una cubica inriducibile possiede al più un punto singolare.

($\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $\deg \mathcal{C} = n$, r retta non componente, $I(\mathcal{C}, r; P) = n$)

che deve essere un punto doppio altrimenti la cubica si scompone in tre rette passanti per quel punto.

Teor. 1) $\exists$ due classi di equivalenza proiettiva di cubiche inriducibili e singolari. Sono quelle di equazione:

- $y^2 = x^2(x-1)$ un nodo
- $y^2 = x^3$ cuspide ordinaria

2) Ogni cubica inriducibile ha almeno un flesso.

Caso cubiche riducibili: / ○ / X | // ///

- Su una cubica non singolare è possibile definire in modo puramente geometrico la struttura di gruppo abeliano una volta fissato un suo punto di flesso.

Sia o un suo punto di flesso, che per non singolarità esiste.

Definiamo un'operazione di somma tra due punti A e B nel seguente modo: sia la retta $\overline{AB}$, essa interseca la cubica (eventualmente nel complesso e/o all'infinito) una terza volta,

e sia $R(A,B)$ la terza intersezione. Se $A = B$, consideriamo come retta la tangente. Definito ciò:

- $A + B = R(R(A,B), O)$
- $A + A = R(O$, tangente in A a $\mathcal{C})$

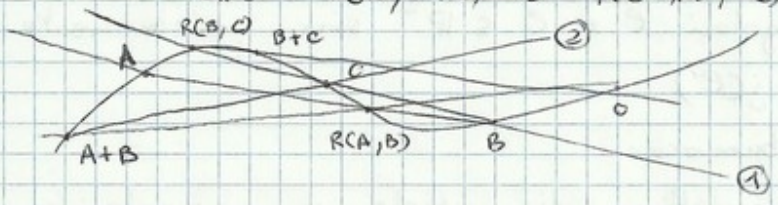
Esistono:

- elemento neutro: è il punto O;
- inverso $-A$: è $R(-A, O)$.

e valgono:

- proprietà commutativa: segue dalla commutatività dell'operazione di risultante.
- proprietà associativa: $\forall\ A, B, C \in \mathcal{C}$ $\quad A+(B+C) = (A+B)+C$

  cioè $R(A, B+C) = R(A+B, C)$.



Consideriamo la cubica $\mathcal{D}$ formata dalle rette $\overline{AB}$, $\overline{A+B, C}$, $\overline{O, B+C}$

$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{O, A, B, C, A+B, B+C, R(A,B), R(A+B, C), R(B,C)\}$

Dimostriamo la proprietà nel caso in cui questi 9 punti sono distinti.

$B, C, R(B,C)$ sono allineati $\Rightarrow$ gli altri sei punti stanno su una conica

$O, A+B, R(A,B)$ sono su una retta.

$\Rightarrow$ $A, B+C, R(A+B, C)$ sono allineati. $\square$

Dalla definizione di t su $\mathcal{C}$ segue che 3 punti $A, B, C \in \mathcal{C}$ sono allineati $\Leftrightarrow$ $A+B+C = O$

Esercizi

- In $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sono date tre rette e_1, e_2, e_3 / $e_1 \cap e_2 \cap e_3 = \emptyset$

  Per $i = 1, 2, 3$ si scelga su e_i un punto P_i non appartenente alle altre due rette in modo che P_1, P_2, P_3 non siano allineati.

  Sia P_4 indipendente da P_1, P_2, P_3 e $P_4 \notin e_1, e_2, e_3$.

  ① Si provi che $\exists$ sempre una cubica $\mathcal{C}$ con le seguenti proprietà:

  a) $\mathcal{C}$ contiene P_1, P_2, P_3 e $I(\mathcal{C}, e_i; P_i) \geq 2$, cioè la molteplicità in P_i di $\mathcal{C}$ con e_i sia almeno 2.

  b) $\mathcal{C}$ contiene P_4 e ha in esso almeno un punto doppio

  ② $\mathcal{C}$ di $\mathcal{D}$ non ha in nessun caso tre rette come componenti.

- $C \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di equazione $y^3 + y^2x - x^3 = 0$
  1. Si determinino i punti singolari di C e il loro ordine
  2. Si trovino i flessi di C
  3. Si dimostri che C è irriducibile e razionale ($g=0$). Se è razionale si trovi una parametrizzazione razionale esplicita di C.
- Determinare i punti singolari, i flessi, le tangenti in tali punti e le caratteristiche plückeriane della cuna di equazione
$$x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + 2x^2 = 0$$
- Iniziamo svolgendo proprio quest'ultimo esercizio:
Si tratta innanzitutto di una cubica, che se non è riducibile possiede al più un punto singolare. Se invece è riducibile, si scompone in una retta e in una conica eventualmente degenere.
Sia $y = mx + q$ una retta del piano. Si tratta di una componente della cubica se le sue intersezioni con ℓ sono più di 3 (e quindi ∞) cioè se $\begin{cases} y = mx+q \\ x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + 2x^2 = 0 \end{cases}$
$$x^3 - x^2(mx+q) + x(mx+q)^2 - (mx+q)^3 + 2x^2 = 0$$
$$(1 - m + m^2 - m^3)x^3 + (-q + 2mq - 3m^2q + 2)x^2 + q^2(1-3m)x - q^3 = 0$$
è un'identità per qualche (m, q). Ciò però non avviene, e pertanto C è irriducibile.
Passiamo ora a coordinate omogenee:
$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - x_2^3 + 2x_1^2x_0 = 0$$
$$\begin{cases} \partial F/\partial x_0 = x_1^2 = 0 \\ \partial F/\partial x_1 = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_0 = 0 \\ \partial F/\partial x_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \forall\, x_0 \end{cases}$$
Si ha come unico punto singolare $[1:0:0]$, e C ha pertanto in $(0,0)$ l'unico punto tale. $x=0$ è la tangente principale doppia, mentre $(0,0)$ è punto di cuspide ordinaria.
Ricerca dei flessi:
$$\begin{vmatrix} 0 & 2x_1 & 0 \\ 4x_1 & 3x_1^2 - 2x_2 + 4x_0 & -2x_1 + 2x_2 \\ 0 & 2x_1 - 2x_2 & -2x_1 + 6x_2 \end{vmatrix} = 0$$
$$-4x_1 \cdot 2x_1 \cdot (-2x_1 + 6x_2) = 0$$
$$x_1^2(x_1 - 3x_2) = 0$$
$$\begin{cases} x_1^2(x_1 - 3x_2) = 0 \\ x_1^3 - x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - x_2^3 + 2x_1^2x_0 = 0 \end{cases}$$
genera due casi:
- $x_1 = 0$
  porta al punto singolare $[1:0:0]$, non accettabile per tale motivo
- $x_1 = 3x_2$
  $x_0 = \frac{10}{9}x_2$
  $[-10 : 27 : 9] \quad (-\frac{27}{10}, -\frac{9}{10})$

tg flesso $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P (x - x_P) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P (y - y_P) = 0$
$$13x - 9y + 27 = 0$$

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - k = \frac{2\cdot 1}{2} - 0 - 1 = 0$$

C è pertanto razionale, e per trovarne una tale parametrizzazione razionale è sufficiente intersecare con una retta che passa per il punto singolare.

$$\begin{cases} x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + 2x^2 = 0 \\ y = tx \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2/(1 - t + t^2 - t^3) \\ y = -2t/(1 - t + t^2 - t^3) \end{cases} \qquad t \neq 1$$

(15.12.2010)

Vediamo la risoluzione del primo esercizio e cui prima: Avevamo:

- $P_2(\mathbb{C})$
- $P_i \in l_i$
- P_1, P_2, P_3 non sono allineati
- l_1, l_2, l_3 / $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \emptyset$
- $P_i \notin l_j, l_k$
- $P_4 \neq P_1, P_2, P_3$
- $P_4 \notin l_1, l_2, l_3$

① $\exists$ C cubica / $P_1, P_2, P_3 \in C$ $I(C, l_i; P_i) \geq 2$

$P_4 \in C$, P_4 almeno punto doppio

② C non ha in nessun caso tre rette come componenti

Ris① C passa per un punto $\Rightarrow$ equazione lineare omogenea nei coefficienti del polinomio che definisce C

- C abbia una certa retta r come tangente
  $\Rightarrow$ equazione lineare omogenee nei coefficienti del polinomio che definisce C (richiesta che in P si annulli la derivata del polinomio che definisce C nella direzione di r)
- Imporre una tangente = due condizioni lineari
  Avere un punto almeno doppio significa per C avere le derivate parziali del polinomio che la definisce nulle.
  $\Rightarrow$ tre condizioni lineari omogenee nei coefficienti di C.
  Il numero di condizioni richieste è inferiore alla dimensione dello spazio parametrizzante delle cubiche e dunque esiste almeno una cubica siffatta.

② Per assurdo, supponiamo che $C = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$

Almeno due di esse devono contenere P_4, per esempio r_1, r_2

$P_1, P_2, P_3 \in r_1 \cup r_2 \cup r_3$

r_1, r_2 possono contenere al più un punto tra P_1, P_2, P_3, mentre r_3 due.

- Si ha il caso in cui r_1 e r_2 contengano P_1 e P_2 con P_4 e r_3 è una retta per P_3.
  $\Rightarrow r_3 \equiv \ell_3$ (passa doppiamente per P_3)
  Allora in P_1 C ha r_1 come unica tangente perchè $r_1 \neq \ell_1$, dal momento che $P_4 \in r_1$, ma $P_4 \notin \ell_1$. Ciò è assurdo.
- L'altro caso è quello in cui r_1 passa per P_4, P_1, r_3 per P_2, P_3, r_2 per P_4. Poichè r_3 non passa per P_1 e $r_1 \neq \ell_1$, r_2 deve passare per P_1, cioè $r_2 = r_1$. Pertanto l'unica tangente a C in P_2 e P_3 è r_3, assurdo.

CORRISPONDENZE I e V.

- $\mathbb{A}^n(k) = \mathbb{A}^n$ spazio affine di dimensione n su k
- $y_1, \dots, y_n$ coordinate affini
- $k[y_1, \dots, y_n]$ anello dei polinomi a coefficienti in k in $y_1, \dots, y_n$
- $X \subseteq \mathbb{A}^n$ si dice insieme algebrico affine se:

$$X = V(\mathcal{A}) = \{ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}^2 \ / \ F(y) = 0 \quad \forall F \in \mathcal{A} \}$$

($\mathcal{A}$ ideale di $k[y_1, \dots, y_n]$)

$$V : \{ \mathcal{A} \trianglelefteq k[x_1, \dots, x_n] \ / \ \mathcal{A} \text{ ideale} \} \to \{ X \subseteq \mathbb{A}^n \ / \ X \text{ insieme algebrico affine} \}$$

$k[x_1, \dots, x_n]$ noetheriano, $\mathcal{A}$ finitamente generato
$\Rightarrow V(\mathcal{A})$ = luogo degli zeri di un numero finito di polinomi generatori di $\mathcal{A}$

$$\begin{cases} F_1(Y) = 0 \\ \vdots \\ F_m(Y) = 0 \end{cases}$$ equazione di X

$\mathcal{A} = (F)$ ideale principale $\qquad V(\mathcal{A}) = V(F)$ ipersuperficie

Prop.

1) $V(0) = \mathbb{A}^n$
2) $V(k[y_1, \dots, y_n]) = \emptyset$
3) se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono ideali di $k[y_1, \dots, y_n]$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, allora $V(\mathcal{A}) \supseteq V(\mathcal{B})$, ovvero le inclusioni vengono invertite
4) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ideali di $k[y_1, \dots, y_n] \Rightarrow V(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = V(\mathcal{A}) \cup V(\mathcal{B})$
5) $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ famiglia di ideali di $k[y_1, \dots, y_n]$
$\Rightarrow V\left(\sum_{i \in I} \mathcal{A}_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(\mathcal{A}_i)$

Dim.

1), 2) ovvie
3) è sufficiente considerare $V(\mathcal{A})$ e $V(\mathcal{B})$ come soluzioni di sistemi di equazioni.

4) Doppia inclusione:

Per assurdo $y \in V(A \cap B)$, ma $y \notin V(A) \cup V(B)$

$\Rightarrow \exists F \in A,\ G \in B \ /\ F(y) \neq 0,\ G(y) \neq 0$

$\Rightarrow FG \in A \cap B$ ma $FG(y) \neq 0$

Viceversa:

$A \cdot B \subset A$, $A \cap B \subset B$

Per il punto tre $V(A \cap B) \supseteq V(A)$ e $V(A \cap B) \supseteq V(B)$

$\Rightarrow V(A \cap B) \supseteq V(A) \cup V(B)$

5) Doppia inclusione

$A_i \subseteq \sum_{i \in I} A_i \quad \forall i$

$\underset{\text{per la 3}}{\Rightarrow}$ ~~dec~~ $V(\sum_{i \in I} A_i) \subseteq V(A_i) \quad \forall i$

$\Rightarrow V(\sum_{i \in I} A) \subseteq \bigcap_{i \in I} V(A_i)$

Viceversa se $y \in \bigcap_{i \in I} V(A_i) \Rightarrow$ y annulla tutti i generatori di ciascun ideale $A_i \Rightarrow$ annulla tutti i polinomi $\sum_{i \in I} A_i$

$\Rightarrow y \in V(\sum_{i \in I} A_i)$

Oss. I $V(\mathcal{A})$ soddisfano le proprietà dei chiusi di una topologia, e ne definiscono pertanto una, detta di Zariski.

$A \trianglelefteq K[y_1, \dots, y_n]$

$\sqrt{A} = \{F \in K[y_1, \dots, y_n] \ /\ \exists\, t \in \mathbb{N} \ /\ F^t \in A\}$

Se $A = \sqrt{A}$, si parla di ideale radicale.

Ovviamente $A \subset \sqrt{A}$. Altrettanto, se A è primo, $A = \sqrt{A}$.

Prop. $A \trianglelefteq K[y_1, \dots, y_n] \Rightarrow V(A) = V(\sqrt{A})$

Dim. Poiché $A \subseteq \sqrt{A} \Rightarrow V(\sqrt{A}) \subseteq V(A)$

Viceversa se $y \in V(A)$ e $G \in \sqrt{A}$, cioè $G^t \in A$, $t \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 0 (G^t)(y) = (G(y))^t \Rightarrow G(y) = 0 \Rightarrow y \in V(A)$

V suriettiva ma non iniettiva

$\{\text{ideali radicali di } K[y_1, \dots, y_n]\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \{X \text{ insiemi algebrici affini}\}$

$I(X) = \{F \in K[y_1, \dots, y_n] \ /\ F(y) = 0 \quad \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in X\}$

Si prova immediatamente che $I(X)$ è un ideale radicale.

Prop. 1) $X \subseteq V(I(X))$

2) se $A \trianglelefteq K[y_1, \dots, y_n] \Rightarrow A \subseteq I(V(A))$

3) X insieme algebrico affine $\Rightarrow X = V(I(X))$

4) X insieme algebrico affine e $X \subsetneq \mathbb{A}^n \Rightarrow I(X) \neq (0)$

(20.12.2010)

Dim. delle proprietà

1) $\bar{y} \in X$. Si ha che $F(\bar{y}) = 0 \quad \forall y \in X$, in particolare $F(\bar{y}) = 0 \quad \forall F \in I(X)$

2) $F \in \mathcal{A}$. Dobbiamo mostrare che $F(y) = 0 \quad \forall y \in V(\mathcal{A})$. Se $y \in V(\mathcal{A})$, ogni polinomio di $\mathcal{A}$ si annulla in y, in particolare F.

3) Dobbiamo dimostrare l'inclusione $V(I(X)) \subseteq X$. Per ipotesi $X = V(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A} \lhd K[y_1, \dots, y_n]$. Per la 2), $\mathcal{A} \subseteq I(V(\mathcal{A}))$. Applichiamo V e otteniamo $V(\mathcal{A}) \supseteq V(I(V(\mathcal{A})))$, cioè $X \supseteq V(I(X))$

4) Sia per assurdo $I(X) = (0)$. Applicando V, otteniamo $V(I(X)) = V(0) = \mathbb{A}^n$. Per la 3), X insieme algebrico affine $\Rightarrow V(I(X)) = X \Rightarrow X = \mathbb{A}^n$, assurdo.

Prop.

1) $I(\mathbb{A}^n) = (0)$ se K è infinito

2) $I(\emptyset) = K[y_1, \dots, y_n]$

3) $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ e $X_1 \subset X_2 \Rightarrow I(X_1) \supseteq I(X_2)$

4) $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{A}^n \Rightarrow I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$.

Dim.

1) Si procede per induzione.
La base dell'induzione, $n = 1$, si verifica osservando che ogni polinomio non nullo F ha un numero finito di zeri. Poiché $\mathbb{A}^1(K) = K$ è infinito, F non può annullarsi su tutta la retta affine.
Supponiamo ora vera la tesi per $n-1$ e proviamola per n.
Sia $F \in K[y_1, \dots, y_n]$, $F \notin K$. Possiamo scrivere:
$F = F_r(y_1, \dots, y_{n-1}) \cdot y_n^r + F_{r-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) \cdot y_n^{r-1}$
$+ \dots + F_0 \cdot (y_1, \dots, y_{n-1})$, con $r \geq 1$, $F_i \in K[y_1, \dots, y_{n-1}]$, $F_r \neq 0$.
Per ipotesi induttiva F non si annulla su tutto $\mathbb{A}^{n-1}$
$\Rightarrow \exists (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}$ tale che $F_r(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}) \neq 0$.
Allora $\tilde{F}(y_n) = F(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}, y_n) \in K[y_n]$, ha grado r e possiede quindi al più r radici in $\mathbb{A}^1$.
$\Rightarrow \exists\, \bar{y}_n \,/\, \tilde{F}(\bar{y}_n) \neq 0 \Rightarrow F(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}, \bar{y}_n) \Rightarrow F \in I(\mathbb{A}^n)$

3) Sia $F \in I(X_2) \Rightarrow F(y) = 0 \quad \forall y \in X_2$
$X_1 \subset X_2 \Rightarrow F(y) = 0 \quad \forall y \in X_1 \Rightarrow F \in I(X_1)$

4) $F \in I(X_1 \cup X_2) \Leftrightarrow F(y) = 0 \quad \forall y \in X_1 \cup X_2$
$\Leftrightarrow F(y) = 0 \quad \forall y \in X_1$ e $\forall y \in X_2$
$\Leftrightarrow F \in I(X_1) \cap I(X_2)$

Abbiamo che $V \circ I$ restituisce l'identità, ma che $I \circ V$, in generale, non lo è, e si può solo dire che $A \subseteq I(V(A))$

Per esempio, sia $K = \mathbb{R}$, $F(y) = y^2 + 1 \in \mathbb{R}[y]$.

Si ha $(F) \neq (0)$, ma $V(F) = \emptyset$, per cui I e V non possono essere l'inverso l'una dell'altra.

Oppure, sia (F^t) con $t \geq 2$, $V(F^t) = V(F)$, $F \in I(V(F))$ ma $F \notin (F^t)$

Esiste un teorema che sotto opportune condizioni garantisce l'identità anche per $I \circ V$, ma richiede che k sia algebricamente chiuso.

Def. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ insieme algebrico affine.

X è detto irriducibile se non è unione di insiemi algebrici affini strettamente contenuti in X, ovvero, se $X = X_1 \cup X_2$, con X_1 e X_2 insiemi algebrici affini, allora $X_1 = X$ o $X_2 = X$.

Teor. Ogni insieme algebrico X è unione di un numero finito di insiemi algebrici irriducibili X_i.

Def. X insieme algebrico affine. Una rappresentazione $X = \bigcup_{i \in J} X_i$ si dice ridotta se è tale per cui $X_i \not\subseteq X_j \ \forall i \neq j$.

Gli insiemi algebrici X_i sono detti componenti irriducibili di X.

Teor. Ogni insieme algebrico ammette un'unica rappresentazione finita ridotta.

Prop. X insieme algebrico affine, $X \neq \emptyset \Rightarrow$ (X irriducibile $\Leftrightarrow I(X)$ primo)

$\Rightarrow$ $f_1, f_2 \in I(X)$, $X_1 = V(f_1)$, $X_2 = V(f_2)$

X irriducibile $\Rightarrow X_1 \cup X_2 \subset X$

$\Rightarrow \exists\, x \in X - X_1 \cup X_2 \quad f_1 f_2(x) \neq 0$

$\Rightarrow f_1 f_2 \notin I(X) \Rightarrow I(X)$ primo.

$\Leftarrow$ Per assurdo X riducibile $\Rightarrow X = X_1 \cup X_2$, e siano $f_1, f_2 \notin I(X)$ tali per cui $f_1(X_1) = 0$ e $f_2(X_2) = 0$.

$f_1 f_2 \in I(X) \Rightarrow I(X)$ non primo, assurdo $\Rightarrow X$ irriducibile.

- Se k infinito $\Rightarrow \mathbb{A}^n$ irriducibile ($I(\mathbb{A}^n) = (0)$)

Prop. X insieme algebrico affine, $X \neq \emptyset \Rightarrow X = \{a\} \Leftrightarrow I(X)$ massimale.

In particolare $I(a) = (y_1 - a_1, \dots, y_n - a_n)$

$\Rightarrow$ $X = \{a\}$ Consideriamo la suriezione di valutazione:

$$\pi_a : K[y_1, \dots, y_n] \longrightarrow K$$
$$F \longmapsto F(a)$$

$$\ker \pi_a = \{F \in K[y_1, \dots, y_n] \mid F(a) = 0\} = I(X)$$

$$\frac{K[y_1, \dots, y_n]}{\ker \pi_a} \simeq K \qquad \ker \pi_a = I(X) \text{ è massimale.}$$

$\Leftarrow$ $I(X)$ ideale massimale di $k[y_1, \dots, y_n]$

Sia $a \in V(I(X)) = X \neq \emptyset$.

Consideriamo il morfismo di valutazione $\pi_a \Rightarrow I(X) \subset \ker \pi_a$.

$I(X)$ massimale $\Rightarrow X = V(I(X)) = \ker \pi_a = \{F \in k[y_1, \dots, y_n] \,/\, F(a) = 0\}$

$= V(I(\{a\})) = \{a\}$

- Proviamo che $I(a) = (y_1 - a_1, \dots, y_n - a_n)$

Sia $F \in k[y_1, \dots, y_n] \,/\, F(a) = 0$

Dividiamo F per $y_1 - a_1, \dots, y_n - a_n$

$\Rightarrow F = a_1 (y_1 - a_1) + \dots + a_n (y_n - a_n) + r$

$a_1, \dots, a_n \in k[y_1, \dots, y_n]$ $r \in k$

Valutiamo F in a e troviamo che $F(a) = r = 0$

$\Rightarrow F \in (y_1 - a_1, \dots, y_n - a_n)$

- Principio di prolungamento delle identità algebriche

$X \subseteq \mathbb{A}^n$ insieme algebrico affine, $P \in k[y_1, \dots, y_n]$.

Se $P(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{A}^n \setminus X \Rightarrow P(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{A}^n$.

Dim. $P(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{A}^n \setminus X$, $\mathbb{A}^n \setminus X \subseteq V(P)$

$\Rightarrow X \cup V(P) = \mathbb{A}^n$ con X e $V(P)$ insiemi algebrici affini.

Ma $\mathbb{A}^n$ è irriducibile e $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $V(P) = \mathbb{A}^n \Rightarrow P(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{A}^n$.

- Def. varietà algebrica affine

$\left(\underbrace{X}_{\substack{\text{insieme} \\ \text{algebrico} \\ \text{affine}}}, \underbrace{\frac{k[y_1, \dots, y_n]}{I(X)}}_{k\text{-algebra}} \right)$ anello delle coordinate di X

$X \longleftrightarrow I(X) \longleftrightarrow k$-algebra

Esempi

$\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$	$\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$	$\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$
$A_1 = (y^2 + 1)$	$A_4 = (y_1^2 + y_2^2 - 1)$	$A_7 = (y^2 + 1)$
$V(A_1) = \emptyset$	$V(A_4) =$ circonferenza $C(0,0)$ $r = 1$	$V(A_7) = \{-1, 1\}$
$A_2 = (y^2 - 1)$	$A_5 = (y_2^2 - y_1^2 - y_1^3)$	$A_8 = (y^n - 1)$
$V(A_2) = \{-1, 1\}$	$V(A_5) =$ cubica	$V(A_8) = \{$ radici n-esime dell'unità $\}$
$A_3 = (y^2 - 5y + 6,\ y^2 - 3y + 2)$	$A_6 = (P_1, P_2)$	
$V(A_3) = \{2\}$	$V(A_6) =$ punti di P_1 e P_2	

NULLSTELLENSATZ (Hilbert)

Lemma Sia $k = \bar{k}$ non numerabile. Se L è un'estensione di k la cui dimensione come spazio vettoriale su k al più numerabile $\Rightarrow k = L$

Dim. $k = \bar{k}$ per ipotesi.

È sufficiente far vedere che L è algebrico su k.

Per assurdo, supponiamo che L non sia un'estensione algebrica di k. Esisterà dunque un elemento $t \in L \setminus k$, trascendente su k, e, di conseguenza, un sottocampo di L isomorfo al campo delle funzioni razionali $k(T)$ su k.

Il campo $k(T)$ contiene la famiglia $\left\{\frac{1}{T-a}\right\}_{a \in k}$.

Poiché k è non numerabile, anche questa famiglia è non numerabile. Dimostriamo che è linearmente indipendente, cioè che ogni suo sottoinsieme finito è linearmente indipendente su k.

Proviamo che l'insieme non numerabile delle $\frac{1}{T-a}$ con $a \in k$ è linearmente indipendente.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{T-a_i} = 0 \qquad \lambda_i \in k$$

Moltiplichiamo per $T-a_j$ al variare di $j = 1, \dots, n$.

Si ottengono le relazioni $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i (T-a_j)}{T-a_i} = 0$, da cui valutando in a_j risulta $\lambda_j = 0 \Rightarrow [k(T) : k]$ è più che numerabile essendo pari almeno alla cardinalità di k $\Rightarrow k(T) \subseteq L$, ma per ipotesi L ha dimensione al più numerabile come spazio vettoriale su k, assurdo.

NSS (versione debole)

$$A \subsetneq \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n] \Rightarrow V(A) \neq \emptyset$$

Dim. Osseriamo che è sufficiente dimostrare il teorema per ideali massimali.

Sia $m \subsetneq \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ ideale massimale. Allora $\frac{\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]}{m}$ è un campo contenente $\mathbb{C}$. Ma $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione al più numerabile, una cui base è data dall'insieme $\{y_1^{i_1} \cdot \dots \cdot y_n^{i_n} \mid i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}\}$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]}{m} = \mathbb{C}$$

Siano $F \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ e f l'immagine di F in $\frac{\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]}{m} = \mathbb{C}$

$$F(y_1, \dots, y_n) = \sum c_{i_1, \dots, i_n} y_1^{i_1} \cdot \dots \cdot y_n^{i_n}$$

$$f(y_1, \dots, y_n) = \overline{F(y_1, \dots, y_n)} = \overline{\sum c_{i_1, \dots, i_n} y_1^{i_1} \cdot \dots \cdot y_n^{i_n}}$$

$$= \sum c_{i_1, \dots, i_n} y_1^{i_1} \cdot \dots \cdot y_n^{i_n} = F(y_1, \dots, y_n)$$

Sia $F \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$

NSS (versione forte)

$A \lhd \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n] \Rightarrow I(V(A)) = \sqrt{A}$

Dim. L'inclusione $\sqrt{A} \subseteq I(V(A))$ è ovvia.

Dimostriamo che $I(V(A)) \subseteq \sqrt{A}$.

Sia $G \in I(V(A))$ e vogliamo far vedere che $G^m \in A$ con $m \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ è un anello noetheriano $\Rightarrow \exists F_1, \dots, F_r \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ / $A = (F_1, \dots, F_r)$

Consideriamo l'anello $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n, T]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$ e variabili $y_1, \dots, y_n, T$.

In questo anello consideriamo i polinomi $F_1, \dots, F_r, GT-1$.

Questi polinomi non hanno zeri in comune in $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$, infatti se $F_1, \dots, F_r$ si annulla su $(y,t) \in \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow y \in V(A)$ e $(GT-1)(y,t) = -1$

$\Rightarrow$ Per il NSS debole l'ideale da essi generato è $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n, T]$

$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{r} P_i F_i + Q(GT-1)$

Passiamo al quoziente $\frac{\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n, T]}{GT-1}$ e identifichiamo tutti i polinomi con la loro immagine del quoziente. Otteniamo:

$1 = \sum_{i=1}^{r} P_i\left(y_1, \dots, y_n, \frac{1}{G}\right) F_i$

ora, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ / $G^m = \sum_{i=1}^{r} H_i F_i \quad G^m \in A$

Prop. $\exists$ una corrispondenza biunivoca tra i punti di $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ e ideali massimali di $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$

Dim. Proviamo la corrispondenza biunivoca tra $a \longleftrightarrow I(\{a\})$

Sappiamo già che $I(\{a\})$ è un ideale massimale.

Sappiamo anche che a punti distinti corrispondono ideali massimali distinti, cioè la corrispondenza è iniettiva.

Vogliamo provare che la corrispondenza è suriettiva, cioè che ogni ideale massimale di $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ è della forma $I(\{y\})$ per un opportuno $y \in \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$

Sia $m \underset{\text{max}}{\lhd} \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$. Per il NSS debole $V(m) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, y \in V(m)$

Consideriamo il morfismo di valutazione $\pi_y \Rightarrow m \subseteq \ker \pi_y$

Ma m max $\Rightarrow m = \ker \pi_y = \{F \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n] \,/\, F(y) = 0\}$

$= I(\{y\})$

(21.12.2010)

Prop. $F \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n] \Rightarrow$ l'ipersuperficie $V(F)$ è irriducibile $\Leftrightarrow$ F è irriducibile

Dim. $\Rightarrow$ Sia per assurdo F riducibile $\Rightarrow F = G \cdot H$, con $G, H \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$, G, H non costanti e irriducibili.

$\Rightarrow V(F) = V(GH) = V(G) \cup V(H)$; ma $V(G)$ e $V(H)$ sono chiusi non vuoti per il NSS e $\neq$ da $V(F) \Rightarrow V(F)$ riducibile

$\Leftarrow$ F irriducibile, allora primo che $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ è UFD

$\Rightarrow (F)$ è primo e quindi radicale

Per il NSS $I(V(F)) = \sqrt{(F)} = (F)$

$\Rightarrow I(V(F))$ è primo $\Rightarrow V(F)$ è irriducibile

TOPOLOGIA DI ZARISKI

Abbiamo già osservato che gli insiemi algebrici affini verificano le proprietà dei chiusi di una topologia su $\mathbb{A}^n \Rightarrow$ la topologia di Zariski è la topologia in cui i chiusi sono proprio gli insiemi algebrici affini. In particolare i chiusi principali sono le ipersuperfici $V(F)$. Poiché ogni chiuso è intersezione finita di chiusi principali, una base per gli aperti di $\mathbb{A}^n$ in questa topologia è data dagli insiemi $\mathbb{A}^n_F = \mathbb{A}^n \setminus V(F) = \{y \in \mathbb{A}^n \,/\, F(y) \neq 0\}$, cioè sono i complementari dei chiusi principali, detti aperti principali.

Su $X \subseteq \mathbb{A}^n$ è definita la topologia indotta che ha per aperti principali $X_F = X \setminus V(F) = \{y \in X \,/\, F(y) \neq 0\}$

Oss. La definizione di insieme algebrico affine irriducibile X coincide con la definizione topologica di spazio irriducibile, con X dotato della topologia indotta. In particolare $\mathbb{A}^n$ è irriducibile nel senso topologico e quindi ogni suo aperto non vuoto è denso in $\mathbb{A}^n$ (U aperto $\bar{U} = \mathbb{A}^n$). La stessa cosa vale per X irriducibile cioè ogni aperto non vuoto è denso in X

Prop. (della topologia di Zariski)

1) non è T_2 (non è uno spazio di Hausdorff)
2) è T_1 (è uno spazio di Fréchet)
3) è compatta
4) $K = \mathbb{C}$, la topologia di Zariski di $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ è meno fine della topologia naturale su $\mathbb{C}$.

Dim. 1) $\mathbb{A}^n$ irriducibile, ogni suo aperto non vuoto è denso in $\mathbb{A}^n$. Allora due aperti non vuoti si intersecano sempre e dunque non esistono intorni disgiunti.

2) Siano $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$ due punti distinti di $\mathbb{A}^n$. Consideriamo i polinomi:

$$F_y = (y_1 - y_1)^2 + \dots + (y_n - y_n)^2$$
$$F_z = (y_1 - z_1)^2 + \dots + (y_n - z_n)^2$$

Si ha che $F_y(y) = 0$, $F_y(z) \neq 0$, e $F_z(z) = 0$, $F_z(y) \neq 0$

$\Rightarrow \mathbb{A}^n_{F_y}$ è un aperto di y che non contiene z e $\mathbb{A}^n_{F_z}$ è un aperto di z che non contiene y.

3) Sia k algebricamente chiuso; a stretto rigore l'ipotesi non è necessaria, ma la sua assunzione in un contesto in cui la supponiamo spesso ci semplifica la dimostrazione. Per mostrare la compattezza di $\mathbb{A}^n$, proviamo che da ogni ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito. Possiamo ragionare su un ricoprimento realizzato con aperti principali:

$$\mathbb{A}^n = \bigcup_\alpha \mathbb{A}^n_{F_\alpha} = \bigcup_\alpha (\mathbb{A}^n \setminus V(F_\alpha)) = \mathbb{A}^n \setminus \bigcap_\alpha V(F_\alpha)$$

Passando ai complementari:

$$\emptyset = \bigcap_\alpha V(F_\alpha) = V\left(\sum_\alpha (F_\alpha)\right)$$

Per il NSS $\sum_\alpha F(\alpha) = k[y_1, \dots, y_n]$

$\Rightarrow 1 \in k$ e 1 si può scrivere come combinazione lineare di un numero finito di polinomi F_α: $1 = \sum_{i=1}^{s} a_i F_{\alpha_i}$

$\Rightarrow V(F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_s}) = V\left(\sum_{\alpha=1}^{s} F_{\alpha_i}\right) = \emptyset$

$\Rightarrow$ passando di nuovo ai complementari $\mathbb{A}^n = \bigcup_{i=1}^{s} \mathbb{A}_{F_{\alpha_i}}$

4) Mostriamo che i chiusi della topologia di Zariski sono anche chiusi nella topologia naturale. È sufficiente dimostrarlo per i chiusi principali:

$$V(F) = \{y \in \mathbb{A}^n \mid F(y) = 0\} = F^{-1}(0)$$

$\mathbb{C}^n$ è T_1 e le funzioni polinomiali sono continue nella topologia naturale di $\mathbb{C}^n$. Pertanto i $V(F)$ sono chiusi nella topologia naturale di $\mathbb{C}^n$ perché controimmagini di chiusi di funzioni continue.

STRUTTURA ESAME

- domanda a scelta (esposizione)
- esercizio su ~~proiettività~~ spazi proiettivi, curve, o brevi dimostrazioni.
- orale con due domande

ESERCIZI

- Data la curva proiettiva C di equazione $x_2^2 x_3^2 - 3x_1^2 x_2 x_3 - x_2 x_1^3 + 2x_1^4 = 0$ trovare i punti singolari e provare che la curva γ di equazione $x_2 x_3 - \lambda x_1^2 = 0$ permette di trovare una rappresentazione parametrica razionale per C.

  Soluzione: $(0:1:0) = A$ cuspide ordinaria, $(0:0:1) = B$ punto doppio $x_2 = 0$ tangente

  In forma affine, ponendo $x = x_1 x_3^{-1}$, $y = x_2 x_3^{-1}$:

  $y^2 - 3x^2 y - x^3 y + 2x^4 = 0$

  Valutiamo le intersezioni con γ:

  $$\begin{cases} y^2 - 3x^2 y - x^3 y + 2x^4 = 0 \\ y = \lambda x^2 \end{cases}$$

  Risulta:

  $\lambda^2 x^4 - 3x^2 \lambda x^2 - \lambda x^5 + 2x^4 = 0$

  $x^4 (\lambda^2 - 3\lambda + 2) - \lambda x^5 = 0$

  $x^4 (\lambda^2 - 3\lambda + 2 - \lambda x) = 0$

  $x = 0$ 4 intersezioni fisse in $(0,0)$

  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 - \lambda x = 0$

  $x = \dfrac{\lambda^2 - 3\lambda + 2}{\lambda} \longrightarrow y = \dfrac{(\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2}{\lambda}$

- $K = \mathbb{R}$, $f: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

  La proiettività può essere:

  - ellittica (se non ha punti fissi)
  - parabolica (se ha un solo punto fisso)
  - iperbolica (se ha due punti fissi)

  $f \longleftrightarrow M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

  1) f involuzione $\Leftrightarrow a_{11} + a_{22} = 1$

  2) f involuzione $\Leftrightarrow$ scambio 2 punti $f(A) = B$; $f(B) = A$

- In P^4 siano p_1 e p_2 gli iperpiani di equazione $p_1 : x_1 + x_5 = 0$ e $p_2 : x_2 - x_5 = 0$, e siano $A = (1,-1,2,0,1)$, $B = (-1,1,0,2,1)$, $C = (-1,0,1,2,1)$, $D = (0,0,0,0,1)$ quattro punti linearmente indipendenti. Si trovino:

  1) l'equazione dell'iperpiano p_3 individuato da A, B, C, D
  2) una rappresentazione parametrica della retta m proiettiva in comune a p_1, p_2, p_3

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ & & & & A \\ & & & & B \\ & & & & C \\ & & & & D \end{vmatrix} = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -2\lambda + \mu \\ x_4 = \mu \\ x_5 = \lambda \end{cases}$$

- Trovare l'involuzione ρ avente $[1,1]$ e $[3,1]$ come punti fissi. ρ è data da un sistema

$$\begin{cases} \rho x_1' = a x_1 + b x_2 \\ \rho x_2' = c x_1 - a x_2 \end{cases}$$

$$\rho([1,1]) = [1,1] \qquad \rho([3,1]) = [3,1]$$

$$\begin{cases} \rho_1 = a + b \\ \rho_1 = c - a \\ 3\rho_2 = 3a + b \\ \rho_2 = 3c - a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2\rho_1 \\ b = 3\rho_1 \\ c = -\rho_1 \\ \rho_2 = -\rho_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho x_1' = -2x_1 + 3x_2 \\ \rho x_2' = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

- Trovare una parametrizzazione per la varietà lineare proiettiva V comune agli iperpiani:

$$p_1 : x_1 + 3x_2 - x_5 = 0$$
$$p_2 : x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0$$
$$p_3 : 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

Soluzione:

Notando che $2p_1 + p_2 = p_3$:

$$\begin{cases} x_1 = 3t_1 - 3t_2 + 7t_3 \\ x_2 = -t_1 + t_2 - 2t_3 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}$$

- In $\mathbb{P}^3$ sono assegnati i punti:

  $A(1,2,1,0)$ $B(1,0,0,1)$ $C(1,0,0,0)$ $D(2,1,0,0)$ $E(1,1,1,1)$

  ① rappresentare mediante equazioni la retta r per A e B e il piano π individuato da C, D, E

$$r: \begin{cases} x_1 = \lambda + t\cdot 0 = x_{1A}\cdot\lambda + t\cdot(x_{1A}-x_{1B}) \\ x_2 = 2\lambda + t\cdot 2 = x_{2A}\cdot\lambda + t\cdot(x_{2A}-x_{2B}) \\ x_3 = \lambda + t\cdot 1 = \text{"} \\ x_4 = 0 + t\cdot(-1) = \text{"} \end{cases}$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \text{—} & C & \text{—} & \\ \text{—} & D & \text{—} & \\ \text{—} & E & \text{—} & \end{vmatrix} = 0$$

② trovare le coordinate di $P = r \cap \pi$ e calcolare il birapporto $[A, B, P, Q]$ con $Q = (3,4,2,1)$

$$r \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ x_3 = x_1 - x_4 \end{cases}$$
$$\pi \; x_3 - x_4 = 0$$

$P = [2,2,1,1]$

$P = A + B$

$Q = A + P = A + A + B = 2A + B$ da cui $\beta[A,B,P,Q] = \frac{1}{2}$

- $f: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

  $A(1,0) \to A'(3,5)$

  $B(0,1) \to B'(1,1)$

  $C(2,1) \to C'(0,1)$

  trovare gli eventuali punti fissi

  Non ci sono punti fissi, è ellittica

- Determinare i punti fissi della seguente proiettività:

$$f([x_0,x_1,x_2]) = [-x_0 + 15x_1 + 6x_2,\ -2x_0 + 8x_1 + 2x_2,\ 4x_0 - 18x_1 - 5x_2]$$

Si cerca $y = [y_0, y_1, y_2]$ fisso se $f(x) = y$

$$\begin{cases} -x_0 + 15x_1 + 6x_2 = \lambda x_0 \\ -2x_0 + 8x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 4x_0 - 18x_1 - 5x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

Si tratta di un problema di ricerca autovalori, che restituisce $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$

Si ottiene $P_0 = [3:2:-4]$, $P_1 = [1:1:-2]$, $P_2 = [4:2:-5]$