

METODI NUMERICI PER IL CAD

CURVE PIANE

FORMA IMPLICITA

$$f(x, y) = 0$$

SUPERFICI

$$f(x, y, z) = 0$$

Unicità è unica a meno di C.

FORMA PARAMETRICA

$$C(u) = (x(u), y(u)) \quad (u) \in [a, b]$$

$$S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in D$$

non è unica, si pensi al quanto di circonferenza nel primo quadrante: trigonometrica, razionale, Monge

- Per tracciare tali oggetti matematici al computer si utilizzerà di solito la forma parametrica piuttosto che quella implicita.
- Tale forma potrà ammettere delle derivate rispetto a u e v, che rappresentano le velocità lungo le linee immagini delle direzioni coordinate del dominio dei parametri. La derivazione può essere estesa ad ordini superiori al primo (secondo: accelerazione). Le derivate vengono effettuate componente per componente.

CURVE DI BÉZIER

$$C(u) = (x(u), y(u), z(u)) \quad x(u), y(u), z(u) \in \mathbb{P}_n \quad [i=0, \dots, n]$$

$$\text{Base monomiale: } (x(u), y(u), z(u)) = (\sum_i a_{ix} u^i, \sum_i a_{iy} u^i, \sum_i a_{iz} u^i)$$

$$\text{Base di Bernstein: } (x(u), y(u), z(u)) = (\sum_i x_i \cdot B_{i,n}(u), \sum_i y_i \cdot B_{i,n}(u), \sum_i z_i \cdot B_{i,n}(u))$$

con: $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $B_{i,n}(u) = \binom{n}{i} \cdot u^i \cdot (1-u)^{n-i}$, $u \in [0, 1]$

- La base di Bernstein è quella più stabile numericamente ed è dunque la comunemente utilizzata per le curve di Bézier.

PROPRIETÀ CURVE DI BÉZIER

- $C(0) = P_0$
- $C(1) = P_n$
- $\text{tg in } P_0 \text{ è } \parallel \text{ a } P_1 - P_0$
- $\text{tg in } P_n \text{ è } \parallel \text{ a } P_n - P_{n-1}$
- la curva è contenuta nell'inviluppo convesso dei suoi P_i
- ogni retta interseca la curva un numero di volte minore o uguale a quante interseca il suo poligono di controllo

PROPRIETÀ POLINOMI DI BERNSTEIN

- positività: $B_{i,n}(u) \geq 0 \quad \forall i=0:n \quad u \in [0, 1]$
- pari-zione dell'unità: $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) = 1$
- massimi: $B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1$, $\max B_{i,n}(u) \text{ in } u = \frac{i}{n}$
- forma ricorsiva:

$$B_{i,n}(u) = (1-u) \cdot B_{i,n-1}(u) + u \cdot B_{i-1,n-1}(u)$$

$$B'_{i,n}(u) = \frac{dB_{i,n}(u)}{du} = n(B_{i-1,n-1}(u) - B_{i,n-1}(u))$$

$$C'(u) = \sum_{i=0}^n B'_{i,n}(u) \cdot P_i = \sum_{i=0}^n n(B_{i-1,n-1}(u) - B_{i,n-1}(u)) P_i \\ = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(u) \cdot (P_{i+1} - P_i)$$

CURVE RAZIONALI DI BEZIER

$$C(u) = \left(\frac{x(u)}{w(u)}, \frac{y(u)}{w(u)}, \frac{z(u)}{w(u)} \right)$$

$$x(u), y(u), z(u) \in P_n \quad w(u) \in P_n \quad [i=0:n]$$

- Esempio: la circonferenza unitaria, con la parametrizzazione razionale
- Con i polinomi di Bernstein:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \cdot p_i \cdot B_{i,n}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(u)} = \sum_{i=0}^n \frac{w_i \cdot B_{i,n}(u)}{\sum_{j=0}^n w_j \cdot B_{j,n}(u)} \cdot p_i = \sum_{i=0}^n R_{i,n} \cdot p_i$$

PROPRIETÀ $R_{i,n}$

Valgono positività se $w_i > 0$, partizione dell'unità, massimi per $i=0$ e $i=n$.

Inoltre se ogni $w_i = 1$, allora $R_{i,n}(u) = B_{i,n}(u)$

PROPRIETÀ CURVE RAZIONALI DI BEZIER

Valgono le stesse delle curve polinomiali di Bezier, con:

- invarianza per trasformazioni affini (non citata precedentemente)
- se $w_i = 1$, si ottiene una curva polinomiale di Bezier.

Le curve di Bezier polinomiali possono pertanto essere viste come casi particolari delle curve di Bezier razionali.

RELAZIONE TRA CURVE POLINOMICI E CURVE RAZIONALI

- Sia $P \equiv (x, y, z)$, $w \in \mathbb{R}^*$. Definiamo $P^w(wx, wy, wz, w) := P(x, y, z)$
- P si riottiene da P^w dividendo $(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ per w , ovvero, geometricamente, proiettando P^w dall'origine sull'iperpiano $w=1$.
- Poniamo, per comodità di notazione, $X = wx$, $Y = wy$, $Z = wz$, $W = w$.
In questo caso possiamo scrivere $P^w(wx, wy, wz, w) = (X, Y, Z, W)$
- Definiamo poi la trasformazione H che realizza la proiezione a cui sopra:
 $P = H\{P^w\} = H\{(X, Y, Z, W)\} = (Xw^{-1}, Yw^{-1}, Zw^{-1})$
dandone il significato proiettivo della direzione (x, y, z) se $w=0$.
- Applichiamo ora il tutto ai punti di controllo $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ e ai pesi $\{w_i\} \subseteq \mathbb{R}^*$
Costruiamo i punti di controllo $P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$, e definiamo la curva di Bezier polinomiale $C^w(u) = \sum_{i=0}^n P_i^w B_{i,n}(u)$, esplicitamente:
 $C^w(u) = \left(\sum_{i=0}^n x_i w_i B_{i,n}(u), \sum_{i=0}^n y_i w_i B_{i,n}(u), \sum_{i=0}^n z_i w_i B_{i,n}(u), \sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(u) \right)$
Applicando ora H , si ottiene proprio la curva razionale.
- In questo modo si utilizza la procedura per generare curve polinomiali, al fine di generare curve razionali.

VARIAZIONE DI UN PUNTO DI CONTROLLO

- Svolgiamo i calcoli per le curve razionali, osservando che valgono anche per le curve polinomiali, considerando tutti i w_i uguali a 1.
- Sia $C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) \cdot P_i$, dove gli $R_{i,n}(u)$ sono definiti come prima.
- Spostiamo il punto P_k nella nuova posizione $\tilde{P}_k = P_k + v$.

In tal modo possiamo scrivere, spezzando opportunamente la sommatoria:

$$\begin{aligned}\tilde{C}(u) &= \sum_{i=0}^{k-1} R_{i,n}(u) \cdot P_i + R_{k,n}(u) \cdot (\tilde{P}_k + v) + \sum_{i=k+1}^n R_{i,n}(u) \cdot P_i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} R_{i,n}(u) \cdot P_i + R_{k,n}(u) \cdot P_k + \sum_{i=k+1}^n R_{i,n}(u) \cdot P_i + R_{k,n}(u) \cdot v \\ &= \tilde{P}(u) + R_{k,n}(u) \cdot v\end{aligned}$$

e dunque:

$$\tilde{P}(u) = P(u) + v \cdot R_{k,n}(u)$$

- Ogni punto P di $C(u)$ viene traslato in una direzione parallela a v , e le componenti del vettore traslazione sono proporzionali a quelle di v .

VARIAZIONE DI UN PESO

- Si può applicare soltanto alle curve razionali, in quanto quelle polinomiali sono prive dei pesi, fissati implicitamente come $w_i = 1$.
- Sia ancora $C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) \cdot P_i$, analogamente a quanto in precedenza.
- Variamo il peso w_k alla nuova quantità $\tilde{w}_k = w_k + \delta w_k$.
La curva diventa: $\tilde{C}(u) = \sum_{i=0}^n \tilde{R}_{i,n}(u) \cdot P_i$, con $\tilde{R}_{i,n}(u) = \frac{\tilde{w}_i \cdot B_{i,n}(u)}{\sum_j \tilde{w}_j \cdot B_{j,n}(u)}$
con $\tilde{w}_i = \begin{cases} w_i & \text{se } i \neq k \\ w_i + \delta w_i & \text{se } i = k \end{cases} = w_i + \delta \cdot \delta_{ik} \cdot w_i = w_i(1 + \delta \cdot \delta_{ik})$

Dimostriamo che ogni punto P , corrispondente ad un fisso valore di u nella curva, si sposta nel punto $\tilde{P} = (1-\alpha) \cdot P + \alpha \cdot P_k$, dove:

- P_k è il punto di controllo corrispondente al peso cambiato
- $\alpha = \frac{\delta w_k \cdot B_{k,n}(u)}{\sum_i w_i \cdot B_{i,n}(u) + \delta \cdot w_k \cdot B_{k,n}(u)} = \frac{\delta w_k \cdot B_{k,n}(u)}{\sum_i [w_i(1 + \delta \cdot \delta_{ik}) \cdot B_{i,n}(u)]}$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned}\tilde{C}(u) &= \frac{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i \cdot P_i \cdot B_{i,n}(u)}{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i \cdot B_{i,n}(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \cdot P_i \cdot B_{i,n}(u) + \delta w_k \cdot P_k \cdot B_{k,n}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(u) + \delta w_k \cdot B_{k,n}(u)} = \frac{N_1 + N_2}{D} \\ &= \frac{N_1}{D} \cdot \frac{\sum_i w_i \cdot B_{i,n}}{\sum_i w_i} + \frac{N_2}{D} \\ &= \frac{\sum_i w_i \cdot B_{i,n}}{D} \cdot \frac{N_1}{\sum_i w_i \cdot B_{i,n}} + \frac{N_2}{D} \\ &= \frac{\sum_i w_i \cdot B_{i,n}}{D} \cdot C(u) + \frac{N_2}{D} \\ &= (1-\alpha) \cdot C(u) + \alpha \cdot P_k \quad \text{per ogni } u \text{ e dunque ogni } P \in C.\end{aligned}$$

DERIVATA DI UNA CURVA

- Ancora, svolgiamo i calcoli per le curve razionali, di cui le polinomiali sono un caso particolare, nella notazione che seguirà $b(u) \equiv 1$.

- Si ha: $C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i P_i B_{i,n}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(u)} = \frac{a(u)}{b(u)}$

- Derivando: $C'(u) = \frac{a'(u) \cdot b(u) - a(u) \cdot b'(u)}{b^2(u)} = \frac{a'(u)}{b(u)} - \frac{a(u)}{b(u)} \cdot \frac{b'(u)}{b(u)} = \frac{a'(u) - C(u) \cdot b'(u)}{b(u)}$

- In termini di polinomi di Bernstein:

- $B'_{i,n}(u) = n [B_{i-1,n-1}(u) - B_{i,n-1}(u)]$

- $a'(u) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (w_{i+1} P_{i+1} - w_i P_i) \cdot B_{i,n-1}(u) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(w_i P_i) \cdot B_{i,n-1}(u)$

- $b'(u) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (w_{i+1} - w_i) \cdot B_{i,n-1}(u) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \Delta w_i \cdot B_{i,n-1}(u)$

utilizzando l'operatore di differenza $\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$.

- Sempre facendo uso di tale operatore, possiamo scrivere una espressione generale per la derivata della curva:

- $C'(u) = \frac{n \left[\sum_{i=0}^{n-1} \Delta(w_i P_i) B_{i,n-1}(u) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta w_i B_{i,n-1}(u) \right) C(u) \right]}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(u)}$

In particolare:

- $C'(0) = \frac{n [\Delta(w_0 P_0) - \Delta w_0 \cdot C(0)]}{w_0} = \frac{n [w_1 P_1 - w_0 P_0 - w_1 P_0 + w_0 P_0]}{w_0} = n \cdot \frac{w_1}{w_0} (P_1 - P_0)$

- $C'(1) = \frac{n [\Delta w_{n-1} P_{n-1}] - \Delta w_{n-1} \cdot C(1)}{w_n} = \frac{n [w_n P_n - w_{n-1} P_{n-1} - w_n P_{n-1} + w_{n-1} P_n]}{w_n} = n \cdot \frac{w_{n-1}}{w_n} (P_n - P_{n-1})$

Osservando che:

- $B_{i,n-1}(0) = S_{i,0}$

- $B_{i,n-1}(1) = S_{i,n-1}$

Si ottiene che una curva di Bezier razionale è tangente al poligono di controllo negli estremi.

ALGORITMO DI DE CASTELJAU

- Consideriamo la formula ricorsiva che genera i polinomi di Bernstein:

$$B_{i,n}(u) = (1-u) \cdot B_{i,n-1}(u) + u \cdot B_{i-1,n-1}(u)$$

- Scriviamo ora l'espressione di un punto su di una curva di Bezier, fissato $u = u_0$ e denotati i punti di controllo come $P_{0,i}$:

$$C(u_0) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u_0) \cdot P_{0,i}$$

- Applichiamo la formula ricorsiva per generare una catena di ugualianze:

$$\begin{aligned} C(u_0) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u_0) \cdot P_{0,i} = \sum_{i=0}^n [(1-u_0) \cdot B_{i,n-1}(u_0) + u_0 \cdot B_{i-1,n-1}(u_0)] \cdot P_{0,i} \\ &= P_{0,0} [(1-u_0) \cdot B_{0,n-1}(u_0) + u_0 \cdot B_{-1,n-1}(u_0)] + \\ &\quad P_{0,1} [(1-u_0) \cdot B_{1,n-1}(u_0) + u_0 \cdot B_{0,n-1}(u_0)] + \\ &\quad P_{0,2} [(1-u_0) \cdot B_{2,n-1}(u_0) + u_0 \cdot B_{1,n-1}(u_0)] + \\ &\quad \dots + \\ &\quad P_{0,n-1} [(1-u_0) \cdot B_{n-1,n-1}(u_0) + u_0 \cdot B_{n-2,n-1}(u_0)] + \\ &\quad P_{0,n} [(1-u_0) \cdot B_{n,n-1}(u_0) + u_0 \cdot B_{n-1,n-1}(u_0)] \\ &= B_{0,n-1}(u_0) \cdot [(1-u_0) \cdot P_{0,0} + u_0 \cdot P_{0,1}] + \\ &\quad B_{1,n-1}(u_0) \cdot [(1-u_0) \cdot P_{0,1} + u_0 \cdot P_{0,2}] + \\ &\quad \dots + \\ &\quad B_{n-1,n-1}(u_0) \cdot [(1-u_0) \cdot P_{0,n-1} + u_0 \cdot P_{0,n}] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(u_0) \cdot [(1-u_0) \cdot P_{0,i} + u_0 \cdot P_{0,i+1}] \\ &:= \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(u_0) \cdot P_{1,i}(u_0) \end{aligned}$$

dove abbiamo definito in quel modo il punto $P_{1,i}(u_0)$.

$$:= \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(u_0) \cdot P_{2,i}(u_0)$$

dove, come prima, $P_{2,i}(u_0) = (1-u_0) \cdot P_{1,i}(u_0) + u_0 \cdot P_{1,i+1}(u_0)$

$$\vdots = \dots$$

$$\vdots = \sum_{i=0}^0 B_{i,0}(u_0) \cdot P_{n,i}(u_0) = B_{0,0}(u_0) \cdot P_{n,0}(u_0) = P_{n,0}(u_0)$$

e si trova esplicitamente il punto.

Il metodo può essere riassunto nei seguenti due passi:

$$\cdot P_{0,i} = P_i \quad i = 0, \dots, n$$

$$\cdot P_{k,i}(u_0) = (1-u_0) \cdot P_{k-1,i}(u_0) + u_0 \cdot P_{k-1,i+1}(u_0) \quad k = 1:n, \quad i = 0:n-k$$

- Nel caso delle curve razionali, poiché $C^w(u)$, insieme dei P^w , è una curva polinomiale, si può usare l'algoritmo di de Casteljau per calcolare $C^w(u_0)$, e successivamente, proiettando, $C(u_0) = H\{C^w(u_0)\}$:

$$\cdot P_{0,i}^w = P_i^w$$

$$\cdot P_{k,i}^w(u_0) = (1-u_0) \cdot P_{k-1,i}^w(u_0) + u_0 \cdot P_{k-1,i+1}^w(u_0)$$

RIPRODUZIONE DELLE CONICHE

- Consideriamo una curva razionale di Bézier quadratica, in cui cioè $n=2$:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i P_i B_{i,2}(u)}{\sum_{i=0}^2 w_i B_{i,2}(u)} = \sum_{i=0}^2 R_{i,2}(u) \cdot P_i \quad 0 \leq u \leq 1$$

Si tratta di un arco di conica.

- Introduciamo un sistema di coordinate oblique $\{P_0, S, T\}$ con $S = P_0 - P_1$, $T = P_2 - P_1$.

- Per la proprietà dell'inviluppo convesso, la curva giace nel triangolo P_0, P_1, P_2 , e possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} C(u) &= P_0 + \alpha(u) \cdot S + \beta(u) \cdot T \\ &= \alpha(u) \cdot P_0 + (1-\alpha(u)-\beta(u)) \cdot P_1 + \beta(u) \cdot P_2 \quad (\text{sostituendo l'espressione di } S, T) \\ &= R_{0,2} \cdot P_0 + R_{1,2} \cdot P_1 + R_{2,2} \cdot P_2 \quad (\text{è l'espressione iniziale}) \end{aligned}$$

dunque dovrà essere:

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= R_{0,2}(u) = w_0 \cdot B_{0,2}(u) \cdot [w(u)]^{-1} = w_0 \cdot (1-u)^2 \cdot [w(u)]^{-1} \\ \beta(u) &= R_{2,2}(u) = w_2 \cdot B_{2,2}(u) \cdot [w(u)]^{-1} = w_2 \cdot u^2 \cdot [w(u)]^{-1} \\ 1-\alpha(u)-\beta(u) &= R_{1,2}(u) = w_1 \cdot B_{1,2}(u) \cdot [w(u)]^{-1} = w_1 \cdot 2u \cdot (1-u) \cdot [w(u)]^{-1} \end{aligned}$$

Quadrando l'ultima espressione:

$$\begin{aligned} (1-\alpha(u)-\beta(u))^2 &= \dots = w_1^2 \cdot 4u^2 \cdot (1-u)^2 \cdot [w(u)]^{-2} \\ &= \frac{w_1^2 \cdot 4\alpha(u) \cdot w(u) \cdot \beta(u) \cdot w(u)}{w_0 \cdot w_2 \cdot [w(u)]^2} = 4 \cdot \frac{w_1^2}{w_0 w_2} \alpha(u) \beta(u) \end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito le espressioni di $\alpha(u)$ e $\beta(u)$

ricavate prima ai due polinomi in u .

Si ricava l'equazione implicita nel sistema di coordinate oblique:

$$\alpha(u) \beta(u) = \frac{1}{4} \cdot k \cdot (1-\alpha(u) \beta(u))^2, \quad \text{con } k = \frac{w_0 w_2}{w_1^2}$$

dove:

- k è il fattore di forma della conica e la determina
- se si cambiano w_0, w_1, w_2 in maniera tale che k non cambi, allora cambia solo la parametrizzazione, non la curva; possiamo dunque porre $w_0 = w_2 = 1$ (parametrizzazione standard)

Per determinare il tipo di conica, studiamo i punti all'infinito:

$$\begin{aligned} w(u) &= (1-u)^2 \cdot w_0 + 2u(1-u) w_1 + u^2 \cdot w_2 = (w_0 - 2w_1 + w_2)u^2 + 2(w_1 - w_0)u + w_0 \\ u_{1,2} &= \frac{(w_0 - w_1) \pm \sqrt{1-k}}{w_0 - 2w_1 + w_2} \end{aligned}$$

Si ha:

- $k > 1 \Rightarrow w_1^2 < 1, -1 < w_1 < 1$ ellisse
- $w_1 = 0$ segmento $P_0 P_2$
- $k = 1 \Rightarrow w_1^2 = 1, w_1 = -1, 1$ parabola
- $w_1 < 0$ arco complementare
- $k < 1 \Rightarrow w_1^2 > 1, w_1 < -1 \circ w_1 > 1$ iperbole

SUPERFICI TENSORE PRODOTTO

- Sono generate da:
 - un insieme di punti di controllo a topologia rettangolare
 - funzioni di miscelamento prodotto di funzioni base univariate.
- Supponiamo il dominio dei parametri $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$, sarebbe:
 - $P = S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})^T \cdot f_i(u) \cdot g_j(v)$
 (in forma matriciale) $= [f_i(u)]^T \cdot [b_{ij}] \cdot [g_j(v)]$
 con $[f_i(u)]^T \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$, $[g_j(v)]^T \in \mathbb{R}^{(m+1) \times 1}$
- Fissato uno dei due parametri, si ottengono le curve isoparametriche:
 - $C_{u_0}(v) = S(u_0, v) = \sum_{j=0}^m \left[\sum_{i=0}^n b_{ij} f_i(u_0) \right] g_j(v) = \sum_{j=0}^m b_j(u_0) \cdot g_j(v)$
 - $C_{v_0}(u) = S(u, v_0) = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^m b_{ij} g_j(v_0) \right] f_i(u) = \sum_{i=0}^n b_i(v_0) \cdot f_i(u)$
- Se definiamo $f_i(u) = B_{i,n}(u)$, e $g_j(v) = B_{j,m}(v)$, otteniamo una superficie di Bezier tensore prodotto, le cui isocurve sono curve di Bezier:
 - $C_{u_0}(v) = S(u_0, v) = \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \cdot \left(\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u_0) \cdot P_{ij} \right) = \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \cdot Q_j(v_0)$
 - $C_{v_0}(u) = S(u, v_0) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \cdot \left(\sum_{j=0}^m B_{j,m}(v_0) \cdot P_{ij} \right) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \cdot Q_i(u_0)$
- Alcune proprietà:
 - $B_{ij}(u, v) = B_i(u) \cdot B_j(v) \geq 0$ (positività)
 - $\sum_i \sum_j B_i(u) \cdot B_j(v) = 1$ (partitione dell'unità)
 - invarianza per trasformazioni affini
 - $S(u, v)$ è contenuta nell'envelope convessa dei punti P_{ij}
 - $S(u, v)$ intercala i quattro angoli, ovvero:
 - $S(0, 0) = P_{00}$
 - $S(1, 0) = P_{n0}$
 - $S(0, 1) = P_{0m}$
 - $S(1, 1) = P_{nm}$
- Possiamo definire anche superfici di Bezier razionali come:
 - $S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} P_{ij} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij}(u, v) \cdot P_{ij}$

che, facendo riferimento alla proiezione H cui prima, è quella di:

 - $S^w(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) \cdot B_{j,m}(v) \cdot P_{ij}^w$

In tal caso inoltre:

 - $R_{ij}(u, v) = \frac{B_{i,n}(u) \cdot B_{j,m}(v) \cdot w_{ij}}{\sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m w_{rs} \cdot B_{r,n}(u) \cdot B_{s,m}(v)}$

ALGORITMO DI DE CASTELJAU PER LE SUPERFICI

- Vediamo ora come l'algoritmo di De Casteljau possa essere esteso delle curve alle superfici.
- Fissiamo innanzitutto (u_0, v_0) .
 - Fissiamo anche j_0 . In tal caso $Q_{j_0}(u_0) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u_0) \cdot P_{i,j_0}$ è l'espressione del punto ottenuto applicando l'algoritmo di de Casteljau alla riga j_0 dei punti di controllo, cioè $\{P_{i,j_0}\}_{i=0}^n$.
 - Applicandolo sulle $m+1$ righe, si ottiene pertanto l'isocurva $C_{v_0}(v)$.
 - Applicandolo ancora una volta su $C_{v_0}(v)$ per $v=v_0$ si ottiene $C_{v_0}(v_0) = S(u_0, v_0)$.
 - Si eseguono in tutto $\frac{n(n+1)}{2}(m+1) + \frac{m(m+1)}{2}$ interpolazioni lineari.
- In alternativa, sempre fissato (u_0, v_0) :
 - fissiamo i_0 , e allora $Q_{i_0}(v_0) = \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v_0) \cdot P_{i_0,j}$ rappresenta il punto che si ottiene applicando de Casteljau alla colonna i_0 dei punti di controllo, cioè $\{P_{i_0,j}\}_{j=0}^m$.
 - applicandolo alle $n+1$ colonne, si ottiene l'isocurva $C_{v_0}(v)$.
 - applicandolo su $C_{v_0}(v)$ per $v=v_0$, si giunge a $C_{v_0}(v_0) = S(u_0, v_0)$.
 - si sono eseguite in tutto $\frac{m(m+1)}{2}(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$ interpolazioni.
- A seconda dei valori di m e n , conviene computazionalmente procedere in un modo piuttosto che nell'altro, benché i due procedimenti sono del tutto equivalenti.

SVANTAGGI NELL'USO DEL POLINOMIALE E DEL RAZIONALE

- Più vincoli sono da soddisfare, più è alto il grado; si genera instabilità numerica, come accade utilizzando polinomi di ordine elevato.
- Non si ha controllo locale: cambiando un punto di controllo o un peso, cambia tutta la curva, poiché i $B_{i,n}$ e i $R_{i,n}$ si annullano soltanto agli estremi (per giunta, ad uno solo se $i=0$ o $i=n$).
- Una prima soluzione contempla l'utilizzo di curve e superfici composte, ovvero di costruire più sezioni polinomiali. Per esempio:
 - $0 = v_0 < v_1 < \dots < v_h = 1$ (v_i : break points)
 - definiamo $C(v) = C_h(v)$, $v \in [v_{i-1}, v_i]$, $i=1, \dots, h$, $C_h(v)$ polinomiale
- Definita $C_i^{(j)}$ la derivata j-esima di $C_i(v)$, possiamo definire $C(v)$ come C^k -continua in un punto di break v_i se $C_i^{(j)}(v_i) = C_{i+1}^{(j)}(v_i)$ per ogni j fino a k , ovvero $j=0 \dots k$.
- A seconda della continuità richiesta, si avrà più o meno versatilità: più si richiede la regolarità, meno gradi di libertà si avranno a disposizione.
- Resta tuttavia lo svantaggio delle strette dipendenze dai punti di controllo: la soluzione successiva che risolve questo problema è data dall'uso di funzioni polinomiali a tratti come funzioni di miscelamento, piuttosto che polinomi. In particolare useremo funzioni simili ai polinomi di Bernstein ma che non siano definite da un tratto unico di polinomio: le B-spline.

INTRODUZIONE ALLE FUNZIONI B-SPLINE

- Abbiamo detto che come funzioni di miscelamento si utilizzano funzioni polinomiali a tratti. In formule, possiamo scrivere:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n f_i(u) P_i$$

Tali funzioni saranno definite su di una partizione dell'intervallo dei parametri, e formeranno una base per lo spazio di tutti i polinomi a tratti aventi le regolarità desiderate nei punti di break $U = \{u_i\}_{i=0}^m$.

- Affinché le funzioni siano fruibili per i nostri scopi dovrà essere:

- (positività) $f_i \geq 0$: necessaria affinché la curva sia effettivamente controllata dai suoi punti di controllo, e valgano proprietà notevoli come quella dell'inviluppo convesso

- (partizione dell'unità) $\sum f_i = 1$: altrimenti la nostra combinazione lineare di punti non avrebbe senso, essendo definite in geometria affine soltanto quelle a somma dei coefficienti unitaria.

- supporto locale: abbiamo detto che la problematica che dovevamo risolvere era quella per cui si aveva la mancanza di un controllo locale; prendendo funzioni che siano uguali a zero al di fuori di un dato intervallo dei parametri, si risolve questo problema, nel senso che, intuitivamente parlando, lo spostamento di un punto o il cambiamento di un peso "lontano" da un determinato tratto della curva, non modifica in alcun modo tale tratto ($f_i(u) = 0$), mentre nei casi precedenti ($B_i(u) > 0$, $R_i(u) > 0$, in tutti i punti interni) lo modificava sempre, anche se magari "di poco".

- L'uso delle funzioni B-spline al posto dei polinomi di Bernstein o delle funzioni razionali che li coinvolgono può essere effettuato anche negli altri casi trattati precedentemente, ovvero:

- $C^w(u) = \sum_{i=0}^n f_i(u) \cdot P_i^w$ curve razionali con i punti di controllo pesati: al solito, si eseguono i calcoli con una dimensione in più (quella dei pesi) e poi si divide per quest'ultima.

- $S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m'} f_i(u) \cdot g_j(v) \cdot P_{ij}$ superfici: in questo caso servono due partitioni $U = \{u_i\}_{i=0}^m$ e $V = \{v_j\}_{j=0}^{m'}$, e $\{f_i(u)\}$, $\{g_j(v)\}$ sono due basi distinte di dello spazio spline. distinti.

- $S^w(u, v) = \sum_i^n \sum_j^{m'} f_i(u) \cdot g_j(v) \cdot P_{ij}$ superfici razionali: analogamente a prima, con i pesi.

FUNZIONI B-SPLINE

• Definiamo ora formalmente le funzioni B-spline.

- Sia $U = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ vettore dei nodi. $u_i \leq u_{i+1}$, ma non per forza <.
- La i -esima B-spline di grado p (ordine $p+1$), denotata con $N_{i,p}(u)$, è definita attraverso la formula di ricorrenza di Cox-De Boor come:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad p > 0$$

- Le $N_{i,p}(u)$ risultano essere funzioni polinomiali a tratti, di grado p .
- Attenzione va dedicata a questa sottile differenza:
 - nodi: sequenza non decrescente di numeri reali come sopra;
 - punti di break: insieme dei nodi, ogni elemento viene considerato una volta soltanto, come nella definizione di insieme.

• Alcune proprietà delle B-spline:

- (i) supporto locale : $N_{i,p}(u) = 0$, $u \notin [u_i, u_{i+p}]$
- (ii) in ogni intervallo $[u_j, u_{j+1})$ al più $p+1$ B-spline di grado p sono non nulle
- Dimostrazione: consideriamo j fissato
 - l'unica B-spline di grado 0 è $N_{j,0}$
 - di grado 1 ci sono al più due B-spline non nulle: $N_{j-1,1}$ e $N_{j,1}$
 - di grado 2 " al più tre " : $N_{j-2,2}$, $N_{j-1,2}$, $N_{j,2}$
 - e così via.

$$\cdot (iii) \quad N_{i,p}(u) \geq 0 \quad \forall i, p, u$$

• Dimostrazione: per induzione su p

$$\cdot p=0 \quad N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

• assumiamo ora che sia vero per $p-1$, $p>0$:

consideriamo la formula di ricorrenza

se $u \notin [u_i, u_{i+p})$, allora $N_{i,p-1}(u) = 0$

se $u \in [u_i, u_{i+p})$, allora $N_{i,p-1}(u) \geq 0$ e $\frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} \geq 0$

analogalemente:

se $u \notin [u_{i+1}, u_{i+p+1})$ allora $N_{i+1,p-1}(u) = 0$

se $u \in [u_{i+1}, u_{i+p+1})$ allora $N_{i+1,p-1}(u) \geq 0$ e $\frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \geq 0$

- (iv) partizione dell'unità: $u \in [v_i, v_{i+1}]$, $\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) = 1$

Ancora per induzione sul grado p .

Per $p=0$, nell'intervallo si ha $N_{i,0}(u) = 1$, $N_{j,0}(u) = 0$ se $j \neq i$, e la proprietà è banalmente dimostrata.

Supponiamola ora vera per $p-1$ e proviamola per p .

Si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) &= \sum_{j=i-p}^i \frac{u - v_j}{v_{j+p} - v_j} N_{j,p-1}(u) + \sum_{j=i-p}^i \frac{v_{j+p+1} - u}{v_{j+p+1} - v_{j+1}} N_{j+1,p-1}(u) \\ &= \sum_{j=i-p+1}^i " + \sum_{j=i-p}^{i-1} " \end{aligned}$$

poiché $N_{i-p,p-1}(u) = N_{i+1,p-1}(u) = 0$, dal momento che

solo le $N_{j,p}(u)$ con $i-p+1 \leq j \leq i$ sono non identicamente nulle

$$= \sum_{j=i-p+1}^i \frac{u - v_j}{v_{j+p} - v_j} N_{j,p-1}(u) + \sum_{j=i-p+1}^i \frac{v_{j+p} - u}{v_{j+p} - v_j} N_{j,p-1}(u)$$

Spostando ~~\sum~~ di uno in avanti l'indice della sommatoria di destra, in modo che corrisponda con l'altro.

$$= \sum_{j=i-p+1}^i \left(\frac{u - v_j}{v_{j+p} - v_j} + \frac{v_{j+p} - u}{v_{j+p} - v_j} \right) N_{j,p-1}(u)$$

$$= \sum_{j=i-p+1}^i 1 \cdot N_{j,p-1}(u) = \sum_{j=i-p+1}^i N_{j,p-1} = 1$$

per l'ipotesi induttiva.

- (v) in un nodo di molteplicità k , $N_{i,p}(u)$ è $p-k$ volte differenziabile con derivate continue nel nodo.
- (vi) tranne nel caso $p=0$, $N_{i,p}(u)$ ha un massimo.

DERIVATE DI UNA FUNZIONE B-SPLINE

- Le derivate di una funzione B-spline possono essere espresse in forma ricorsiva, oppure in forma chiusa.

- Forma ricorsiva:

$$N_{i,p}^{(k)} = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{v_{i+p} - v_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{v_{i+p+1} - v_{i+1}} \right)$$

In particolare la dimostrazione per il caso $k=1$ utilizza l'induzione su p , attraverso la formula di ricorrenza e la $(fg)' = f'g + fg'$.

- Forma chiusa:

$$N_{i,p}^{(k)} = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k a_{k,j} \cdot N_{i+j,p-k}$$

Con:

$$\bullet \quad a_{0,0} = 1$$

$$\bullet \quad a_{k,0} = \frac{a_{k-1,0}}{v_{i+p-k+1} - v_i}$$

mentre

$$\bullet \quad a_{k,j} = \frac{a_{k-1,j} - a_{k-1,j-1}}{v_{i+p+j-k+1} - v_{i+j}}$$

$$\bullet \quad a_{k,k} = \frac{-a_{k-1,k-1}}{v_{i+p+k} - v_{i+k}}$$

dove le uguaglianze per $a_{k,0}$ e $a_{k,k}$ possono essere incluse nell'espressione per $a_{k,j}$, se si pone $a_{k-1,-1} = a_{k-1,k} = 0$.

- Dimostriamo l'uguaglianza di tali forme per i casi $k=1$ e $k=2$.

- Per $k=1$ la forma chiusa diventa:

$$N_{i,p}^{(1)} = \frac{p!}{(p-1)!} [a_{1,0} \cdot N_{i,p-1} + a_{1,1} \cdot N_{i+1,p-1}] = p \cdot [a_{1,0} N_{i,p-1} + a_{1,1} N_{i+1,p-1}]$$

Sostituendo ad $a_{1,0}$ e $a_{1,1}$ le espressioni della ad esse relative si ottiene l'espressione della forma ricorsiva per $k=1$.

- Per $k=2$, partiamo dalla formula ricorsiva:

$$\begin{aligned} N_{i,p}'' &= \frac{p}{v_{i+p} - v_i} N_{i,p-1}' - \frac{p}{v_{i+p+1} - v_{i+1}} N_{i+1,p-1}' \\ &= \frac{p}{v_{i+p} - v_i} \left[\frac{p-1}{v_{i+p-1} - v_i} N_{i,p-2} - \frac{p-1}{v_{i+p} - v_{i+1}} N_{i+1,p-2} \right] - \frac{p}{v_{i+p+1} - v_{i+1}} \left[\frac{p-1}{v_{i+p} - v_{i+1}} N_{i+1,p-2} - \frac{p-1}{v_{i+p+1} - v_{i+2}} N_{i+2,p-2} \right] \\ &= p(p-1) \left[\frac{a_{1,0}}{v_{i+p-1} - v_i} N_{i,p-2} + \frac{-a_{1,0} + a_{1,1}}{v_{i+p} - v_{i+1}} N_{i+1,p-2} + \frac{-a_{1,1}}{v_{i+p+1} - v_{i+2}} N_{i+2,p-2} \right] \end{aligned}$$

FUNZIONI B-SPLINE

- $\{u_j\}$ insieme di punti di break, $0 \leq j \leq k$
- L'insieme delle funzioni polinomiali di grado al più p e a tratti su $\{u_j\}$, che siano C^r continue in $u=u_j$, è uno spazio vettoriale ($-1 \leq r_j \leq p$)
- Denotato con V questo spazio vettoriale, abbiamo che $\dim V = k(p+1) - \sum_{j=0}^k (r_j + 1)$, dove la continuità C^{-1} consiste nella presenza di un salto.
- Abbiamo già visto che la regolarità r_j di $N_{i,p}$ in un nodo u_j e la molteplicità s_j del nodo stesso sono legate da $r_j + s_j = p$.
- Sia ora $m = \sum_{j=0}^k s_j - 1$. Si tratta del numero di intervalli in cui viene divisa la partizione dei nodi, eventualmente degeneri.
- Ci sono $m-p$ B-spline di grado p presenti nell'insieme dei nodi, ciascuna dotata di regolarità r_j in $u=u_j$.
- Poiché $k(p+1) - \sum_{j=0}^k (r_j + 1) = k(p+1) - \sum_{j=0}^k (p-s_j + 1) = k(p+1) + \sum_{j=0}^k (s_j - p - 1) = k(p+1) + \sum_{j=0}^k s_j - (k+1)(p+1) = \sum_{j=0}^k s_j - 1 - p = m-p$, anche la dimensione di V può essere espressa come $m-p$.
- Dimostriamo ora che le $N_{i,p}$ sono linearmente indipendenti e che dunque, in virtù del loro numero, formano una base per V .
 - Sia $n = m-p-1$. Verifichiamo che $\sum_{i=0}^n d_i \cdot N_{i,p}(u) = 0 \Rightarrow d_i = 0 \quad \forall i, \forall u$. Se tale c.l. è identicamente nulla, in particolare lo è la sua derivata $\sum_{i=0}^n d_i \cdot N'_{i,p}(u)$, dunque:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^n d_i \cdot N'_{i,p}(u) = \sum_{i=0}^n d_i \cdot \frac{N_{i,p-1}}{u_{i,p} - u_i} - \sum_{i=0}^n d_i \cdot \frac{N_{i+1,p-1}}{u_{i+1,p} - u_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \dots - \sum_{i=0}^{n-1} \dots \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d_i - d_{i-1}}{u_{i,p} - u_i} N_{i,p-1} \end{aligned}$$

Poiché $N_{i,p-1}(u) \geq 0$, $u_{i,p} - u_i \neq 0$, sarà necessariamente $d_i - d_{i-1} = 0$, da cui $d_0 = \dots = d_n$.

$$\text{Inoltre, } 0 = \sum_{i=0}^n d_i \cdot N_{i,p} = d_0 \cdot \sum_{i=0}^n N_{i,p} = d_0 \cdot 1 = d_0$$

Dunque $d_0 = \dots = d_n = 0$.

SCELTA DEL VETTORE DEI NODI

- La più utilizzata è quella detta non periodica o aperta, e prevede:

$$s_0 = s_m = p+1 \quad U = \{ \underbrace{a, a, \dots, a}_{(p+1) \text{ volte}}, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, b, \dots, b}_{(p+1) \text{ volte}} \}$$

$$s_1 = \dots = s_{k+1} = 1$$
- È interessante il caso degenere in cui $a=0, b=1, k=1$. In tal caso non ci sono nodi interni, e le B-spline coincidono con i polinomi di Bernstein, ovvero $N_{i,p}(u) = B_{i,n}(u)$.

CURVE B-SPLINE DI GRADO P

- Hanno la forma $C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i$, dove definiamo le B-spline su di una partizione aperta, secondo quanto affermato prima. ($a \leq u \leq b$)
- Proprietà:
 - $C(a) = P_0 ; C(b) = P_n$
 - invarianza per trasformazioni affini: discende dal fatto che le funzioni B-spline soddisfano la proprietà di partizione dell'unità. Vediamone la dimostrazione, osservando che vale anche per i casi precedenti in cui non avevamo provato la proprietà, sostituendo le $N_{i,p}$ con le funzioni di miscelamento utilizzate in tali casi:
 - Una trasformazione affine ha la forma $\phi(P) = AP + v$, con A matrice e v vettore.
 - $\phi\left(\sum_{i=0}^n P_i N_{i,p}\right) = A \cdot \sum_{i=0}^n P_i \cdot N_{i,p} + v = \sum_{i=0}^n N_{i,p} \cdot A \cdot P_i + \sum_{i=0}^n v \cdot N_{i,p}$
 $= \sum_{i=0}^n (A \cdot P_i + v) N_{i,p} = \sum_{i=0}^n \phi(P_i) \cdot N_{i,p}$
 - $C(u)$ sta nell'inviluppo convesso dei suoi punti di controllo, ovvero se $v \in [u_i, u_{i+1}]$, $p \leq i \leq m-p-1$, $C(u)$ sta nell'inviluppo convesso dei punti P_j con $j = i-p, i-p+1, \dots, i$
 - località: supponendo di spostare P_i in P'_i :

$$C(u) = \sum_{j=0}^{i-1} P_j \cdot N_{j,p}(u) + P_i \cdot N_{i,p}(u) + \sum_{j=i+1}^n P_j \cdot N_{j,p}(u)$$

$$C'(u) = \quad " \quad + P'_i \cdot N_{i,p}(u) + \quad "$$

 la curva cambia pertanto soltanto nei valori del parametro u per cui $N_{i,p}(u) > 0$, ovvero $u \in [u_i, u_{i+p+1}]$
 - variation diminishing
 - continua C^∞ nei punti interni, CP^∞ in un nodo di molteplicità s .
 - più basso è il grado, più vicina è la curva al suo poligono di controllo

DERIVATA DI UNA CURVA B-SPLINE

$$C(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,p}(u) \quad u \in [0,1]$$

Fissando u :

$$C'(u) = \sum_{i=0}^n P_i N'_{i,p}(u)$$

Si dimostra che:

$$\begin{aligned} C'(u) &= \sum_{i=0}^n P_i N'_{i,p}(u) = \sum_{i=0}^n P_i \left(\frac{P}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{P}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \right) \\ &= p \cdot \sum_{i=0}^n N_{i+p-1}(u) \cdot \varphi_i \end{aligned}$$

$$\text{dove } \varphi_i = p \cdot \frac{P_{i+1} - P_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}}$$

Se definiamo una partizione di nodi U' , identica a U , ma in cui i nodi 0 e 1 hanno molteplicità $p+1$ piuttosto che $p+2$, possiamo affermare che N_{i+p-1} su U è uguale a $N_{i,p-1}$ su U' .

$$\text{Allora } C'(u) = \sum_{i=0}^n \varphi_i \cdot N_{i,p-1}(u)$$

(vedere 2006)

SUPERFICI B-SPLINE TENSORE PRODOTTO

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{ij}$$

dove:

$$N_{i,p}(u) \quad U = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}}_{r+1} \quad (r+1) \text{ nodi}$$

$$N_{j,q}(v) \quad V = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1}}_{q+1} \quad (s+1) \text{ nodi}$$

$$r = n+p+1 \quad s = m+q+1$$

$\{P_{ij}\}_{\substack{i=0, \dots, n \\ j=0, \dots, m}}$ insieme dei punti di controllo (con topologia rettangolare), in numero di $(n+1) \times (m+1)$.

Per esempio se $p=3$ e $q=2$, le seguenti

In ogni insieme $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$, la $S(u, v)$ è una superficie polinomiale di grado p in u e q in v .

Per esempio, consideriamo una superficie con $p=3$, $q=2$, e:

$$U = \underbrace{\{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\}}_4 \quad S = 10 \quad m = s - q - 1 = 10 - 2 - 1 = 7$$

$$V = \underbrace{\{0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, 1, 1, 1, 1\}}_4 \quad r = 10 \quad m = r - p - 1 = 10 - 3 - 1 = 6$$

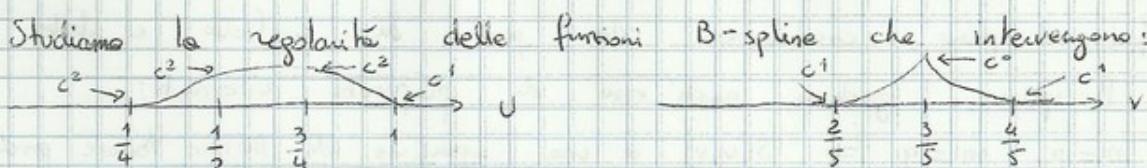
Sono:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^4 N_{i,3}(u) N_{j,2}(v) P_{ij}$$

Vediamo per esempio come risulta $N_{4,3}(u) \cdot N_{4,2}(v)$ ($i=4, j=4$).

$$\text{supp}(N_{4,3}(u)) = [u_4, u_5] = [\frac{1}{4}, 1]$$

$$\text{supp}(N_{4,2}(v)) = [v_4, v_5] = [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$$



la regolarità della superficie risultante di conseguenza.

In generale, $\text{supp}(N_{i,p}(U) \cdot N_{j,q}(V)) = [U_i, U_{i+p+1}] \times [V_j, V_{j+q+1}]$

Le funzioni di miscelamento $\{N_{i,p}(U) \cdot N_{j,q}(V)\}_{i=0,..,n}^{j=0,..,m}$ sono le funzioni di base dello spazio delle funzioni spline definite su $U \times V$, cioè in $[U_i, U_{i+1}] \times [V_j, V_{j+1}]$ la spline è un polinomio di grado coordinato, p in U e q in V .

Tali funzioni godono di alcune proprietà, fra le quali:

(i) non negatività: $N_{i,p}(U) \cdot N_{j,q}(V) \geq 0 \quad \forall i,j,p,q$

(ii) partizione dell'unità: $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p} N_{j,q} = 1 \cdot 1 = 1$

(iii) se $n=p$ e $m=q$, cioè:

$$U = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{p+1} \cup \underbrace{\{1, \dots, 1, 1\}}_{p+1} \quad V = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{q+1} \cup \underbrace{\{1, \dots, 1, 1\}}_{q+1}$$

allora $N_{i,p}(U) \cdot N_{j,q}(V) = B_i^{(p)}(U) \cdot B_j^{(q)}(V)$ polinomi di Bernstein

(iv) $N_{i,p}(U) \cdot N_{j,q}(V)$ ha supporto locale $[U_i, U_{i+p+1}] \times [V_j, V_{j+q+1}]$

(v) $J_n(U, V) \in [U_{i_0}, U_{i_0+1}] \times [V_{j_0}, V_{j_0+1}]$

ai più $(p+1)(q+1)$ funzioni di base sono diverse da zero; nella fattispecie, tutte quelle tali per cui

$$i_0 - p \leq i \leq i_0 \quad \text{e} \quad j_0 - q \leq j \leq j_0$$

(vi) all'interno dei rettangoli formati dalle rette definite dai nodi in U e V , dove la funzione base è un polinomio di grado p in U e q in V , tutte le derivate parziali di $N_{i,p}(U) \cdot N_{j,q}(V)$ esistono.

In un nodo u la funzione base è $p-k$ volte derivabile in u , se k è la molteplicità del nodo; in un nodo v la funzione base è $q-h$ volte derivabile in v , se h è la molteplicità del nodo.

Per esempio, se i nodi interni sono semplici, le funzioni base che non contengono 0 e 1 nel loro supporto, sono derivabili $p-1$ volte in U e $q-1$ volte in V .

le superfici B-spline, combinazioni dei punti di controllo e delle funzioni B-spline, godono anch'esse di proprietà rilevanti:

- (i) $n=p, m=q \Rightarrow S(u, v)$ è una superficie di Bézier tensore prodotto
- (ii) $S(0, 0) = P_{0,0}; S(1, 0) = P_{n,0}; S(0, 1) = P_{0,m}; S(1, 1) = P_{n,m}$
ovvero si ha interpolazione dei punti più esterni.

$$S(0, 0) = \sum_i \sum_j N_{i,p}(0) N_{j,q}(0) P_{ij} \quad N_{i,p}(0) = N_{0,p}(0) = 1$$

- (iii) sono invarianti per trasformazioni affini; ciò segue dal fatto che le funzioni di miscelamento formano una partizione dell'unità.
- (iv) vale la proprietà dell'inulupo convesso:

se $(u, v) \in [u_{i_0}, u_{i_0+1}] \times [v_{j_0}, v_{j_0+1}] \Rightarrow$

$S(u, v)$ sta nell'inulupo convesso dei punti di controllo P_{ij}

con $i_0-p \leq i \leq i_0$ e $j_0-q \leq j \leq j_0$

- (v) se si sposta un punto di controllo P_{ij} , allora si modifica solo la parte di superficie immagine del rettangolo nel dominio di parametri $[u_i, u_{i+p+1}] \times [v_j, v_{j+q+1}]$. Infatti, essendo $S(u, v) = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m P_{rs} N_{r,p}(u) N_{s,q}(v)$, e fissato $i < j$, cambiando $P_{ij} \rightarrow P'_{ij}$ cambia solo un termine che contiene come fattori $N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v)$, che dava si annullano non portano pertanto ad un cambiamento della superficie.

- (vi) la regolarità delle superfici B-spline discendono da quelle delle funzioni B-spline.

- (vii) le curve isoparametriche, che si ottengono fissando $u=u_0$, oppure $v=v_0$, sono curve B-spline, infatti:

• fissando $u=u_0$:

$$\begin{aligned} C_{u_0}(v) &= S(u_0, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u_0) \cdot N_{j,q}(v) \cdot P_{ij} \\ &= \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v) \cdot \left[\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u_0) \cdot P_{ij} \right] \\ &= \sum_{j=0}^m Q(u_0) \cdot N_{j,q}(v) \end{aligned}$$

• fissando $v=v_0$, si procede analogamente, ottenendo:

$$\begin{aligned} C_{v_0}(u) &= S(u, v_0) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v_0) \cdot P_{ij} \\ &= \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot \sum_{j=0}^m P_{ij} \cdot N_{j,q}(v_0) \\ &= \sum_{i=0}^n P(u_0) \cdot N_{i,p}(u) \end{aligned}$$

CURVE RAZIONALI NURBS

$$\cdot C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \cdot P_i \cdot N_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot N_{i,p}(u)} \quad a \leq u \leq b \quad (\text{si pu}\ddot{\text{o}} \quad 0 \leq u \leq 1)$$

con i soliti punti di controllo, pesi, partizione di nodi.

$$\cdot C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \cdot P_i \cdot N_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot N_{i,p}(u)} = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) \cdot P_i \quad \text{con } R_{i,p} = \frac{w_i \cdot N_{i,p}(u)}{\sum_{j=0}^n w_j \cdot N_{j,p}(u)}$$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI DI MISCELENAMENTO

- (i) $R_{i,p}(u) \geq 0$ (positività)
- (ii) $\sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) = 1$ (partizione dell'unità)
Si verificano immediatamente dalla definizione di $R_{i,p}$.
- (iii) $R_{0,p}(0) = R_{n,p}(1) = 1$ poiché $N_{1,p}(0) = \dots = N_{n,p}(0) = N_{0,p}(1) = \dots = N_{n-p,p}(1) = 0$
- (iv) $R_{i,p}(u)$ è diversa da zero in $[u_i, u_{i+p+1}]$, al più.
- (iv') se $u \in [u_i, u_{i+1}]$, solo $p+1$ funzioni base sono diverse da zero.
- (v) $w_i = 1 \quad \forall i \Rightarrow R_{i,p} \equiv N_{i,p}$: la curva è una B-spline
- (vi) regolarità: ∞ nei punti interni, $p-k$ in un nodo di molteplicità k .

PROPRIETÀ DELLE CURVE RAZIONALI NURBS (supponendo di essere in $[0,1]$)

- (i) $C(0) = P_0 ; C(1) = P_n$ (passaggio per i punti di controllo estremi)
- (ii) invarianza per trasformazioni affini (solita dimostrazione)
- (ii') " proiettive"
- (iii) $u \in [u_i, u_{i+1}] \Rightarrow C(u)$ cade nell'inviluppo convesso di P_{i-p}, \dots, P_i .
- (iv) regolarità: ereditata dalle funzioni di miscelenamento
- (v) variation diminishing:
- (vi) se ci sono solo i nodi 0 e 1, è una curva razionale di Bezier.
- (vi') nelle ipotesi di (vi) e se $w_i = 1 \quad \forall i$, si ottiene una curva di Bezier.
- (vii) località: spostando un punto di controllo, la curva cambia solo localmente; muovendo P_i infatti lo spostamento è proporzionale a $R_{i,p}$, diverso da zero solo localmente.
- anche ^{cambiando} ~~superficie~~ un peso la curva cambia solo lì, infatti la formula è analoga al caso già visto delle curve di Bezier razionali, con $R_{i,p}$ al posto di $B_{i,n}$.

$$\tilde{C}(u) = C(u) \cdot (1-\alpha) + P_i \cdot \alpha \quad \begin{aligned} &\text{se si modifica il peso } w_i \\ \text{dove } \alpha &= \frac{s w_i \cdot N_{i,p}}{\sum_{k=0}^n w_k \cdot N_{k,p} + s w_i \cdot N_{i,p}} \end{aligned}$$

La dimostrazione è analoga a quella del caso citato prima.

- È possibile passare al proiettivo con le coordinate w dei pesi in maniera simile alla solita.

DERIVATE DI UNA CURVA B-SPLINE

$$\cdot C^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^{n-k} N_{i,p-k}(u) \cdot P_i^{(k)}, \text{ con } P_i^{(k)} = \begin{cases} P_i & k=0 \\ \frac{P_{i+1}^{(k-1)} - P_i^{(k-1)}}{U_{i+p+1} - U_{i+k+1}} & k>0 \end{cases}$$

e $U^{(k)} = U$ meno k volte i nodi agli estremi

Può essere interessante calcolare $C^{(2)}(0)$ e $C^{(2)}(1)$, agli estremi.

DERIVATE DI UNA SUPERFICIE B-SPLINE

- Con la solita notazione:

$$S_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} S(u, v) = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u} \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_{ij} \right) := \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u} c_j(u) \right)$$

e si applica poi la formula di derivazione di una curva B-spline.

Analogamente per $S_v(u, v)$ e per tutte le derivate successive; in generale:

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial^k u \partial^l v} S(u, v) = \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^{m-l} N_{i,p-k}(u) \cdot N_{j,q-l}(v) \cdot P_{i,j}^{(k,l)}$$

con $P_{i,j}^{(k,l)} = (q-l+1) \cdot \frac{P_{i,j+1}^{(k,l-1)} - P_{i,j}^{(k,l-1)}}{V_{j+q+i} - V_{j+l}} = (p-k+1) \cdot \frac{P_{i+1,j}^{(k-1,l)} - P_{i,j}^{(k-1,l)}}{U_{i+p+1} - U_{i+k}}$

Da notare le derivate prime e la seconda mista in $(0,0)$,

in relazione anche alle curve isoparametriche e le loro derivate in 0 .

DERIVATE DI UNA CURVA NURBS

- Facendo riferimento alla usuale notazione per $C(u)$, U , $C^w(u)$, denotiamo $A(u) := \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot w_i \cdot P_i$ e $w(u) := \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot w_i$. $A(u)$ rappresenta le prime tre coordinate di $C^w(u)$, $w(u)$ la quarta, e sarà pertanto $C(u) = A(u) / w(u)$.

- Derivando una volta:

$$C'(u) = \frac{w(u) \cdot A'(u) - w'(u) \cdot A(u)}{[w(u)]^2} = \frac{w(u) \cdot A'(u) - w'(u) \cdot w(u) \cdot C(u)}{[w(u)]^2} = \frac{A'(u) - w'(u) \cdot C(u)}{w(u)}$$

e in generale, omettendo per semplicità dalla notazione la dipendenza dal parametro della curva u :

$$A^{(k)} = (w \cdot C)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} w^{(i)} C^{(k-i)} = w \cdot C^{(k)} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^{(i)} C^{(k-i)}$$

da cui $C^{(k)} = \frac{1}{w} - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^{(i)} C^{(k-i)}$

- Osservare che il calcolo di $C'(0)$ e $C'(1)$ porta a verificare la tangenza della curva al poligono di controllo negli estremi.

SUPERFICI NURBS

- Sempre con il significato utilizzato in precedenza per P_{ij} , w_{ij} , $N_{i,p}(u)$, $N_{j,q}(v)$:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{ij}} \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) P_{ij} \quad \text{con} \quad R_{i,j}(u, v) = \frac{N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{ij}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{kl}}$$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI $R_{i,j}$

- (i) non negatività: $R_{i,j}(u, v) \geq 0$
- (ii) partizione dell'unità: $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) = 1$
- (iii) supporto locale: $R_{i,j}(u, v) = 0$ se $(u, v) \notin [u_i, u_{i+p+1}] \times [v_j, v_{j+q+1}]$
- (iv) in ogni rettangolino al più $(p+1)(q+1)$ funzioni sono non nulle
- (v) per $p > 0, q > 0$, $R_{i,j}(u, v)$ ha un solo massimo
- (vi) $R_{0,0}(0,0) = R_{n,0}(1,0) = R_{0,m}(0,1) = R_{n,m}(1,1) = 1$
- (vii) derivabilità di $p-k$ [$q-k$] in un nodo di molteplicità k .
- (viii) se $w_{ij} = a \neq 0$, $R_{i,j}(u, v) = N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v)$

Tutte queste proprietà valgono nel caso delle funzioni di miscelamento delle superfici B-spline, dove $w_{ij} = 1 \forall (i, j)$

PROPRIETÀ DELLE SUPERFICI NURBS

- (i) interpolazione dei quattro punti di angolo
- (ii) invarianza per trasformazioni affini
- (iii) involucro convesso, se i pesi sono positivi.
 $(u, v) \in [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}] \Rightarrow P_{ij} : i_0 - p \leq i \leq i_0, j_0 - q \leq j \leq j_0$
- (iv) una modifica di un punto o del relativo peso cambia la superficie soltanto in $(u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1}]$
- (v) la derivabilità discende da quella delle funzioni
- (vi) le superfici B-spline e quelle di Bézier, anche razionali, sono casi particolari di superfici NURBS.

Ancona, tutte le proprietà valgono per le superfici B-spline.

SPOSTAMENTO DI UN PUNTO DI CONTROLLO O MODIFICA DI UN PESO

- Se a cambiare è w_{ij} e $(u, v) \in [u_i, u_{i+p+1}] \times [v_j, v_{j+q+1}]$, allora $S(u, v)$ si arriccia se w_{ij} aumenta, si allontana altrimenti, a/de P_{ij} . Lo spostamento avviene su una retta, per valori distinti di w_{ij} il punto si muove sulla linea individuata da P_{22} e da $S(u, v)$ per un qualsiasi valore del peso w_{ij} .

RAPPRESENTAZIONE IN COORDINATE ORTOGENEE

- Al solito, introducendo le coordinate w dei pesi e operando usualmente si può ricordare una superficie NURBS ad una B-spline.
- In particolare, possiamo ottenere due curve isoparametriche:

$$\begin{aligned} C_{u_0}^w(v) &= S^w(u_0, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u_0) \cdot N_{j,q}(v) \cdot P_{ij}^w \\ &= \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v) \cdot \left(\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u_0) \cdot P_{ij}^w \right) = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v) \cdot Q_j^w(u_0) \\ C_{v_0}^w(u) &= S^w(u, v_0) = \dots = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot Q_i^w(v_0) \end{aligned}$$

Poiché:

$$C_{u_0}(v) = H\{C_{u_0}^w(v)\} = H\{S^w(u_0, v)\} = S(u_0, v)$$

$$C_{v_0}(u) = H\{C_{v_0}^w(u)\} = H\{S^w(u, v_0)\} = S(u, v_0)$$

Sarà che $S^w(u_0, v_0)$ è l'intersezione di $C_{u_0}^w(v)$ e $C_{v_0}^w(u)$

DERIVATE DI UNA SUPERFICIE NURBS

- Denotando $S(u, v) = A(u, v) / w(u, v)$, con i soliti numeratore e denominatore:

$$S_d(u, v) = \frac{A_d(u, v) - w_d(u, v) \cdot S(u, v)}{w(u, v)} \quad \text{con } d = u, \text{ o } d = v.$$

- In generale, omettendo la dipendenza da u e da v :

$$\begin{aligned} A^{(k,l)} &= [(ws)^k]^l = \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} w^{(i,0)} s^{(k-i,0)} \right)^l = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} w^{(i,j)} s^{(k-i, l-j)} \\ &= w^{(0,0)} \cdot S^{(k,l)} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^{(i,0)} S^{(k-i,l)} + \sum_{j=1}^l \binom{l}{j} w^{(0,j)} S^{(k, l-j)} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \binom{k}{i} \binom{l}{j} w^{(i,j)} S^{(k-i, l-j)} \end{aligned}$$

da cui si ricava $S^{(k,l)}$.

- Degni di nota peculiari i casi di derivata prima (in particolare in $(0,0)$), e seconda.

OSSERVAZIONI SULLA REGOLARITÀ

- Le osservazioni effettuate di volta in volta valgono nel caso in cui i punti di controllo siano, diciamo, in posizione generale, ovvero distinti e non in posizione particolare, per esempio tre consecutivi allineati ed equispaziati.
- Se i punti non sono in posizione generale, si può avere una regolarità differente da quella che ci si aspetta. In particolare:
 - ponendo un punto di controllo come multiplo, la regolarità potrà essere generalmente più bassa;
 - ponendo i punti in posizione particolare, potranno verificarsi dei casi in cui la regolarità è più alta.

INSERIMENTO DI UN NODO

- Consideriamo una curva NURBS, definita sulla solita partizione di nodi:

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i^w \quad U = \{u_0, \dots, u_m\}$$
 Le $\{N_{i,p}\}_{i=0}^n$ sono le funzioni base dello spazio spline J_u su U .
- Dato $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1}]$, definiamo la partizione di nodi:

$$\bar{U} = \{\bar{u}_i = u_i \quad i=0:k; \quad \bar{u}_{k+1} = \bar{u}; \quad \bar{u}_i = u_{i-1} \quad i=k+2:m+1\}$$
 su cui si può definire lo spazio spline $J_{\bar{u}}$ ($\geq J_u$), di dim $n+2$.
- Se $\{\bar{N}_{i,p}\}_{i=0}^{n+1}$ sono la base di B-spline per $J_{\bar{u}}$, allora $C^w(u) = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{N}_{i,p}(u) \cdot Q_i^w$
- Come si determinano i punti Q_i^w in maniera tale per cui:

$$\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i^w = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{N}_{i,p}(u) \cdot Q_i^w \quad \text{④ sia verificata?}$$
- Se $u \in [u_k, u_{k+1}]$, per la località delle B-spline si avrà:

$$\sum_{i=k-p}^k N_{i,p}(u) \cdot P_i^w = \sum_{i=k-p}^{k+1} \bar{N}_{i,p}(u) \cdot Q_i^w \quad \text{④ essendo le altre nulle}$$
- Diverse delle funzioni di miscelamento coincidono, per l'esattezza:
 - $N_{i,p}(u) = \bar{N}_{i,p}(u) \quad i=0:k-p-1 \quad \text{④}$
 - $N_{i,p}(u) = \bar{N}_{i+p,p}(u) \quad i=k+1:n \quad \text{④ ④}$
- Anche diversi punti coincidono, infatti:
 - $\sum_{i=0}^{k-p-1} N_{i,p}(u) \cdot P_i^w + \sum_{i=k+1}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i^w = \sum_{i=0}^{k-p-1} \bar{N}_{i,p}(u) \cdot Q_i^w + \sum_{i=k+2}^{n+1} \bar{N}_{i,p}(u) \cdot Q_i^w$
e da ④, ④ ④:
 - $\sum_{i=0}^{k-p-1} N_{i,p}(u) \cdot (P_i^w - Q_i^w) + \sum_{i=k+1}^n N_{i,p}(u) \cdot (P_i^w - Q_{i+1}^w) = 0$
Poiché le $N_{i,p}(u)$ sono linearmente indipendenti, si ottiene:
 - $Q_i^w = P_i^w \quad i=0:k-p-1 \quad \text{④}$
 - $Q_{i+1}^w = P_i^w \quad i=k+1:n \quad \text{④ ④}$

• Resta da determinare cosa succede per $i = k-p : k+1$

• Per tali valori, è possibile esprimere le $N_{i,p}$ in funzione delle $\bar{N}_{i,p}$:

$$N_{i,p}(u) = \frac{\bar{u} - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+p+1} - \bar{u}_i} \bar{N}_{i,p}(u) + \frac{\bar{u}_{i+p+2} - \bar{u}}{\bar{u}_{i+p+2} - \bar{u}_{i+1}} \bar{N}_{i+1,p}(u) \quad \textcircled{D}$$

• Da \textcircled{D} e $\textcircled{*}$:

$$\sum_{i=0}^p \left(\frac{\bar{u} - \bar{u}_{k-p+i}}{\bar{u}_{k+i+1} - \bar{u}_{k-p+i}} \bar{N}_{k-p+i} + \frac{\bar{u}_{k+2+i} - \bar{u}}{\bar{u}_{k+2+i} - \bar{u}_{k-p+i}} \bar{N}_{k-p+i+1} \right) P_{k-p+i}^w = \sum_{i=0}^{p+1} \bar{N}_{k-p+i} Q_{k-p+i}^w$$

• Si può riscrivere:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{k-p} \cdot \left[Q_{k-p}^w - P_{k-p}^w \cdot \frac{\bar{u} - \bar{u}_{k-p}}{\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_{k-p}} \right] + \sum_{i=0}^{p-1} \left[\bar{N}_{k-p+i+1} \cdot \left[Q_{k-p+i+1}^w - P_{k-p+i}^w \cdot \frac{\bar{u}_{k+2+i} - \bar{u}}{\bar{u}_{k+2+i} - \bar{u}_{k-p+i}} \right] \right. \\ \left. - P_{k-p+i+1}^w \cdot \frac{\bar{u} - \bar{u}_{k-p+i+1}}{\bar{u}_{k+2+i} - \bar{u}_{k-p+i+1}} \right] + \bar{N}_{k+1} \cdot \left[Q_{k+1}^w - P_k^w \cdot \frac{\bar{u}_{k+p+2} - \bar{u}}{\bar{u}_{k+p+2} - \bar{u}_{k+1}} \right] = 0 \end{aligned}$$

• Sostituendo dove possibile con i nodi della partizione iniziale, ed osservando che la prima e l'ultima frazione valgono 1 poiché $\bar{u} = \bar{u}_{k+1}$:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{k-p} \cdot \left[Q_{k-p}^w - P_{k-p}^w \right] + \sum_{i=0}^{p-1} \bar{N}_{k-p+i+1} \left[Q_{k-p+i+1}^w - P_{k-p+i}^w \cdot \frac{\bar{u}_{k+1} - \bar{u}}{\bar{u}_{k+2+i} - \bar{u}_{k-p+i}} - P_{k-p+i+1}^w \cdot \frac{\bar{u} - \bar{u}_{k-p+i+1}}{\bar{u}_{k+2+i} - \bar{u}_{k-p+i+1}} \right] \\ + \bar{N}_{k+1} \cdot \left[Q_{k+1}^w - P_k^w \right] = 0 \end{aligned}$$

Si noti che se l'indice di \bar{u} è $\geq k+2$, quello rispettivo di \hat{u} è di uno più basso, mentre se è $\leq k$, è lo stesso.

• Per $j = k-p+1 : k$, poniamo $d_j = \frac{\bar{u} - u_j}{u_{j+p} - u_j}$, ovvero $1-d_j = \frac{u_{j+p} - \bar{u}}{u_{j+p} - u_j}$

• Per la lineare indipendenza delle B-spline:

$$Q_{k-p}^w - P_{k-p}^w = 0 \rightarrow Q_{k-p}^w = P_{k-p}^w$$

$$Q_{k+1}^w - P_k^w = 0 \rightarrow Q_{k+1}^w = P_k^w$$

• mentre per $j = k-p+1 : k$

$$Q_j^w = d_j \cdot P_j^w + (1-d_j) \cdot P_{j-1}^w$$

• Ricapitolando:

$$i = 0 : k-p \quad Q_i^w = P_i^w$$

$$i = k-p+1 : k \quad Q_i^w = d_i \cdot P_i^w + (1-d_i) \cdot P_{i-1}^w$$

$$i = k+1 : n+1 \quad Q_i^w = P_{i-1}^w$$

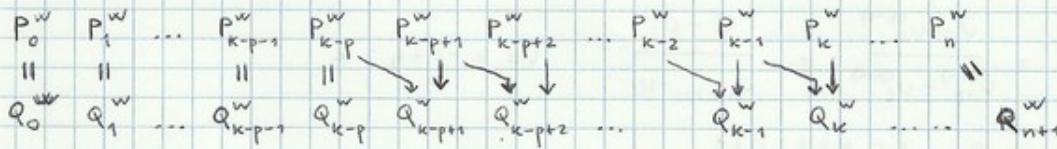
• Ponendo $d_i = 1$ per $i = 0 : k-p$ e $d_i = 0$ per $i = k+1 : n+1$,

si può compattare il tutto nell'unica scrittura:

$$Q_i^w = d_i P_i^w + (1-d_i) P_{i-1}^w$$

PUNTI CHE CAMBIANO

- I risultati ottenuti possono essere schematizzati per enfatizzare quali punti di controllo restano dopo l'inserimento del nodo e quali no:



- L'aggiunta di nuovi nodi permette di compiere un'operazione di "taglio degli angoli" del poligono di controllo.

- Vediamo ora alcuni casi notevoli.

- Se si inserisce un nodo già presente, con una molteplicità $s \leq p-1$:

- posto \bar{U} il nuovo nodo, sarà $\bar{U} = U_k = U_{k-1} = \dots = U_{k-s+1}$, con tutti questi nodi diversi da U_{k-s} e da U_{k+1} .
- valendo come prima $Q_i^w = d_i P_i^w + (1-d_i) P_{i+1}^w$, è possibile rendere immediati degli altri d_j , infatti:

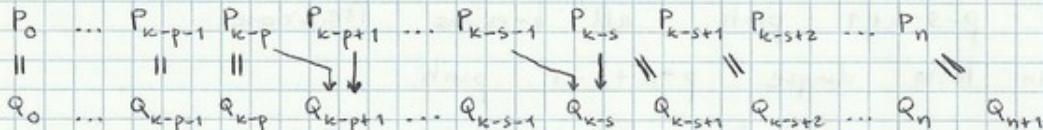
$$d_j = \frac{\bar{U} - U_j}{U_{j+p} - U_j} = 0 \quad \text{per } j = k-s+1 : k$$

$Q_j = d_j \cdot P_j + (1-d_j) \cdot P_{j+1} = P_{j+1}$ per gli stessi valori di j , e omettendo per semplicità di notazione il w ad intendere che il punto è da considerarsi pesato.

- In questo modo si può scrivere:

- $d_i = 1 \quad i = 0 : k-p$
- $d_i = \frac{\bar{U} - U_i}{U_{i+p} - U_i} \quad i = k-p+1 : k-s \quad [\text{invece di } i = k-p+1 : k]$
- $d_i = 0 \quad i = k-s+1 : n+1 \quad [\text{invece di } i = k+s : n+1]$

- e in termini schematici:



- Torniamo ora un attimo all'inserimento generico e cambiamo la notazione, per preparare i calcoli relativi ad un inserimento multiplo:

$$\cdot P_{i,0} := P_i \quad \cdot d_{i,1} := d_i \quad \cdot Q_{i,1} := Q_i$$

$$\cdot Q_{i,1} = d_{i,1} \cdot Q_{i,0} + (1-d_{i,1}) \cdot Q_{i+1,0}$$

- Inserendo di nuovo lo stesso nodo:

$$\cdot Q_{i,2} = d_{i,2} \cdot Q_{i,1} + (1-d_{i,2}) \cdot Q_{i-1,1}$$

$$\cdot d_{i,2} = 1 \quad i = 0 : k-p+1 ; \quad d_{i,2} = \frac{\bar{U} - \bar{U}_i}{\bar{U}_{i+p} - \bar{U}_i} = \frac{\bar{U} - U_i}{U_{i+p} - U_i} \quad i = k-p+2 : k ;$$

$$d_{i,2} = 0 \quad i = k+1 : n+1$$

dove si ha k come estremo destro in quanto $k+1-1$, dove il $k+1$ è poiché $\bar{U} \in (\bar{U}_{k+1}, \bar{U}_{k+2})$, e -1 è per la molteplicità già presente.

• In generale:

$$\cdot Q_{i,h} = d_{i,h} \cdot Q_{i,h-1} + (1-d_{i,h}) \cdot Q_{i-1,h-1}$$

$$\cdot d_{i,h} = 1 \quad i=0 : k-p+h-1$$

$$\cdot d_{i,h} = \frac{\bar{U} - U_i^{(h-1)}}{U_{i+p}^{(m)} - U_i^{(h-1)}} = \frac{\bar{U} - U_i}{U_{i+p+h-1} - U_i} \quad i=k-p+h : k$$

$$\cdot d_{i,h} = 0 \quad i=k+1 : n+1$$

k è ancora l'estremo destro in quanto $k+(h-1) - (h-1)$,

$k+(h-1)$ poiché $\bar{U} \in [U_k, U_{k+h-1}^{(h-1)}, U_{k+h}^{(h-1)}]$, e $-(h-1)$ per la molteplicità.

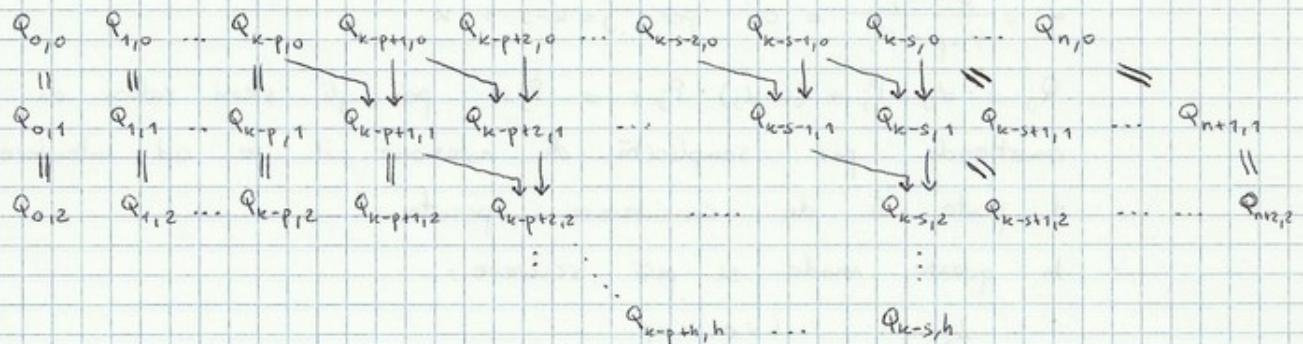
• Inserendo in maniera multipla un nodo già presente, invece:

$$\cdot \text{abbiamo visto che } U_{k-s+1} = \dots = U_k; \text{ in generale } U_{k-s+1}^{(d)} = \dots = U_{k+d}^{(d)}$$

$$\cdot Q_{i,h} = d_{i,h} \cdot Q_{i,h-1} + (1-d_{i,h}) \cdot Q_{i-1,h-1}, \text{ come prima}$$

• anche $d_{i,h}$ assume le stesse forme, ma per valori di i diversi:
l'estremo destro è $k-s$ e non k .

• In termini schematici:



• si andranno a sostituire i $p-s-1$ punti da P_{k-p+1} a P_{k-s-1}

• si aggiungono invece:

• 2 punti per ognuna delle prime $h-1$ iterazioni;

• $p-s-h+1$ punti all' h -esima iterazione

• in tutto dunque $p-s+h-1$ punti.

• nel caso particolare in cui $s=0$, $r=p$, ovvero \bar{U} non è presente in U e viene inserito p volte, la tabella assume una forma triangolare.

• Gli algoritmi possono essere estesi alle superfici applicando quanto visto alle righe e colonne dei punti di controllo.

• Se \bar{U} è inserito in U , lo si inserisce nelle $(m+1)$ colonne, e l'insieme dei punti di controllo diventa $\{Q_{ij}\}_{i=0}^{n+1},_{j=0}^m$

• Se \bar{V} è inserito in V , lo si inserisce nelle $(n+1)$ righe, e l'insieme dei punti di controllo diventa $\{Q_{ij}\}_{i=0}^n,_{j=0}^{m+1}$