POWELL – I

(1.1) · Parametri di un' approssimazione

· (i) una funzione, o dati, o più in generale un elemento f;

· (ii) un insieme $\mathcal{A}$ di approssimazioni;

· (iii) un metodo per scegliere una approssimazione da $\mathcal{A}$.

(1.2) · Approssimazione in uno spazio metrico

· Se esso contiene f ed $\mathcal{A}$, $a_0 \in \mathcal{A}$ è migliore di $a_1 \in \mathcal{A}$ se $d(a_0, f) < d(a_1, f)$. $a^* \in \mathcal{A}$ è la migliore se $d(a^*, f) \leq d(a, f)$ $\forall a \in \mathcal{A}$.

· (Th 1.1) Se $\mathcal{A}$ è compatto in uno spazio metrico $\mathcal{B}$, allora, $\forall f \in \mathcal{B}$, $\exists a^* \in \mathcal{A}$ migliore approssimazione.

Dim 1.1 Definiamo $d^* := \inf_{a \in \mathcal{A}} d(a, f)$

· Se $\exists a^* \in \mathcal{A}$ che la verifica, siamo a posto.

· Altrimenti, $\exists a_i \,/\, \lim_{i \to \infty} d(a_i, f) = d^*$

– Per l'ipotesi di compattezza, $\exists a^+ \in \mathcal{A} \,/\, \lim_{i \to \infty} a_i = a^+$

– $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \,/\, d(a_k, f) < d^* + \frac{1}{2}\varepsilon$ $\quad d(a_k, a^+) < \frac{1}{2}\varepsilon$

– $d(a^+, f) \leq d(a^+, a_k) + d(a_k, f) < d^* + \varepsilon$ (dis. triangolare)

– $d(a^+, f) \leq d^* \Rightarrow a^+$ è migliore (arbitrarietà di ε)

· Se $\mathcal{A}$ non è compatto, la migliore appr. potrebbe non esistere.

(1.3) · Approssimazione in uno spazio lineare normato

· La norma viene definita in maniera tale che $d(x, y) = \|x - y\|$ sia accettabile come distanza.

· (Th 1.2) Se $\mathcal{A}$ è uno spazio lineare finito dimensionale in uno spazio lineare normato $\mathcal{B}$, allora, $\forall f \in \mathcal{B}$, $\exists a_0^* \in \mathcal{A}$ migliore approssimazione di f in $\mathcal{A}$.

Dim 1.2 Sia $\mathcal{A}_0 : \{a \in \mathcal{A} \,/\, \|a\| \leq 2 \cdot \|f\|\}$

· È compatto, in quanto chiuso e limitato

· È non vuoto: contiene lo zero

· Per Th 1.1, $\exists a_0^*$ da $\mathcal{A}_0$ a f; $\|a - f\| \geq \|a_0^* - f\|$ $a \in \mathcal{A}_0$

· Se invece $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$, abbiamo la limitazione:

$$\|a - f\| \geq \|a\| - \|f\| > \|f\| \geq \|a_0^* - f\|$$

dove si sfrutta il fatto che $0 \in \mathcal{A}_0$.

Dunque $\|a - f\| \geq \|a_0^* - f\|$ $\forall a \in \mathcal{A}$, e a_0^* è migliore.

(1.4) • Norme L^p

- Norme 1, 2, infinito funzionali e vettoriali
- (Th 1.3) Per ogni $e \in C[a,b]$, valgono le disuguaglianze:

$$\|e\|_1 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \cdot \|e\|_2 \leq (b-a) \cdot \|e\|_\infty$$

Dim 1.3 : $\|e\|_1 = \int_a^b |e(x)|\, dx = \int_a^b |e(x)| \cdot |1|\, dx$ per definizione n. 1

$\leq \left[\int_a^b |e(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_a^b 1\, dx\right]^{\frac{1}{2}}$ per Cauchy - Schwarz

$= \|e\|_2 \cdot (b-a)^{\frac{1}{2}}$ per definizione n. 2

$\|e\|_2 = \left[\int_a^b |e(x)|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}$ per definizione norma inf.

$\leq \left[\int_a^b \|e\|_\infty^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}$ $\quad |e(x)|^2 \leq \|e\|_\infty^2 \quad \forall x$

$= (b-a)^{\frac{1}{2}} \cdot \|e\|_\infty$

(1.5) • Significato geometrico

- $B_p(f,r) := \{g \in B \;/\; \|g-f\|_p \leq r\}$
- $\exists\, r^* \;/\; r > r^* \Rightarrow \mathcal{A} \cap B_p(f,r) \neq \emptyset$

  $r < r^* \Rightarrow$ " $= \emptyset$
- Se $\mathcal{A}$ è lineare e finito - dimensionale:

  $\exists\, a^* \;/\; r^* = \inf_{a \in \mathcal{A}} \|f-a\| = \|f-a^*\|$

POWELL - II

(2.1) · Condizioni di convessità

· Se $\mathcal{A}$ è uno spazio lineare, la migliore in norma 2 è unica.

· Per le norme 1 e infinito, si richiedono condizioni più forti su $\mathcal{A}$.

· Sia $\mathcal{S}$ un insieme di uno spazio lineare. Si parla di:

· convessità, se $\forall s_0, s_1 \in \mathcal{S}$, $\theta s_0 + (1-\theta) s_1 \in \mathcal{S}$ $\forall$ $0 < \theta < 1$

· convessità stretta, se ", $s_0 \neq s_1$, " $\in \operatorname{int} \mathcal{S}$, "

· (Th 2.1) Sia $\mathcal{B}$ uno spazio lineare normato. Allora:
$\forall f \in \mathcal{B}$, $\forall r > 0$, $\forall p$, $B_p(f, r)$ è convesso.

Dim 2.1 Siano $x_0, x_1 \in B_p(f,r)$. Per gli assiomi di norma:

$$\begin{aligned}
\| \theta x_0 + (1-\theta) x_1 - f \| &\leq \| \theta x_0 - \theta f \| + \| (1-\theta) x_1 - (1-\theta) f \| \\
&= |\theta| \cdot \|x_0 - f\| + |1-\theta| \cdot \|x_1 - f\| \\
&\leq |\theta| \cdot r + |1-\theta| \cdot r \\
&= r \cdot \{ |\theta| + |1-\theta| \} \\
&= r, \quad 0 < \theta < 1
\end{aligned}$$

$-f = -\theta f - (1-\theta) f$

dunque ogni punto intermedio dista da f al più r.

· (Th 2.2) Sia $\mathcal{A}$ un insieme convesso in uno spazio lineare normato $\mathcal{B}$, e sia f un punto di $\mathcal{B}$ che ammetta migliore approssimazione in $\mathcal{A}$. Allora l'insieme delle migliori approssimazioni è convesso.

Dim 2.2 Sia h^* l'errore della migliore: $h^* = \min_{a \in \mathcal{A}} \|a - f\|$
L'insieme delle migliori approssimazioni è l'intersezione di $\mathcal{A}$ e di $B_p(f, h^*)$. Poiché l'intersezione di due insiemi convessi è ancora convessa, il risultato segue.

· Una norma p si dice strettamente convessa se lo è $B_p(0,1)$ (o equivalentemente $B_p(f,r)$ $\forall f, r$)

(2.2) · (Th 2.3) Sia $\mathcal{A}$ un insieme compatto e strettamente convesso in uno spazio lineare $\mathcal{B}$. Allora, $\forall f \in \mathcal{B}$, $\exists!$ migliore da $\mathcal{A}$.

Dim 2.3 Appurato che la migliore esiste, proviamone l'unicità.
Sia $h^* = \min_{a \in \mathcal{A}} \|a - f\|$, s_0, s_1 migliori approssimazioni da $\mathcal{A}$ in f.
Si ha $\| \frac{1}{2}(s_0 + s_1) - f \| \leq \frac{1}{2} \|s_0 - f\| + \frac{1}{2} \|s_1 - f\|$ per la dis. triangolare,

e dalla convessità di $\mathcal{A}$ segue che pure $\frac{1}{2}(s_0+s_1)$ è approssimazione migliore, che soddisfa pertanto $\| \frac{1}{2}(s_0+s_1) - f \| = h^*$

Ora, poiché $\mathcal{A}$ è compatto, $\exists\ \lambda$ massimo tale per cui $s(\lambda) = \frac{1}{2}(s_0+s_1) + \lambda \cdot [f - \frac{1}{2}(s_0+s_1)] \in \mathcal{A}$

Dalle precedenti risulta $\|s(\lambda) - f\| = (1-\lambda)\, h^*$, ma:

- $h^* > 0$, altrimenti $s_0 = f = s_1$
- $\lambda > 0$, poiché $s_0 \neq s_1$ e per la conv. stretta $\frac{1}{2}(s_0+s_1) \in \text{int}\,\mathcal{A}$.

Dunque $\|s(\lambda) - f\| < h^*$, contraddicendo l'ipotesi di minimalità.

- (Th. 2.4) Sia $\mathcal{A}$ un insieme convesso in uno spazio lineare normato $\mathcal{B}$ di norma strettamente convessa. Allora, $\forall f \in \mathcal{B}$, esiste ~~almeno~~ al più una migliore approssimazione da $\mathcal{A}$ in f.

Dim. 2.4 Siano s_0, s_1 differenti migliori approssimazioni. $B_p(f, h^*)$ è strettamente convesso per ipotesi, dunque $\frac{1}{2}(s_0+s_1)$ è interno. Ne segue che $\|\frac{1}{2}(s_0+s_1) - f\| < h^*$, assurdo poiché contraddice ancora una volta la minimalità.

(2.3) • Continuità degli operatori di migliore approssimazione

- (Th. 2.5) Sia $\mathcal{A}$ un compatto in uno spazio metrico $\mathcal{B}$, tale per cui $\forall f \in \mathcal{B}\ \exists!\ X(f) \in \mathcal{A}$ migliore approx. Allora l'operatore X, definito dalla condizione di migliore approx., è continuo.

Dim 2.5 Neghiamo la tesi. Esiste $\{f_i\}$ in $\mathcal{B} \longrightarrow f$, tale che $\{X(f_i)\}$ in $A \not\longrightarrow X(f)$. Per compattezza $\{X(f_i)\} \longrightarrow a^*, \neq X(f)$. Proviamo che risulterebbero a^* e $X(f)$ migliori approx., assurdo.

Si ha
$$d(a^*, f) \leq d(a^*, X(f_i)) + d(X(f_i), f_i) + d(f_i, f)$$
$$\leq d(a^*, X(f_i)) + d(X(f), f) + 2 \cdot d(f_i, f)$$

Ora, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ i \ /\ d(a^*, X(f_i)) \leq \frac{1}{3}\varepsilon\ ;\ d(f_i, f) \leq \frac{1}{3}\varepsilon$

Ne segue che $d(a^*, f) \leq d(X(f), f) + \varepsilon$, e per l'arbitrarietà di ε pure a^* è migliore approssimazione, assurdo.

- (Th 2.6) Sia $\mathcal{A}$ lineare finito dimensionale incluso in $\mathcal{B}$ normato, in modo tale che $\forall f \in \mathcal{B}\quad \exists!\ X(f) \in \mathcal{A}$ migliore, allora X definito dalla condizione di migliore approssimazione, è continuo.

POWELL – II (2)

(2.4) · Norme 1, 2, infinito.

· La norma 2 è strettamente convessa in $C[a,b]$ e $\mathbb{R}^n$ (Th. 2.7)

<u>Dim 2.7</u> Siano $f \neq g$, $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$. Proviamo che:

$\|\theta f + (1-\theta) g\|_2 < 1 \quad \forall\, 0 < \theta < 1$.

Si ha: $\|\theta f + (1-\theta) g\|_2^2 + \theta(1-\theta) \cdot \|f-g\|_2^2$

$= \theta^2 + 2\theta(1-\theta)(f,g) + (1-\theta)^2 + \theta(1-\theta)\,[1 - 2 \cdot (f,g) + 1]$

$= 1$

sfruttando il fatto che $\|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + 2 \cdot (f,g) + \|g\|_2^2$

Dunque $\|\theta f + (1-\theta) g\|_2 = \sqrt{1 - \theta(1-\theta) \cdot \|f-g\|_2^2} < 1$.

· Le norme 1 e infinito non sono strettamente convesse, e l'approssimazione può non essere unica, come nei casi:

· n. 1 in $C[-1,1]$, $f \equiv 1$, $a(x) = \lambda x$: $\forall -1 < \lambda < 1$ è migl.

· n. ∞ " " $a(x) = \lambda \cdot (1+x)$: $\forall\, 0 < \lambda < 1$ "

POWELL – III (3)

(3.1) · Operatori di approssimazione

· proiettivo se $X[X(f)] = X(f)$; cond. suff. è che $X(a) = a$

· lineare se : · $X(\lambda f) = \lambda \cdot X(f)$

· $X(f+g) = X(f) + X(g)$

· norma di X : più piccolo reale che $\forall f$ verifica $\|X(f)\| \leq \|X\| \cdot \|f\|$

(3.2) · Costanti di Lebesgue

· Corrispondono alle norme degli operatori. Siano: (Th 3.1)

· $\mathcal{A}$ spazio lineare finito dim. di spazio lineare normato $\mathcal{B}$;

· X operatore lineare proiettivo $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$

· $\forall f \in \mathcal{B}$, $d^* = \min_{a \in \mathcal{A}} \|f - a\|$

Allora $\|f - X(f)\| \leq [1 + \|X\|]\, d^*$

<u>Dim 3.1</u> Sia p^* ~~la~~ una migliore approssimazione da $\mathcal{A}$ a f.

Per proiezione e linearità:

$f - X(f) = (f - p^*) - X(f - p^*)$

$\|f - X(f)\| \leq \|f - p^*\| + \|X(f-p^*)\| \leq \|f - p^* + X(f-p^*)\|$

$\leq [1 + \|X\|] \cdot \|f - p^*\| = [1 + \|X\|]\, d^*$

(3.3) · Approssimazioni polinomiali a funzioni derivabili.

- Teorema di Weierstrass: $\forall f \in C[a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p \,//\, \|f-p\|_\infty \le \varepsilon$
- Diamo ora per assunto (sarà eventualmente provato in seguito) che:
  - la migliore approssimazione da $\mathcal{P}_n$ a $f \in C[a,b]$ in $n.\infty$ è unica;
  - $\exists c \,/\, \forall f \in C^1[a,b]$, $\forall n$ $\|f - X_n(f)\|_\infty = d_n^*(f) \le \left(\frac{c}{n}\right) \cdot \|f'\|_\infty$

dove X_n è l'operatore di migliore approssimazione.

- Si ottiene il risultato seguente (Th 3.2)

  Se $f \in C^{(k)}[a,b]$, $k \le n$, allora $d_n^*(f) \le \frac{(n-k)! \, c^k}{n!} \|f^{(k)}\|_\infty$

  Dim 3.2 Per $k=1$ il teorema è valido per ipotesi.

  Supponiamo ora che sia valido per $k-1$ e proviamolo per k.

  Applichiamo l'ipotesi induttiva a $f' \in C^{k-1}[a,b]$: $d_{n-1}^*(f') \le \frac{(n-k)! \, c^{k-1}}{(n-1)!} \|f^{(k)}\|_\infty$

  Sia q l'integrale indefinito di una migliore approx. da $\mathcal{P}_{n-1}$ a f'.

  Segue da quanto prima $d_n^*(f-q) \le \frac{c}{n} \cdot \|f'-q'\|_\infty = \frac{c}{n} \cdot d_{n-1}^*(f')$

  per un q opportuno, appartenente allo spazio lineare $\mathcal{P}_n$.

  Valgono pertanto $\min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f-p\|_\infty = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f-q-p\|_\infty$ e $d_n^*(f) = d_n^*(f-q)$,

  da cui la tesi segue in virtù dei risultati finora ottenuti.

(3.4) · Approssimazione polinomiale piecewise

- $f(x_i) = y_i$ valori della funzione nei nodi, dati
- $s(x) = \frac{(x_{i+1}-x)\cdot f(x_i) + (x-x_i)\cdot f(x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)}$ $x_i \le x \le x_{i+1}$ approx. secondo spezzata
- $s(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j x^j + \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} d_j (x-\xi_j)_+^k$ $a \le x \le b$ approx. spline
- $\min_{s \in \mathcal{S}} \|f-s\| = O(h^{k+1})$, dove h è il passo: $h = \max_{1 \le i \le n} |\xi_i - \xi_{i-1}|$

POWELL - VI

6.1 - Teorema di Weierstrass

- $\forall f \in C[a,b], \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \, p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i, \ a \le x \le b, \ / \ \|f - p\|_\infty \le \varepsilon$

6.2. - Operatori monotoni

- $L: C[a,b] \to C[a,b]$ è detto monotono se $f > g \Rightarrow Lf > Lg$
- Se L lineare, monotonia $\Leftrightarrow$ positività: $f \ge 0 \Rightarrow Lf \ge 0$
- Th 6.2 Sia $\{L_i\}$ una sequenza di operatori monotoni lineari da $C[a,b]$ a $C[a,b]$. Allora, se $\{L_i f\} \to f$ uniformemente per $f(x) = 1, x, x^2$, allora converge $\forall f \in C[a,b]$

6.3. - Operatore di Bernstein

- Va da $C[a,b]$ a $\mathcal{P}_n$; per semplicità, consideriamo $[a,b] = [0,1]$, e:

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

- È lineare e dipende unicamente dal valore di f negli $n+1$ nodi.
- A differenza dell'interpolazione di Lagrange, non vale sempre $B_n f = f$ se f è in $\mathcal{P}_n$, ovvero l'approx. polinomiale di un polinomio non è esso stesso.
- Th 6.3 $\forall f \in C[0,1]$, $\{B_n f\} \to f$ uniformemente.

Dim 6.3 Dalla definizione segue che:

- B_n è lineare
- $f \ge 0$ in $0 \le x \le 1 \Rightarrow B_n f \ge 0$ in $0 \le x \le 1$
- pertanto, B_n è lineare e monotono.

Dobbiamo dunque provare che $\lim_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_\infty = 0$ se $f \in \mathcal{P}_2$.

- Per $j = 0$, $\forall n$ $B_n f = f$ (teorema sul binomiale)
- Per $j = 1$, dalla definizione di B_n:

$$\begin{aligned}(B_n f)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot \frac{k}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{facendo filtrare il} \cdot \\ &= x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \quad \text{tirando fuori } x \text{ e traslando } k \\ &= x \quad \text{ancora per il teorema sul binomiale}\end{aligned}$$

- Per $j = 2$, valendo l'identità:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x$$

si ha:

$$\|B_n f - f\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} \left| \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x - x^2 \right| = \frac{1}{4n} \to 0$$

- Ne segue che $\forall f \in C[0,1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \,/\, \|f - B_n f\|_\infty \leq \varepsilon$, il che è proprio ciò che ci dice il teorema di Weierstrass (ponendo $p = B_n f$). Ciò prova il teorema.
- Se $[a,b]$ non è $[0,1]$, si opera per trasformazioni lineari dell'intervallo.

6.4 — Derivate delle approssimazioni di Bernstein.

- Se $f \in C^k[0,1]$, oltre che $\{B_n f\} \xrightarrow{\text{unif.}} f$, anche $\{(B_n f)^{(h)}\} \xrightarrow{\text{unif.}} f^{(h)}{}_{|h \leq k}$
- Proviamolo per $k=1$, ovvero che $\lim_{n\to\infty} \|f' - (B_n f)'\|_\infty = 0$ (Th. 6.4)

Dim 6.4. Per il teorema precedente, $\{B_n f'\} \xrightarrow{\text{unif.}} f'$

È sufficiente dunque provare che $\lim_{n\to\infty} \|B_n(f') - (B_n f)'\|_\infty = 0$.

Per semplicità nei calcoli, proveremo che $\lim_{n\to\infty} \|B_n(f') - (B_{n+1} f)'\|_\infty = 0$.

Derivando risulta che:

$$
\begin{aligned}
(B_{n+1} f)'(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} (n+1)\cdot\binom{n}{k-1}\cdot x^{k-1}\cdot(1-x)^{n+1-k}\cdot f\left(\tfrac{k}{n+1}\right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n} (n+1)\cdot\binom{n}{k}\cdot x^{k}\cdot(1-x)^{n-k}\cdot f\left(\tfrac{k}{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (n+1)\cdot\binom{n}{k}\cdot x^{k}\cdot(1-x)^{n-k}\cdot \left\{f\left(\tfrac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\tfrac{k}{n+1}\right)\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot x^{k}\cdot(1-x)^{n-k}\cdot f\left[\tfrac{k}{n+1}, \tfrac{k+1}{n+1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \quad '' \quad f'(\xi_k) \qquad \tfrac{k}{n+1} \leq \xi_k \leq \tfrac{k+1}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$[B_n(f') - (B_{n+1}f)'](x) = \sum_{k=0}^{n} \quad '' \quad \left[f'\left(\tfrac{k}{n}\right) - f'(\xi_k)\right]$$

il cui valore assoluto è limitato da:

$\max_{k=0,\dots,n} \left|f'\left(\frac{k}{n}\right) - f'(\xi_k)\right| \leq \omega\left(\frac{1}{n+1}\right)$ dove ω modulo di continuità di f', poiché sia $\frac{k}{n}$ che ξ_k stanno in $\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$

Ciò prova che $\|B_n(f') - (B_{n+1}f)'\|_\infty \leq \omega \cdot \frac{1}{n+1}$ e dunque la tesi.

POWELL – VII

7.1. – Introduzione all'approssimazione minimax

- Sia p^* un'approssimazione di f in $\mathcal{A}$. Si vuole trovare un'approssimazione migliore, ovvero p tale che esista θ in modo che: $\|f-(p^*+\theta p)\|_\infty < \|f-p^*\|_\infty$, $p \in \mathcal{A}$

7.2. – Riduzione dell'errore di un'approssimazione tentativa

- Sia p^* come prima, $f \in C[a,b]$, e si voglia migliorare l'approssimazione soddisfando la condizione a cui sopra.
- Sia $e^*(x) = f(x) - p^*(x)$ la funzione errore, e $\mathcal{L}_M$ l'insieme degli x tali per cui $|e^*(x)| = \|e^*\|_\infty$.
- Supponiamo che p^* sia non ottimale, e sia $(p^*+\theta p)$ una migliore approssimazione. Vale la relazione tra $\|\cdot\|_\infty$, e dunque $|e^*(x) - \theta p(x)| < |e^*(x)|$ per gli $x \in \mathcal{L}_M$
- Sia θ positivo senza perdita di generalità, allora, per $x \in \mathcal{L}_M$, $e^*(x)$ e $p(x)$ sono concordi.
- Segue pertanto che p^* è migliore minimax da $\mathcal{A}$ per f se non esiste $p \in \mathcal{A}$ / $[f(x)-p^*(x)]\,p(x) > 0$, $x \in \mathcal{L}_M$.
- Vale il contrario: se $\exists\, p$ che soddisfa quanto sopra, allora $\exists\, \theta > 0$ che dà la riduzione tra $\|\cdot\|_\infty$.
- Estendiamo il problema, considerando, anziché la sola minimizzazione di $\|f-p\|_\infty$, quella di $\max_{x\in\mathcal{L}} |f(x)-p(x)|$, dove $\mathcal{L}$ è un chiuso di $[a,b]$, non necessariamente connesso.
- (Th. 7.1) Sia $\mathcal{A}$ un sottospazio lineare di $C[a,b]$, $f \in C[a,b]$, $\mathcal{L}$ un chiuso di $[a,b]$, $p^* \in \mathcal{A}$, $\mathcal{L}_M$ come prima.

  Allora $p^* \in \mathcal{A}$ minimizza $\max_{x\in\mathcal{L}} |f(x)-p(x)| \iff \nexists\, p \in \mathcal{A} / [f-p^*]\,p > 0$

  Dim. 7.1 $\Leftarrow$ • valido per $\mathcal{L} = [a,b]$ in base a quanto visto prima

  • l'estensione a $\mathcal{L}$ chiuso $\subset [a,b]$ è immediata.

  $\Rightarrow$ • $\exists\, p \in \mathcal{A} / [f-p^*]\,p > 0 \Rightarrow \exists\, \theta / \max_{x\in\mathcal{L}} |e^*(x)-\theta p(x)| < \max_{x\in\mathcal{L}} |e^*(x)|$

  Supponiamo senza perdita di generalità che $\theta > 0$, $|p(x)| \leq 1$

  Definiamo $\mathcal{L}_0$ come insieme degli x / $p(x)\, e^*(x) \leq 0$

Questo è chiuso, inoltre $\mathcal{L}_0$ e $\mathcal{L}_M$ sono disgiunti, per cui

$$d := \max_{x \in \mathcal{L}_0} |e^*(x)| < \max_{x \in \mathcal{L}} |e^*(x)|$$

Per convenzione, poniamo $d := 0$ se $\mathcal{L}_0$ è vuoto.

Proviamo che la disuguaglianza che dobbiamo provare è verificata per

$\vartheta = \frac{1}{2}\left[\max_{x \in \mathcal{L}} |e^*(x)| - d\right]$. Poiché $\mathcal{L}$ è chiuso, $\exists\, \xi \in \mathcal{L} /$:

$|e^*(\xi) - \vartheta p(\xi)| = \max_{x \in \mathcal{L}} |e^*(x) - \vartheta p(x)|$ (il max viene raggiunto)

- Se $\xi \in \mathcal{L}_0$, $\max_{x \in \mathcal{L}} |e^*(x) - \vartheta p(x)| = |e^*(\xi)| + |\vartheta p(\xi)| \leq d + \vartheta$
$= \frac{1}{2}\left[\max_{x \in \mathcal{L}} |e^*(x)| + d\right] < \frac{1}{2}\left[2 \cdot \max_{x \in \mathcal{L}} |e^*(x)|\right] = \max_{x \in \mathcal{L}} |e^*(x)|$
- Se $\xi \notin \mathcal{L}_0$, $|e^*(\xi) - \vartheta p(\xi)| < \max\left[|e^*(\xi)|, |\vartheta p(\xi)|\right]$
poiché $e^*(\xi)$ e $p(\xi)$ sono concordi.

In entrambi i casi, la condizione è verificata.

7.3. – Teorema di caratterizzazione e condizione di Haar

- Consideriamo le seguenti quattro proprietà dei polinomi:
  - (i) Se $\mathcal{P}_n$ ha più di n zeri, allora è identicamente nullo
  - (ii) Siano $\{\xi_j\}$ k punti distinti in (a,b), con $k \leq n$.
  Allora $\exists\, p \in \mathcal{P}_n$ che cambia segno e ha gli unici zeri lì.
  Inoltre, esiste una funzione in $\mathcal{P}_n$ che non ha zeri in $[a,b]$
  - (iii) Se $\mathcal{P}_n$ non identicamente nulla ha j zeri, e se k di questi zeri sono punti interni di $[a,b]$ nei quali la funzione non cambia segno, allora $j + k \leq n$.
  - (iv) Siano $\{\xi_j\}$ $n+1$ punti distinti in $[a,b]$;
  sia $\{\phi_i\}$ una base di $\mathcal{P}_n$. Allora la matrice $(n+1) \times (n+1)$ composta dagli elementi $a_{ij} = \phi_i(\xi_j)$ è non singolare.
- Uno spazio lineare $(n+1)$-dimensionale $\mathcal{A}$, sottospazio di $C[a,b]$, è detto soddisfare la condizione di Haar se queste quattro proprietà restano valide rimpiazzando $\mathcal{P}_n$ con $\mathcal{A}$.
- Ogni base di $\mathcal{A}$ è chiamata insieme di Chebyshev.
- Si prova che (i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii).
- Si usa pertanto definire la soddisfazione della condizione in termini della (i): $\Leftrightarrow \forall\, p \neq \mathcal{A} \setminus \{0\}$, $\#\{\text{radici } p(x) = 0 \text{ in } [a,b]\} < \dim \mathcal{A}$

- (Th 7.2) Sia $\mathcal{A}$ un sottospazio lineare $(n+1)$-dimensionale di $C[a,b]$, che soddisfa la condizione di Haar, e $f \in C[a,b]$. Allora p^* è migliore approssimazione da $\mathcal{A}$ a f se e solo se esistono $(n+2)$ punti $\{\xi_i^*\}$ tali per cui valgono:
  - $a \leq \xi_0^* < \xi_1^* < \dots < \xi_{n+1}^* \leq b$
  - $|f(\xi_i^*) - p^*(\xi_i^*)| = \|f - p^*\|_\infty \quad i = 0 : n+1$
  - $f(\xi_{i+1}^*) - p^*(\xi_{i+1}^*) = -[f(\xi_i^*) - p^*(\xi_i^*)] \quad i = 0 : n$

Dim 7.2 Sia $\mathcal{Z} = [a,b]$ come in Th. 7.1.
Sfruttando il fatto che una funzione in $\mathcal{P}_n$ ha al più n cambi di segno, dunque se $f - p^*$ cambia più di n volte su $\mathcal{Z}_M$, allora p^* è migliore approssimazione, così come se cambia $\leq n$, allora possiamo scegliere gli zeri di un polinomio di $\mathcal{P}_n$ in maniera tale da soddisfare la condizione $[f - p^*]p > 0$, e usando le proprietà (i) e (ii), il teorema segue.

- (Th 7.3) Sia x in $[-1,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Allora l'elemento monico di $\mathcal{P}_n$ che minimizza la norma infinito è $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot T_n$, dove T_n è l'n-esimo polinomio di Chebyshev.

Dim 7.3 Un modo è di trovare i c_i che minimizzano $\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \right|$, il che è equivalente a trovare in $-1 \leq x \leq 1$ la migliore approssimazione da $\mathcal{P}_{n-1}$ a x^n.
Per il teorema precedente, devono valere:
  - x^n ha coefficiente unitario
  - $\exists \{\xi_i\} \,/\, T_n(\xi_i) = (-1)^{n-i} \cdot \|T_n\|_\infty \quad i = 0 : n$

Queste condizioni sono soddisfatte poiché:
  - la relazione di ricorrenza dei T_n garantisce l'unitarietà
  - $\xi_i = \cos\left(\frac{n-i}{n}\pi\right)$ rende soddisfatta l'altra condizione.

- (Th 7.4) Sia $\mathcal{A}$ un sottospazio lineare di dimensione $n+1$ di $C[a,b]$ che soddisfa la condizione di Haar, $\{\xi_i\}$ un insieme di $(n+2)$ punti di $[a,b]$, $f \in C[a,b]$. Allora p^* è la funzione di $\mathcal{A}$ che minimizza:
$\max_{i=0,\dots,n+1} |f(\xi_i) - p(\xi_i)|$, $p \in \mathcal{A}$ se e soltanto se sono soddisfatte:
$f(\xi_{i+1}) - p^*(\xi_{i+1}) = -[f(\xi_i) - p^*(\xi_i)] \quad i = 0 : n$

Dim 7.4 Analoga a 7.2, sostituendo però $\mathcal{L}=\{\xi_i\}$ anziché $\mathcal{L}=[a,b]$.

- Solitamente, si pone $h=f(\xi_0)-p^*(\xi_0)$, ϕ_j base di $\mathcal{A}$ $(j=0:n)$. In questo modo i coefficienti λ_j di $p^*(x)=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\phi_j(x)$ $a\le x\le b$ devono soddisfare $f(\xi_i)-\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\phi_j(\xi_i)=(-1)^i h$ $i=0:n+1$ sistema lineare nelle incognite λ_j e h.
Per ogni $f\in C[a,b]$ c'è soluzione, dunque la matrice è non singolare, e pertanto la soluzione è unica.

- 7.4 – Unicità e limitazione dell'errore minimax.
  - Siano valide le condizioni del Th 7.2 (Haar), siano p^* e q^* migliori approssimazioni minimax da $\mathcal{A}$ a f, e siano valide le tesi dello stesso teorema. Sia $r^*=q^*-p^*$. Consideriamo:
$$r^*(\xi_i^*)=[f(\xi_i^*)-p^*(\xi_i^*)]-[f(\xi_i^*)-q^*(\xi_i^*)] \quad i=0:n+1$$
Poiché $\|f-q^*\|_\infty=\|f-p^*\|_\infty$, allora $r^*(\xi_i^*)=0$, oppure $r^*(\xi_i)$ e $[f(\xi_i^*)-p^*(\xi_i^*)]$ sono concordi, ma anche in questo caso ne risulta la nullità. Dunque $r^*\equiv 0$, e pertanto la migliore approssimazione da $\mathcal{A}$ per f è unica. L'asserzione finale del penultimo periodo può essere provata come segue:
  - (Th 7.5) Sia $r\in C[a,b]$, $\{\xi_i\}$ una referenza, tale per cui $(-1)^i\cdot r(\xi_i)\ge 0$. Allora r ha almeno $n+1$ zeri in $[a,b]$, dove ogni zero viene contato quante volte la sua molteplicità.

Dim 7.5 Siano $I=\{i: r(\xi_i)\neq 0\}$, $J=\{j: r(\xi_j)=0\}$, $n(I)$ e $n(J)$ le card.
- Se $n(I)\le 1$, è vero, poiché $n(I)+n(J)=n+2$.
- Se $n(I)>1$, sia il numero di zeri in $[\xi_k,\xi_l]$, dove $k,l\in I$, e nessun elemento di I sta tra k e l. Per la condizione, $r(\xi_k)$ e $r(\xi_l)$ hanno lo stesso segno se $(l-k)$ è pari, segno opposto se $(l-k)$ è dispari. Dunque gli zeri di r in $[\xi_k,\xi_l]$ sono almeno uno in più dei punti ξ_j dello stesso intervallo, se contati con la loro molteplicità; poiché il numero di coppie $[\xi_k,\xi_l]$ che hanno questa proprietà è $n(I)-1$, il numero totale di zeri è almeno $n(I)+n(J)-1$, che prova il nostro teorema.

- (Th 7.6) Sia $\mathcal{A}$ un sottospazio lineare di $C[a,b]$ che soddisfa la condizione di Haar. Allora, $\forall f \in C[a,b]$, l'approssimazione minimax da $\mathcal{A}$ ~~a~~ a f è unica.

Dim 7.6 Quanto visto prima implica che, se p^* e q^* sono migliori approssimazioni, allora (p^*-q^*) ha almeno $(n+1)$ zeri in $[a,b]$, ognuno contato con la propria molteplicità. Dalla proprietà (iii) di Haar, risulta che p^* e q^* sono la stessa funzione.

- Se $\mathcal{A}$ non soddisfa Haar, allora $\exists f \in C[a,b]$ per cui l'approssimazione minimax non è unica.
- Il seguente teorema pone alcune limitazioni sui valori:

(Th 7.7) Nelle condizioni di Th 7.2., con $p^* \in \mathcal{A}$, $\{\xi_i\}$ referenza tale che

- $\text{sign}[f(\xi_{i+1}) - p^*(\xi_{i+1})] = -\text{sign}[f(\xi_i) - p^*(\xi_i)] \quad i=0:n$

valgono:

- $$\min_{i=0:n+1} |f(\xi_i) - p^*(\xi_i)| \le \min_{p\in\mathcal{A}} \max_{i=0:n+1} |f(\xi_i) - p(\xi_i)| \le \min_{p\in\mathcal{A}} \|f-p\|_\infty \le \|f-p^*\|_\infty$$

Inoltre, la prima $\le$ è $<$ a meno che $|f(\xi_i) - p^*(\xi_i)|$ assume lo stesso valore per ogni i.

Dim 7.7
- 3° $\le$: poiché $p^* \in \mathcal{A}$
- 2° $\le$: poiché $\{\xi_i\} \subseteq [a,b]$
- 1° $\le$: sia $q^* \in \mathcal{A} \,/\, \min_{i=0:n+1} |f-p^*| \ge \max_{i=0:n+1} |f-q^*|$

Se $q^* = p^*$, tutti gli $|f-p|$ sono uguali, vale l'$=$.

Se $q^* \ne p^*$, sia $r^* = (q^*-p^*)$. Per la proprietà dei segni di $(f-p^*)-(f-q^*)$, il relativo teorema, e Haar, $p^* = q^*$, assurdo.

POWELL - XI

11.1 - Forma generale di approssimazione ai minimi quadrati

- Sia: • $\mathcal{A} \subseteq C[a,b]$ insieme di funzioni approssimanti
  - $w(x) \geq 0$ funzione positiva in $[a,b]$ detta funzione peso

Allora $p^* \in \mathcal{A}$ è migliore approssimazione m.q. pesata se minimizza:

$$\int_a^b w(x) \cdot [f(x) - p(x)]^2 \, dx, \quad p \in \mathcal{A}$$

- Definiamo prodotto scalare e norma:
  - $(f,g) = \int_a^b w(x) \cdot f(x) \cdot g(x) \, dx$
  - $\|f\|_2 = (f,f)^{1/2}$
  - $\|f-p\|_2 = (f-p, f-p)^{1/2}$ il cui ^{2} dà l'espressione da minimizzare
- Se $\mathcal{A}$ è lineare e finito dimensionale, esiste una migliore approssimazione, che è anche unica per la convessità stretta della norma 2.
- Nel caso discreto, siano x_j i valori in cui si misura la f, con varianza dovuta all'errore di misura $\frac{1}{w_j}$; siano y_j le misure, $\mathcal{A}_0$ insieme funzioni approssimanti, errori casuali distribuiti normalmente. Allora f può essere approssimata con $p_0^* \in \mathcal{A}_0$ che minimizza, tra tutte le $p_0 \in \mathcal{A}_0$, la somma pesata $\sum_{j=1}^{m} w_j [y_j - p_0(x_j)]^2$
- I dati $\{y_j\}$ definiscono un vettore y in $\mathbb{R}^m$.
  Per ogni $p_0 \in \mathcal{A}_0$, sia $X(p_0)$ il vettore delle $\{p_0(x_j)\}$
  Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^m$ l'insieme degli $X(p_0)$.
  Il problema diventa equivalente a minimizzare $\sum_{j=1}^{m} w_j [y_j - p_j]^2$, ovvero $\|y-p\|$ introducendo prodotto scalare pesato e norma vettoriale.

11.2 - Teorema di caratterizzazione

(Th 11.1) Sia $\mathcal{A}$ un sottospazio lineare di uno spazio di Hilbert $\mathcal{B}$, $f \in \mathcal{B}$. Allora $p^* \in \mathcal{A}$ è migliore da $\mathcal{A}$ a $f \iff e^* = f - p^* / (e^*, p) = 0$

Dim 11.1 $\Rightarrow$: $\exists p \,/\, (e^*, p) \neq 0$: $p^* + \lambda p$ è migliore di p^*.

$$\|f - p^* - \lambda p\|^2 = \|f - p^*\|^2 - 2\lambda \cdot (e^*, p) + \lambda^2 \cdot \|p\|^2$$

il cui minimo non si raggiunge per $\lambda = 0$

proviamo che $\|f-q^*\|^2 = \|f-p^*\|^2 + \|q^*-p^*\|^2 \geq \|f-p^*\|^2$

$\Leftarrow$: $\nexists p$, $(e^*, p) = 0$: sia $q^* \in \mathcal{A}$, allora:

$$\|f - q^*\|^2 - \|f - p^*\|^2 = \|q^*\|^2 - \|p^*\|^2 - 2 \cdot (f, q^*) + 2 \cdot (f, p^*)$$
$$= \|q^* - p^*\|^2 + 2 \cdot (f - p^*, p^* - q^*) = \|q^* - p^*\|^2$$

POWELL - XI (2)

11.3 - Metodi di calcolo

- Per calcolare una migliore approssimazione ai m.q. da uno spazio lineare $\mathcal{A}$:
  - si sceglie una base $\{\phi_j\}$ di $\mathcal{A}$;
  - si esprime p^* in funzione di essi: $p^* = \sum_{j=0}^{n} c_j^* \phi_j$
  - per il Th 11.1, p^* migliore $\iff (\phi_i, f - \sum_{j=0}^{n} c_j^* \phi_j) = 0 \quad i = 0:n$

$$\sum_{j=0}^{n} (\phi_i, \phi_j)\, c_j^* = (\phi_i, f) \qquad i = 0:n$$

  - in alternativa, si minimizza $(f-p, f-p) = (f,f) - 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} c_i (\phi_i, f) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_i c_j (\phi_i, \phi_j)$
  - la matrice che si ottiene è simmetrica e definita positiva.
- (Th 11.2) Sia $\mathcal{A}$ un sottospazio lineare di uno spazio hilbertiano $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ generato dalla base $\{\phi_i\}_{i=0}^{n}$. Se $(\phi_i, \phi_j) = 0$, allora, $\forall f \in \mathcal{B}$, la migliore approssimazione da $\mathcal{A}$ per f è: $p^* = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\phi_j, f)}{\|\phi_j\|^2} \phi_j$

  Dim 11.2 Segue dal fatto che deve essere $c_i^* = \frac{(\phi_i, f)}{\|\phi_i\|^2}$ $i = 0:n$, per quanto ricavato prima e per l'ortogonalità.
- Sia $\mathcal{A}$ identificato da una sua base $\{\psi_i\}_{i=0}^{n}$. Consideriamo una successione di suoi sottospazi $\mathcal{A}_i$, identificati da $\{\psi_j\}_{j=0}^{i}$. Possiamo costruire una base ortogonale per $\mathcal{A}$ nel seguente modo:
  - $\phi_0 := \psi_0$
  - $\phi_i = \overline{\psi}_i - q_i^*$, dove $\overline{\psi}_i \in \mathcal{A}_i \setminus \mathcal{A}_{i-1}$, q_i^* migliore da $\mathcal{A}_{i-1}$ a $\overline{\psi}_i$.
- Estensione: $\mathcal{B}$ spazio di Hilbert, $\{\psi_i\}_{i=0}^{\infty}$ successione infinita di funzioni. Sia p c.l. delle $\{\psi_i\}_{i=0}^{n}$, con n incognito, o meglio il più piccolo intero tale per cui si riesca a porre $\|f-p\| < \delta$. Definiamo $p_i^* := \sum_{j=0}^{i} \frac{(\phi_j, f)}{\|\phi_j\|^2} \cdot \phi_j$; posto così, si richiede che n, sia il più piccolo a soddisfare $\|f - p_n^*\| \le \delta$. Per trovarlo:

$$\|p_n^*\|^2 \ge \|f\|^2 - \delta^2$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(\phi_j, f)^2}{\|\phi_j\|^2} \ge \text{"}$$

11.4 – Relazione di ricorrenza per polinomi ortogonali

- Se $\mathcal{U} = \mathbb{P}_n$, si costruiscono i polinomi ortogonali.
- (Th 11.3) Siano:
  - $\phi_0(x) \equiv 1$ funzione costante in $[a,b]$
  - $\alpha_j = (\phi_j, x \cdot \phi_j) / \|\phi_j\|^2$ scalare, per $j \geq 0$
  - $\phi_1(x) = (x - \alpha_0) \cdot \phi_0(x)$ funzione lineare in $[a,b]$
  - $\beta_j = \|\phi_j\|^2 / \|\phi_{j-1}\|^2$ scalare, per $j \geq 1$
  - $\phi_{j+1}(x) = (x - \alpha_j) \cdot \phi_j(x) - \beta_j \cdot \phi_{j-1}(x)$

  Allora:
  - ϕ_j è un polinomio monico di grado j, $\forall j$;
  - i $\{\phi_j\}$ sono ortogonali.

Dim 11.3
- Grado e coefficiente direttivo seguono immediatamente dalla ricorrenza.
- Per provare l'ortogonalità:
  - notiamo che, con riferimento alla costruzione precedente, $\overline{\psi_i} = x \cdot \phi_{i-1}$
  - supponiamo induttivamente che le $\{\phi_i\}_{i=0}^{j}$ sono ortogonali allora per quanto visto nel paragrafo precedente segue
    $\phi_{j+1}(x) = x \cdot \phi_j(x) - \sum_{i=0}^{j} \frac{(\phi_i, x \cdot \phi_j)}{\|\phi_i\|^2} \phi_i(x) \perp \phi_i(x) \quad 0 \leq i \leq j$
  - per $j = 0$, dalla definizione di α_0, corrisponde alla definizione di $\phi_1(x)$ resta da dimostrare che per $j \geq 1$ si corrisponde con $\phi_{j+1}(x)$
  - per provarlo, sviluppiamo $\phi_{j+1}(x)$ dalla definizione:
    $\phi_{j+1}(x) = x \cdot \phi_j(x) - \alpha_j \cdot \phi_j(x) - \beta_j \cdot \phi_{j-1}(x)$
    consideriamo ora i termini sotto sommatoria a cui sopra:
    - per $i = j$, si ottiene il termine, presente, $\alpha_j \cdot \phi_j(x)$
    - per $i \leq j-2$, $(\phi_i, x\phi_j) = (x\phi_i, \phi_j) = 0$ poiché $\phi_j \perp \mathbb{P}_{j-1}$
    - per $i = j-1$, $(\phi_{j-1}, x\phi_j) = (x\phi_{j-1}, \phi_j)$
      $= (\phi_j, \phi_j) + (x\phi_{j-1} - \phi_j, \phi_j)$
      $= \|\phi_j\|^2$ poiché $(x\phi_{j-1} - \phi_j) \in \mathbb{P}_{j-1}$
  - Ne segue che il multiplo di $\phi_{j-1}(x)$ che si ottiene è quello secondo β_j, e ciò prova l'equivalenza.

- Computazionalmente, si calcola $c_j^* = \frac{(\phi_j, f)}{\|\phi_j\|^2}$ subito dopo ϕ_j, in modo tale che lo spazio riservato a ϕ_{j-1} possa essere riallocato per ϕ_{j+1}.
- $p^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^* \phi_j(x)$

POWELL - XII

(12.1) - Proprietà elementari dei polinomi ortogonali

(Th 12.1) · Sia $\mathcal{B}$ spazio di Hilbert $\supseteq \mathcal{P}_n$, $\{\phi_i\}_{i=0}^n$ polinomi non nulli $\in \mathcal{P}_i$, $(\phi_i, \phi_j) = 0 \quad i \neq j$ (condizione di ortogonalità).

Allora:

- $\{\phi_i\}_{i=0}^n$ sono linearmente indipendenti
- $\psi_k \in \mathcal{P}_k, \quad \psi_k \perp \mathcal{P}_{k-1} \Rightarrow \exists\, c \,/\, \psi_k(x) = c \cdot \phi_k(x)$

Dim 12.1

- Siano λ_i scalari per cui $\sum_{i=0}^n \lambda_i \phi_i \equiv 0$.

  Poiché $\sum_{i=0}^n \lambda_i \phi_i \equiv 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n \lambda_i (\phi_j, \phi_i) = 0 \quad j = 0:n$

  e poiché $(\phi_j, \phi_j) > 0$ se $\phi_j \neq 0$, per l'ortogonalità ogni $\lambda_j = 0$
- $\{\phi_i\}_{i=0}^k$ formano pertanto una base di $\mathcal{P}_k$, dunque

  $\psi_k = \sum_{i=0}^k \mu_i \phi_i$, da cui $(\phi_j, \psi_k) = \sum_{i=0}^k \mu_i (\phi_j, \phi_i) \quad j = 0:k-1$

  Dall'ortogonalità $\{\mu_j\}_{j=0}^{k-1} = \bar{0}$, dunque $c = \mu_k$ verifica l'espressione.

· (Th 12.2) Sia $\phi_k \in \mathcal{P}_k \setminus \{0\}$, $\phi_k \perp \mathcal{P}_{k-1}$.

Allora ϕ_k ha esattamente k zeri reali e distinti in $[a,b]$.

Dim 12.2 Sia r il numero di cambi di segno di $\phi_k(x)$.

$\exists\, \psi_r \in \mathcal{P}_r \,/\, \phi_k(x) \cdot \psi_r(x) \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow x$ è zero di ϕ_k.

Segue dalla definizione di prodotto scalare che $(\phi_k, \psi_r) > 0$ ~~è positivo~~. Ora, $r \geq k$ per le proprietà di ortogonalità di ϕ_k.

Dunque ϕ_k ha almeno k zeri, ~~al~~ più k per il grado, dunque ne ha k.

(12.4) – L'operatore R_n

- Si tratta di una proiezione lineare da $C[-1,1]$ in $\mathcal{P}_n$.
- Per ogni $f \in C[-1,1]$, $R_n f$ è l'elemento di $\mathcal{P}_n$ che minimizza $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} [f(x) - p(x)]^2 \, dx$ tra i $p \in \mathcal{P}_n$.
- Per il Th 11.2, $R_n f = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\phi_j, f)}{\|\phi_j\|^2} \phi_j$, con $(\phi_j, f) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \phi_j(x) f(x) \, dx$ supposto che i $\{\phi_j\}_{j=0}^{n}$ siano ortogonali.
- Se $f \in \mathcal{P}_{n+1}$, $R_n f$ è la migliore minimax da $\mathcal{P}_n$ a f.
- (Th 12.6) I polinomi di Chebyshev $T_j(x) = \cos(j\vartheta)$ $x = \cos\vartheta$ soddisfano le condizioni di ortogonalità $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_j(x) T_k(x) \, dx = 0$ $j \neq k$

  Dim 12.6 Ponendo $x = \cos\vartheta$, l'integrale risulta valere:
  $$\int_0^{\pi} \cos(j\vartheta) \cos(k\vartheta) \, d\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \{\cos[(j+k)\vartheta] + \cos[(j-k)\vartheta]\} \, d\vartheta = 0 \quad j \neq k$$
- Ora, $f - R_n f \in \mathcal{P}_{n+1}$, e $\perp \mathcal{P}_n \Rightarrow c \cdot p$ con p indipendente da f

  $c \cdot T_{n+1}$ poiché soddisfa ortogonalità
- Dunque viene soddisfatta la condizione di caratterizzazione per la migliore approssimazione minimax da $\mathcal{P}_n$ a f.

PHILIPS – IV

(4.1) – Nucleo di Peano

- Scriviamo il resto di uno sviluppo in serie di Taylor come:

$$R_n(f) = \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt$$

poiché:

- $R_n(f) = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n-1}(f) = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_{n-2}(f)$

$$= -\sum_{i=n-s+1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_{n-s}(f)$$

- $R_0(f) = \int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$

Def 4.1.1 Definiamo la funzione potenza troncata come:

$$(x-t)^n_+ = \begin{cases} (x-t)^n & t \le x \\ 0 & t > x \end{cases}$$

Th. 4.1.1 Siano:

- $g_t(x) = (x-t)^n_+$
- L funzionale lineare che commuta con l'operazione di integrazione
- $L(g_t)$ è definito, $L(f) = 0 \quad \forall f \in P_n$.

Allora, per $\forall f \in C^{n+1}[a,b]$

- $L(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t)\,k(t)\,dt$ con $k(t) = k_g(t) = \frac{1}{n!} L(g_t)$

Dim 4.1.1

- Consideriamo $(x-t)^n_+$ funzione di x, con t come parametro.
- L mappa $(x-t)^n_+$ in un reale che dipende da t, e dunque in una funzione di t
- Applicando L a f sviluppata con Taylor:

$$L(f) = \frac{1}{n!} L \int_a^b f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n_+\,dt = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)\,L((x-t)^n_+)\,dt$$

poiché ~~effecco~~ L annulla i termini di grado $\le n$ e commuta.

Cor. 4.1.1

- Se inoltre $k(t)$ non cambia segno su $[a,b]$,

$$L(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} L(x^{n+1}) \qquad a < \xi < b$$

- Infatti $L(f) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \int_a^b k(t)\,dt \qquad a < \xi < b \quad \forall f \in C^{n+1}_{[a,b]}$

in particolare per x^{n+1}.

- (Th 2.1.1) I polinomi di Legendre, scalati in maniera tale che i loro coefficienti direttivi siano unitari, soddisfano la relazione:
  - $q_{n+1}(x) = (x-\alpha_n) \cdot q_n(x) - \beta_n \cdot q_{n-1}(x)$

dove:
  - $q_0(x) = 1$; $q_1(x) = x$
  - $q_{n+1}(x) = (x-\alpha_n) \cdot q_n(x) - \beta_n \cdot q_{n-1}(x)$
  - $\alpha_n = \int_{-1}^{1} x \cdot [q_n(x)]^2 \, dx \;/\; \int_{-1}^{1} [q_n(x)]^2 \, dx$
  - $\beta_n = \int_{-1}^{1} [q_n(x)]^2 \, dx \;/\; \int_{-1}^{1} [q_{n-1}(x)]^2 \, dx$

Dim 2.1.1 È il Th 11.3 del Powell nel caso $[a,b] = [-1,1]$

- (Th 2.1.2) La relazione di ricorrenza si può semplificare in:
  - $q_{n+1}(x) = x \cdot q_n(x) - \beta_n \cdot q_{n-1}(x)$, ovvero $\alpha_n = 0 \;\; \forall n$.

Inoltre q_n è una funzione pari se n è pari, dispari se n è dispari.

Dim 2.1.2 Si ha $q_0(x) = 1$ pari, $q_1(x) = x$ dispari, $\alpha_0 = 0$.
Supponiamo ora che $q_0, \dots, q_{2k+1}$ siano alternativamente pari e dispari, e che $\alpha_0 = \dots = \alpha_{2k} = 0$. Il passo induttivo segue da:
  - $\alpha_{2k+1} = 0$ per definizione di α_n.
  - q_{2k+2} pari per la relazione di ricorrenza
  - $\alpha_{2k+2} = 0$, q_{2k+3} dispari osservando le stesse relazioni.

- (Th 2.1.3) Il polinomio di Legendre di grado n ha n zeri distinti in $[-1,1]$

Dim 2.1.3 Si veda il Th 12.2 del Powell

- In generale, per una funzione peso w, possiamo costruire polinomi orthogonali q_n^w tali per cui $\int_{-1}^{1} w(x) \cdot x^r \cdot q_n^w(x) \, dx = 0$.
  Basta porre nella relazione di ricorrenza:
  - $\alpha_n = \int_{-1}^{1} w(x) \cdot x \cdot [q_n^w(x)]^2 \, dx \;/\; \int_{-1}^{1} w(x) \cdot [q_n^w(x)]^2 \, dx$
  - $\beta_n = \int_{-1}^{1} w(x) \cdot [q_n^w(x)]^2 \, dx \;/\; \int_{-1}^{1} w(x) \cdot [q_{n-1}^w(x)]^2 \, dx$

  Se w è pari, valgono le proprietà del Th 2.1.2.
  Una scelta comune per la funzione peso è $w(x) = (1-x)^{\alpha} \cdot (1+x)^{\beta}$, che include i seguenti casi:
  - $\alpha = \beta = 0$ Legendre
  - $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ Chebyshev I
  - $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ Chebyshev II
  - $\alpha = \beta$ ultrasferici

(Th 2.2.2) Definiamo $t_n(x) = \cos n\vartheta$, $x = \cos\vartheta$, $-1 \le x \le 1$, $n \ge 0$.
Allora $t_n = T_n$, polinomio di Chebyshev di grado n.

Dim 2.2.2 · Per $r \neq s$ abbiamo:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} t_r(x)\, t_s(x)\, dx = \int_0^{\pi} \cos r\vartheta \cos s\vartheta \, d\vartheta = 0$$

poiché $\cos r\vartheta \cos s\vartheta = \frac{1}{2}(\cos(r+s)\vartheta + \cos(r-s)\vartheta)$

- Sostituendo ora $x = \cos\vartheta$, risulta $t_r(1) = 1$.
- Ora, $\cos(n+1)\vartheta + \cos(n-1)\vartheta = 2\cos n\vartheta \cos\vartheta$, che porta a

$$t_{n+1}(x) = 2x\, t_n(x) - t_{n-1}(x) \qquad n \ge 1, \quad t_0(x) = 1, \quad t_1(x) = x$$

- (Th 2.4.1) [Teorema di Weierstrass, già visto]

Def 2.4.1 $E(x)$ è detta equioscillare su $n+2$ punti di $[-1,1]$ se, $-1 \le x_1 < \dots < x_{n+2} \le 1$, valgono:

- $|E(x_j)| = \max\limits_{-1\le x\le 1} |E(x)| \qquad 1 \le j \le n+2$
- $E(x_{j+1}) = -E(x_j) \qquad 1 \le j \le n+1$

Un esempio è dato da T_{n+1} su $x_j = \cos[(j-1)\pi/(n+1)]$

- (Th 2.4.2) Sia $f \in C[-1,1]$, ed esista $p \in P_n$ tale per cui $f-p$ equioscilla su $n+2$ punti appartenenti a $[-1,1]$. Allora p è l'approssimazione minimax in P_n per f su $[-1,1]$.

Dim 2.4.2 · Se p non è minimax, allora $\exists\, q \,/\, p+q$ lo è.
- Ora, confrontiamo $f-p$ (che equioscilla), con $f-p-q$.
- Poiché deve essere $\|f-p-q\|_\infty < \|f-p\|_\infty$, l'aggiunta di q deve ridurre il modulo di $f-p$ sugli $n+2$ punti di equioscillazione
- Pertanto q deve avere segno alternato in questi $n+2$ punti, ovvero almeno $n+1$ zeri, assurdo poiché $q \in P_n$.

- (Th 2.4.5) Sia $f \in C[-1,1]$, $p \in P_n$ polinomio minimax, Allora esistono $n+1$ punti nei quali p interpola f.
- Def 2.4.2 $E_n(f) := \|f-p\|_\infty$

• (Th 2.4.6) Se $f \in C^{n+1}[-1,1]$, allora l'errore dell'approssimazione minimax in $[-1,1]$ soddisfa:

$$E_n(f) = \|f-p\|_\infty = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \qquad -1 < \xi < 1$$

Dim 2.4.6 Siano $x_0, \dots, x_n$ i punti in cui p interpola f.

Allora:
$$f(x) - p(x) = \prod_{i=0}^{n} (x-x_i) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \qquad -1 < \xi_x < 1$$

$$\|f-p\|_\infty \geq \| \prod_{i=0}^{n} (x-x_i) \|_\infty \cdot \frac{\min |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$
$$\geq \| \prod_{i=0}^{n} (x-x_i^*) \|_\infty \cdot \text{"}$$
$$\geq 1/2^n \cdot \text{"}$$

$$\|f-p\|_\infty \leq \|f-p^*\|_\infty \leq \| \prod_{i=0}^{n} (x-x_i^*) \|_\infty \cdot \frac{\max |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$
$$\leq 1/2^n \cdot \text{"}$$

• (Th 2.5.1) La funzione di Lebesgue $\lambda_n(x) := \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|$, dove L_i sono i polinomi fondamentali di Lagrange, soddisfa:

- è continua in $[a,b]$;
- è un polinomio di grado al più n in ogni sottointervallo $[a,x_0]$, $[x_0,x_1]$, ..., $[x_{n-1},x_n]$, $[x_n,b]$
- $\lambda_n(x_i) = 1 \qquad 0 \leq i \leq n$
- $\lambda_n(x) \geq 1 \qquad a \leq x \leq b$

Dim 2.5.1 • Continuità e grado sono banali (somma di...)

• $\lambda_n(x_i) = 1$ poiché nei nodi uno vale 1 e gli altri 0

• $\lambda_n(x) \geq 1$ poiché $1 = |\sum_{i=0}^{n} L_i(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|$

• (Th 2.5.2) Sia $p_n \in P_n$ minimax di $f \in C[a,b]$, $p_n^* \in P_n$ polinomio che interpola f sulle ascisse $x_i^{(n)} = -1 + \frac{2i}{n}$.

Allora $\|f-p_n^*\|_\infty \leq (1+\Lambda_n(x)) \cdot E_n(f)$

Dim 2.5.2
$$p_n^*(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i^{(n)}(x)$$
$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_n(x_i) \cdot L_i^{(n)}(x)$$
$$p_n^*(x) - p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - p_n(x_i)) \cdot L_i^{(n)}(x)$$
$$|p_n^*(x) - p_n(x)| \leq \lambda_n(x) \cdot \max_{0\leq i\leq n} |f(x_i) - p_n(x_i)|$$
$$\|p_n^* - p_n\| \leq \Lambda_n(x) \cdot E_n(f)$$

$$\|f-p_n^*\| \leq \|f-p_n\| + \|p_n - p_n^*\|$$
$$\|f-p_n^*\| \leq (1+\Lambda_n(x)) \cdot E_n(f)$$

PHILIPS – II (3)

- Modulo di continuità: a $f \in C[a,b]$ viene associata $w \in C[a,b]$ tale per cui $w(\delta) = w(f;[a,b];\delta) = \sup_{|x_1-x_2|\le\delta} |f(x_1)-f(x_2)|$
- (Th. 2.6.1) $0 < \delta_1 \le \delta_2 \Rightarrow w(\delta_1) \le w(\delta_2)$
- (Th. 2.6.2) f unif. continua su $[a,b] \Leftrightarrow \lim_{\delta\to 0} w(\delta) = 0$
- (Th. 2.6.3) $f \in C[-1,1]$, $E_n(f) = \|f-p\|_\infty \Rightarrow E_n(f) \le 6 \cdot w(\frac{1}{n})$
- (Th. 2.6.4) $f \in C^k[-1,1] \Rightarrow E_n(f) \le \frac{c}{n^k} \cdot w_k\left(\frac{1}{n-k}\right)$ $\quad c = \frac{6^{k+1} e^k}{1+k}$

PHILIPS – VII

- Operatore di Bernstein: $B_n(f;x) = \sum_{r=0}^{n} f(\frac{r}{n}) \cdot \binom{n}{r} \cdot x^r \cdot (1-x)^{n-r}$
- (Th 7.1.1) Può essere espresso nella forma:

$$B_n(f;x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot \Delta^r \cdot f(0) \cdot x^r$$ con Δ diff. forward di step $h = 1/n$.

Dim 7.1.1

- $$B_n(f;x) = \sum_{r=0}^{n} f(\tfrac{r}{n}) \cdot \binom{n}{r} \cdot x^r \cdot (1-x)^{n-r}$$
$$= \quad '' \quad \cdot \sum_{s=0}^{n-r} (-1)^s \cdot \binom{n-r}{s} \cdot x^s$$

- Ponendo $t = r+s$, valgono:

$$\sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} = \sum_{t=0}^{n} \sum_{r=0}^{t} \qquad \binom{n}{r}\binom{n-r}{s} = \binom{n}{t}\binom{t}{r}$$

- per cui possiamo scrivere:

$$\sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} \cdot x^t \cdot \sum_{r=0}^{t} (-1)^{t-r} \cdot \binom{t}{r} \cdot f(\tfrac{r}{n}) = \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} \cdot \Delta^t \cdot f(0) \cdot x^t$$

- (Th 7.1.2) $B'_{n+1}(f;x) = (n+1) \sum_{r=0}^{n} \Delta f\left(\frac{r}{n+1}\right) \binom{n}{r} \cdot x^r \cdot (1-x)^{n-r}$

con Δ applicato con $h = 1/(n+1)$

- (Th 7.1.7) f convessa su $[a,b] \Leftrightarrow$ differenze divise seconde non negative

Dim 7.1.7 Consideriamo $f[x_0,x_1,x_2]$, con $a \le x_0 < x_1 < x_2 \le b$.

Dalla relazione di ricorrenza per le differenze divise:

$$f[x_0,x_1,x_2] \ge 0 \Leftrightarrow f[x_1,x_2] \ge f[x_0,x_1]$$

[moltiplicando per $(x_2-x_1)(x_1-x_0)$] $\Leftrightarrow (x_1-x_0)(f(x_2)-f(x_1)) \ge (x_2-x_1)(f(x_1)-f(x_0))$

$\Leftrightarrow (x_1-x_0) f(x_2) + (x_2-x_1) f(x_0) \ge (x_2-x_0) f(x_1)$

[dividendo per (x_2-x_0), $\lambda := \frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}$] $\Leftrightarrow \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_2) \ge f(\lambda x_0 + (1-\lambda) x_2)$

• (Th 7.1.8) $f(x)$ convessa su $[0,1]$ $\Rightarrow$ $B_n(f;x) \geq f(x)$ $0 \leq x \leq 1$

• (Th 7.1.9) " $\Rightarrow$ $B_{n-1}(f;x) \geq B_n(f;x)$ "

È stretta per $0 < x < 1$ se f non è lineare in ogni intervallino.

• (Th 7.1.10) $f(x)$ limitata su $[0,1]$ $\Rightarrow$ $\forall x \,/\, f''(x)$ esiste:

$$\lim_{n \to \infty} n\,(B_n(f;x) - f(x)) = \frac{1}{2}\, x\,(1-x) \cdot f''(x)$$

• (Th 7.1.11) f limitata su $[0,1]$ $\Rightarrow$ $\| f - B_n f \| \leq \frac{3}{2}\, \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

INTERPOLAZIONE SECONDO LINEA SPEZZATA (III - 31)

- $a = \tau_1 < \dots < \tau_n = b$ partizione di nodi
- $I_2 g(x) := g(\tau_i) + (x-\tau_i)[\tau_i, \tau_{i+1}]_g \qquad \tau_i \le x \le \tau_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1$

ma $g(x) = g(\tau_i) + (x-\tau_i)[\tau_i, \tau_{i+1}]_g + (x-\tau_i)(x-\tau_{i+1})[\tau_i, \tau_{i+1}, x]_g$

dunque $g(x) - I_2 g(x) = (x-\tau_i)(x-\tau_{i+1}) \cdot [\tau_i, \tau_{i+1}, x]_g$

$$|g(x) - I_2 g(x)| \le (\Delta\tau_i/2)(\Delta\tau_i/2) \cdot \max_{\tau_i \le \xi \le \tau_{i+1}} |g''(\xi)/2|$$

$$\| g - I_2 g \| \le \frac{1}{8} \cdot |\tau|^2 \cdot \|g''\| \qquad \text{se } |\tau| := \max_i \Delta\tau_i$$

QUASI OTTIMALITÀ DI QUESTA APPROSSIMAZIONE (III - 32)

- $I_2 f = f \quad \forall f \in S_2$
- $\|I_2 g\| = \max_i |(I_2 g)(\tau_i)| = \max_i |g(\tau_i)| \le \|g\|$

da cui:

- $\|g - I_2 g\| = \|(g-f) - I_2(g-f)\| \le \|g-f\| + \|I_2(g-f)\| \le \|g-f\| + \|g-f\| \quad \forall f \in S_2$
- $\text{dist}(g, S_2) \le \|g - I_2 g\| \le 2 \cdot \text{dist}(g, S_2)$

MINIMI QUADRATI CON LINEE SPEZZATE (III - 32)

$$H_i(x) := \begin{cases} (x-\tau_{i-1})/(\tau_i - \tau_{i-1}) & \tau_{i-1} \le x \le \tau_i \\ (\tau_{i+1}-x)/(\tau_{i+1}-\tau_i) & \tau_i \le x < \tau_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

funzioni a cappello $H_i(\tau_j) = \delta_{ij}$

H_i è base per S_2: ogni spezzata con ~~quei~~ nodi τ_i è c.l. unica di queste

- $f = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i) H_i \qquad \forall f \in S_2$
- $I_2 g = \sum_{i=1}^{n} I_2 g(\tau_i) H_i = \sum_{i=1}^{n} g(\tau_i) H_i$

$L_2 g$ approssimazione ai minimi quadrati: $L_2 g \in S_2$ e

$$\int |g(x) - L_2 g(x)|^2 dx = \min_{f \in S_2} \int |g(x) - f(x)|^2 dx$$

Poiché $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j H_j$, il problema è equivalente a trovare il minimo di:

$$\int |g(x) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j H_j(x)|^2 dx$$

annullando le derivate parziali. Ne risulta il sistema lineare:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\int H_i(x) H_j(x) dx \right] \alpha_j = \int H_i(x) g(x) dx \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\left(\frac{1}{6}\Delta\tau_{i-1}\right)\alpha_{i-1} + \frac{1}{3}(\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i)\alpha_i + \left(\frac{1}{6}\Delta\tau_i\right)\alpha_{i+1} = \int H_i g \, dx := \beta_i \qquad i = 1, \dots, n$$

tridiagonale e a diagonale strettamente dominante $\Rightarrow$ non singolare

gli α_j trovati sono tali che $L_2 g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j H_j$

TEOREMA 12 (III - 34)

- $\|L_2 g\| \leq 3 \cdot \|g\|$

Dim.

- Notiamo innanzitutto che $\|L_2 g\| = \max_i |(L_2 g)(\tau_i)| = \max_i |\alpha_i|$, ovvero che il max viene raggiunto in corrispondenza di un nodo.
- Moltiplichiamo il sistema ottenuto prima per $\frac{6}{\Delta_{i-1} + \Delta_i}$:

$$\frac{\Delta\tau_{i-1}}{\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i} \alpha_{i-1} + 2 \cdot \alpha_i + \frac{\Delta\tau_i}{\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i} \alpha_{i+1} = 3 \hat{\beta}_i$$

- Se j è tale per cui $|\alpha_j| = \|\alpha\| := \max_i |\alpha_i|$, allora:

$$|2\alpha_j| = \left|3 \hat{\beta}_j - \frac{\alpha_{j-1} \Delta\tau_{j-1} + \alpha_{j+1} \Delta\tau_j}{\Delta\tau_{j-1} + \Delta\tau_j}\right| \leq 3 \cdot |\hat{\beta}_j| + |\alpha_j|$$

da cui $|\alpha_j| = \|\alpha\| \leq 3 \cdot |\hat{\beta}_j| \leq 3 \cdot \|\hat{\beta}\|$

- A secondo membro invece:

$$\hat{\beta}_i = \int \hat{H}_i(x)\, g(x)\, dx$$

con $\hat{H}_i(x) := \frac{2}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} \cdot H_i(x)$

- positiva in $\tau_{i-1} < x < \tau_{i+1}$ • zero altrove • tale che $\int \hat{H}_i(x)\, dx = 1$
- per cui $\|\hat{\beta}_i\| = \left|\int \hat{H}_i(x)\, g(x)\, dx\right| \leq \int \hat{H}_i(x) \cdot \max\{|g(x)| : \tau_{i-1} \leq x \leq \tau_{i+1}\}$
$\leq \|g\|$

Dunque $\|\alpha\| \leq 3 \cdot \|g\|$, $\implies$ $\|L_2 g\| \leq 3 \cdot \|g\|$

- $\|g - L_2 g\| \leq 4 \cdot \operatorname{dist}(g, S_2)$

Dim.

$$\|g - L_2 g\| = \|(g-f) - L_2(g-f)\| \leq \|g-f\| + \|L_2(g-f)\|$$

$$\leq \|g-f\| + 3 \cdot \|g-f\| = 4 \cdot \|g-f\| \quad \forall f \in S_2$$

GOOD MESHES (III - 35)

Abbiamo già visto che, posto $|\tau| := \max_i |\Delta\tau_i|$: $\|g - I_2 g\| \le \frac{1}{8}|\tau|^2 \cdot \|g''\|$

$\|g - I_2 g\| \le \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{b-a}{n-1}\right)^2 \cdot \|g''\| = O(n^{-2})$ caso di spaziatura uniforme

Se rilasciamo ora l'ipotesi $g \in C^2$, generalizzando nel caso di una generica g continua, possiamo ancora ridurre a piacere l'errore diminuendo il passo $|\tau| = \max_i \Delta\tau_i$, infatti:

- $(I_2 g)(x) = \dfrac{(\tau_{i+1} - x) \cdot g(\tau_i) + (x - \tau_i) \cdot g(\tau_{i+1})}{\Delta\tau_i}$
- $\dfrac{((\tau_{i+1} - x) + (x - \tau_i))}{\Delta\tau_i} = \dfrac{|\tau_{i+1} - x| + |x - \tau_i|}{\Delta\tau_i} = 1$

da cui:

$$|g(x) - I_2 g(x)| \le \frac{1}{\Delta\tau_i}\left((\tau_{i+1} - x) \cdot |g(x) - g(\tau_i)| + (x - \tau_i) \cdot |g(x) - g(\tau_{i+1})|\right)$$
$$= \frac{\tau_{i+1} - x}{\tau_{i+1} - \tau_i} \cdot |g(x) - g(\tau_i)| + \frac{x - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} \cdot |g(x) - g(\tau_{i+1})|$$
$$\le \max_{\tau_i \le x \le \tau_{i+1}} \max\{|g(x) - g(\tau_i)|, |g(x) - g(\tau_{i+1})|\}$$
$$\le \omega(g; \Delta\tau_i) \le \omega(g; |\tau|) \xrightarrow[|\tau| \to 0]{} 0$$

Teorema:

$g \in C^2(a,b)$, $|g''|$ monotona in intorni di a e di b, $\int_a^b |g''(x)|^{1/2} dx < \infty$,

$\tau_2 < \ldots < \tau_{n-1}$ scelti in maniera tale che

$$\int_a^{\tau_i} |g''(x)|^{1/2} dx = \frac{i-1}{n-1} \cdot \int_a^b |g''(x)|^{1/2} dx \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \|g - I_2 g\| = O(n^{-2})$$

INTERPOLAZIONE CUBICA A TRATTI (IV − 39)

dati $g(\tau_1), \dots, g(\tau_n)$ partizione di nodi $a = \tau_1 < \dots < \tau_n = b$

si costruisce $f(x)$ in maniera tale che:

$f(x) = P_i(x) \qquad \tau_i \le x \le \tau_{i+1} \qquad P_i \in \Pi_{<4} \quad i = 1, \dots, n-1$

dove P_i soddisfa:

- $P_i(\tau_i) = g(\tau_i) \qquad P_i(\tau_{i+1}) = g(\tau_{i+1})$
- $P_i'(\tau_i) = s_i \qquad P_i'(\tau_{i+1}) = s_{i+1}$

f siffatta coincide con g nei nodi ed è $C^1[a,b]$

In forma di Newton sarà:

$$P_i(x) = P_i(\tau_i) + (x-\tau_i)\cdot[\tau_i,\tau_i]\cdot P_i + (x-\tau_i)^2\cdot[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1}]P_i + (x-\tau_i)^2\cdot(x-\tau_{i+1})\cdot[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1},\tau_{i+1}]P_i$$

e in termini di potenze shiftate:

$$P_i(x) = c_{1,i} + c_{2,i}\cdot(x-\tau_i) + c_{3,i}\cdot(x-\tau_i)^2 + c_{4,i}\cdot(x-\tau_i)^3$$

con:

$c_{1,i} = P_i(\tau_i) = g(\tau_i)$

$c_{2,i} = P_i'(\tau_i) = s_i$

$c_{3,i} = P_i''(\tau_i)/2 = [\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1}]_{P_i} - \Delta\tau_i\left([\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1},\tau_{i+1}]_{P_i}\right)$

$\qquad = ([\tau_i,\tau_{i+1}]_g - s_i)/\Delta\tau_i - c_{4,i}\cdot\Delta\tau_i$

$c_{4,i} = P_i'''(\tau_i)/6 = (s_i + s_{i+1} - 2[\tau_i,\tau_{i+1}]_g)/(\Delta\tau_i)^2$

A seconda della scelta degli s_i abbiamo diversi tipi di interpolazione.

- Hermite: $s_i = g'(\tau_i)$

  da cui $|g(x) - f(x)| = |(x-\tau_i)^2(x-\tau_{i+1})^2\cdot[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1},\tau_{i+1},x]_g|$

  $\le (\Delta\tau_i/2)^4 \cdot \max_{\tau_i\le\xi\le\tau_{i+1}} |g^{(4)}(\xi)|/4!$

  $\|g-f\| \le \frac{1}{384}\cdot|\tau|^4\cdot\|g^{(4)}\| \qquad$ se $g \in C^4[a,b]$

  $\|g-f\| = O(n^{-4})$ coi nodi equispaziati

- Bessel: $O(|\tau|^3)$

  $s_i = \dfrac{\Delta\tau_i[\tau_{i-1},\tau_i]_g + \Delta\tau_{i-1}\cdot[\tau_i,\tau_{i+1}]_g}{\Delta\tau_i + \Delta\tau_{i+1}}$

  ovvero $s_i = p'(\tau_i)$ dove $\partial p = 2$, $p = g$ in $\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}$.

- Akima: $s_i = \dfrac{w_{i+1}[\tau_{i-1},\tau_i]_g + w_{i-1}\cdot[\tau_i,\tau_{i+1}]_g}{w_{i+1} + w_{i-1}}$

  dove $w_j = |[\tau_j,\tau_{j+1}]_g - [\tau_{j-1},\tau_j]_g|$

  $O(|\tau|^2)$, non additivo

INTERPOLAZIONE SPLINE CUBICA (IV - 43)

Consiste nella scelta degli s_i in maniera tale che f sia C^2

In questo caso:

$P''_{i-1}(\tau_i) = P''_i(\tau_i)$

$2 \cdot c_{3,i-1} + 6 \cdot c_{4,i-1} \cdot \Delta\tau_{i-1} = 2 \cdot c_{3,i}$

$$\frac{2([\tau_{i-1}, \tau_i]_g - s_{i-1})}{\Delta\tau_{i-1}} + 4 \cdot c_{4,i-1} \cdot \Delta\tau_{i-1} = \frac{2([\tau_i, \tau_{i+1}]_g - s_i)}{\Delta\tau_i} - 2 \cdot c_{4,i} \cdot \Delta\tau_i$$

il che porta al sistema lineare:

$s_{i-1} \cdot \Delta\tau_i + s_i(2 \cdot \Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i) + s_{i+1} \cdot \Delta\tau_{i-1} = b_i \qquad i = 2, \dots, n-1$

con $b_i := 3(\Delta\tau_i [\tau_{i-1}, \tau_i]_g + \Delta\tau_{i-1} [\tau_i, \tau_{i+1}]_g)$

supposto di avere scelto s_1 e s_n, questo è un sistema tridiagonale di $(n-2)$ equazioni in $(n-2)$ incognite, dotato di dominanza diagonale per righe, dunque determinato.

La diversa scelta di s_1 e s_n porta ai vari tipi di spline:

(i) $s_1 = g'(\tau_1) \qquad s_n = g'(\tau_n)$ possibile se g' nota in τ_1 e in τ_n.

In questo caso $f := I_4 g$ coincide con g in $\tau_0, \dots, \tau_{n+1}$ ed è detta essere la spline cubica completa

(ii) • $2s_1 + s_2 = 3[\tau_1, \tau_2]_g + (\Delta\tau_1) g''(\tau_1)/2$

• $s_{n-1} + 2s_n = 3[\tau_{n-1}, \tau_n]_g + (\Delta\tau_{n-1}) g''(\tau_n)/2$

si forza $f'' = g''$ alle estremità

(iii) $f''(\tau_1) = f''(\tau_n) = 0$ spline naturali

(iv) $s_1, s_n \,/\, P_1 = P_2, \; P_{n-2} = P_{n-1}$ spline not-a-knot

SPLINE CUBICHE COMPLETE (V - 51)

$\cdot\ a = \tau_0 = \tau_1 < \dots < \tau_n = \tau_{n+1} = b$ partizione di nodi

Lemma (1)

$g \in C^2 \implies \int_a^b e''(x) \cdot \varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in S_2$

Dim.

$h(x) = h(a) + (x-a)\, h'(a) + \int_a^x (x-t) \cdot h''(t)\, dt$

$[\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}]_h = [\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}] \cdot \int_a^x (x-t) \cdot h''(t)\, dt$ diff. divise seconde

$[\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}]_h = \int_a^b [\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}] \cdot (x-t)_+ \cdot h''(t)\, dt = \int_a^b \hat{H}_i(t) \cdot h''(t)\, dt / 2$

dove $\hat{H}_i(t)$ è definita come precedentemente.

se $h \equiv e$: $[\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}]_e = \int_a^b \hat{H}_i(t) \cdot e''(t)\, dt = 0$ poiché $e=0$ in $\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}$

ma allora $e'' \perp \hat{H}_i \ \forall i \implies e'' \perp \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \hat{H}_j$ per linearità $\implies e'' \perp \varphi$

Teorema (5 - Pitagora)

$$\int_a^b [g''(x)]^2\, dx = \int_a^b [(I_4 g)''(x)]^2\, dx + \int_a^b [(g - I_4 g)''(x)]^2\, dx$$

Infatti:

$$\int_a^b [g''(t)]^2\, dt = \int_a^b [(I_4 g)''(t) + e''(t)]^2\, dt$$

$$= \int_a^b [(I_4 g)''(t)]^2\, dt + \underbrace{2 \cdot \int_a^b (I_4 g)''(t) \cdot e''(t)\, dt}_{\text{vale 0 per il lemma (1)}} + \int_a^b [e''(t)]^2\, dt$$

Corollario (7)

$I_4 g$ minimizza $\int_a^b [f''(t)]^2\, dt$ tra tutte le $f \in C^2$ coincidenti con g nei $(\tau_i)_0^{n+1}$

Dim.

Se $f = g$ nei nodi, allora $I_4 f = I_4 g$, dunque:

$$\int_a^b [f''(t)]^2\, dt = \int_a^b [(I_4 g)''(t)]^2\, dt + \int_a^b [f''(t) - (I_4 g)''(t)]^2\, dt$$

$$\geq \int_a^b [(I_4 g)''(t)]^2\, dt$$

con l'uguaglianza solo nel caso in cui $f'' = (I_4 g)''$,

ovvero $f = I_4 g$ per le condizioni di interpolazione.

Corollario (9)

$(I_4 g)'' = L_2(g'')$

Dim.

Sia $s \in S_2$, $h(x) := \int_a^b (x-t)_+ \, s(t)\, dt$. Allora:

- $h'' = s$, $h \in S_4 \Rightarrow I_4 h = h$, $(I_4 h)'' = h'' = s$, $h - I_4 h = 0$

Applicando il teorema (5) a $g-h$ otteniamo:

$$\int_a^b [g''(x) - s(x)]^2 \, dx = \int_a^b [((I_4 g)'' - s)(x)]^2 \, dx + \int_a^b [(g - I_4 g)''(x)]^2 \, dx$$

$$\geq \int_a^b [g''(x) - (I_4 g)''(x)]^2 \, dx$$

con l'uguaglianza se e solo se $(I_4 g)'' = s$. Dunque $L_2(g'') = I_4 g''$

Errori commessi:

- $\|(I_4 g)''\| \leq 3 \cdot \|g''\|$
- $\|e''\| = \|g'' - (I_4 g)''\| \leq 4 \cdot \mathrm{dist}(g'', S_2) \leq \frac{1}{2} \cdot |\tau|^2 \cdot \|g^{(4)}\|$ se $g \in C^4$

da cui possiamo limitare l'errore di interpolazione notando che:

$$e(x) = e(\tau_i) + (x - \tau_i) \cdot [\tau_i, \tau_{i+1}]_e + (x-\tau_i)(x-\tau_{i+1}) [\tau_i, \tau_{i+1}, x]_e$$

$$= 0 + 0 + (x-\tau_i)(x-\tau_{i+1}) \, e''(\xi_x)/2$$

$$|e(x)| \leq (\Delta\tau_i/2)^2 \cdot \max_{\tau_i \leq \xi \leq \tau_{i+1}} |e''(\xi)|/2$$

$$\|e\| \leq \frac{1}{8} \cdot |\tau|^2 \cdot \|e''\|$$

$$\|e\| \leq \frac{1}{8} \cdot |\tau|^2 \cdot 4 \cdot \mathrm{dist}(g'', S_2)$$

$$\|e\| \leq \frac{1}{2} \cdot |\tau|^2 \cdot \mathrm{dist}(g'', S_2)$$

$$\left[\begin{array}{ll} \|e\| \leq \frac{1}{16} \cdot |\tau|^4 \cdot \|g^{(4)}\| & \text{per l'equazione III. 2} \\ \|e\| \leq \frac{5}{384} \cdot |\tau|^4 \cdot \|g^{(4)}\| & \text{migliore costante possibile} \end{array}\right.$$

$$\|e\| \leq \frac{19}{8} \cdot |\tau| \cdot \mathrm{dist}(g', S_3) \quad \text{se } g \in C^1$$

Errori sulle derivate:

$$\left[\begin{array}{ll} \|e'\| \leq \frac{19}{4} \cdot \mathrm{dist}(g', S_3) & \\ \max_i |e'(\tau_i)| \leq \frac{1}{24} \cdot |\tau|^3 \cdot \|g^{(4)}\| & \\ \max_i |e'(\tau_i)| \leq \frac{1}{60} \cdot |\tau|^4 \|g^{(5)}\| & (\tau_i)_i \text{ spaziatura uniforme} \\ \|e'\| \leq \frac{1}{24} \cdot |\tau|^3 \cdot \|g^{(4)}\| & \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \|e''\| \leq 4 \cdot \mathrm{dist}(g'', S_2) \leq \frac{1}{2} |\tau|^2 \cdot \|g^{(4)}\| \\ \|e''\| \leq \frac{3}{8} \cdot |\tau|^2 \cdot \|g^{(4)}\| \end{array}\right.$$

$$\left[\; \|e'''\| \leq \frac{1}{2}(M_\tau + 1/M_\tau) \cdot |\tau| \cdot \|g^{(4)}\| \quad \text{dove } M_\tau = \frac{|\tau|}{\min_{i=1,\dots,n-1} \Delta\tau_i} \right.$$

FUNZIONI POLINOMIALI A TRATTI (VII − 69)

$f(x) := P_i(x) \qquad \xi_i < x < \xi_{i+1} \qquad i = 1, \dots, l \qquad (\xi_i)_1^{l+1}$ strett. crescente

$f(\xi_i) := f(\xi_i^+) \qquad i = 2, \dots, l$ ma è una scelta arbitraria.

- $\Pi_{<k,\xi}$ pp functions di ordine k (grado $< k$) e nodi $(\xi_i)_i$
- $\dim(\Pi_{<k,\xi}) = kl$: ogni elemento è l parti polinomiali di k coeff. ognuno
- $D^j f$: pp function di ordine $k-j$ con stessi $(\xi_i)_i$ e composta dalle derivate delle parti di polinomio che compongono f
- $f(x) - f(a) = \int_a^x (Df)(t)\,dt \quad \forall x \iff f$ è continua

La PP-form è fondamentalmente composta da:

(i) gli interi k, l, che costituiscono ordine e numero di parti

(ii) $\xi_1, \dots, \xi_{l+1}$ sequenza crescente di nodi

(iii) $(c_{ji})_{j=1}^{k}{}_{i=1}^{l}$ matrice delle derivate successive destre nei nodi

$$c_{ji} := D^{j-1} f(\xi_i^+), \qquad j = 1, \dots, k \qquad i = 1, \dots, l$$

- $D^j f(x) = \sum_{m=j}^{k-1} c_{m+1,i} (x - \xi_i)^{m-j} / (m-j)!$

con:

$$\begin{cases} i = 1 & x < \xi_2 \\ 1 < i < l & \xi_i \le x < \xi_{i+1} \\ i = l & \xi_l \le x \end{cases}$$

In questo modo:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} c(i,j) \cdot (x - \xi_i)^{k-j} \qquad \xi_i \le x < \xi_{i+1}$$

$$D^j f(x) = \sum_{m=j}^{k-1} c_{m+1,i} (x - \xi_i)^{m-j} \cdot \frac{m!}{(m-j)!}$$

SPAZI $\Pi_{<k,\xi,\nu}$ E BASI DI POTENZE TRONCATE (VIII-79)

- Esempio: può essere utile approssimare un istogramma con una curva regolare, in maniera tale che per esempio, posti τ_i i nodi, valga: $\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(x)\,dx = h_i \cdot \Delta\tau_i$, con $f \in \Pi_{<3,\xi} \cap C^1$, $\xi \equiv \tau$
- Se g è regolare e si annulla fuori da $[\tau_1, \tau_{n+1}]$, dovrà essere $g^{(j)}(\tau_1) = g^{(j)}(\tau_{n+1}) = 0$, $j = 0, 1, \dots$, fino al grado di regolarità di g, per cui si impone anche: $f(\tau_1) = f(\tau_{n+1}) = 0$
- Il sistema risultante ha $n+2$ condizioni di interpolazione (interpolazione in τ_1, τ_{n+1}; eguaglianza delle aree in $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ $1 \le i \le n$) e $2n-2$ condizioni omogenee (continuità di f e Df in τ_i $2 \le i \le n-1$), per un totale di $3n$ equazioni in $3n$ incognite (i coefficienti polinomiali)
- Per risolvere le equazioni omogenee, che non dipendono da g, può essere utile trovare una base per f / $f = \sum_j \alpha_j \varphi_j$.
- Assumiamo che f abbia un certo numero di derivate continue.

  Definiamo $\text{jump}_\alpha f := \text{jump}(f, \alpha) := f(\alpha^+) - f(\alpha^-)$

  Le condizioni saranno allora: $\text{jump}_{\xi_i} D^{j-1} f = 0$ $\quad j = 1, \dots, \nu_i$, $i = 2, \dots, \ell$

  ν_i conta le condizioni di continuità in ξ_i

  $\bar{\nu}$ è il vettore delle stesse in $\bar{\xi}$

  Nell'esempio precedente, nei nodi la regolarità è C^1, per cui $\bar{\nu} = \bar{2} := (2, 2, \dots, 2)$

  Chiamiamo il sottospazio di $\Pi_{k,\xi}$, che soddisfa le condizioni di regolarità indicate dal vettore, $\Pi_{k,\xi,\nu}$

  Definiamo ora, per $j = 0, \dots, k-1$

$$\lambda_{ij} f := \begin{cases} D^j f(\xi_1) & i = 1 \\ \text{jump}_{\xi_i} D^j f & i = 2, \dots, \ell \end{cases}$$

$$\varphi_{ij}(x) := \begin{cases} (x - \xi_1)^j / j! & i = 1 \\ (x - \xi_i)_+^j / j! & i = 2, \dots, \ell \end{cases}$$

- $\varphi_{ij} \in \Pi_{<k,\xi}$
- $\lambda_{ij} \varphi_{rs} = \delta_{ir} \delta_{js} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = r,\ j = s \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow (\varphi_{ij})$ è l.i.
- (φ_{ij}) sono in numero di $k\ell$

Dunque formano una base di $\Pi_{<k,\xi}$

- $f \in \Pi_{<k,\xi}$ ha un'unica rappresentazione come $f = \sum_{ij} (\lambda_{ij} f)\varphi_{ij}$

più esplicitamente:

$$f(x) = \sum_{j<k} f^{(j)}(\xi_1)(x-\xi_1)^j / j! + \sum_{i=2}^{\ell} \sum_{j<k} (\text{jump}_{\xi_i} D^j f)(x-\xi_i)_+^j / j!$$

Se ora richiamiamo la precedente condizione

$$\text{jump}_{\xi_i} D^{j-1} f = 0, \quad j = 1, \dots, \nu_i \qquad i = 2, \dots, \ell$$

- notiamo che, solo se $j = \nu_i, \dots, k-1$ (sempre $i = 2, \dots, \ell$), il secondo addendo non si annulla, per cui sotto queste restrizioni otteniamo una base per $\Pi_{<k,\xi,\nu}$:

$$f = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=\nu_i}^{k-1} \alpha_{ij} \varphi_{ij} \quad \text{in un unico modo}$$

RAPPRESENTAZIONE DI PP-FUNCTIONS TRAMITE B-SPLINES (IX - 87)

- j-esima B-spline di ordine k per la sequenza di nodi $t := (t_j)$

$$B_{j,k,t}(x) := (t_{j+k} - t_j) \cdot [t_j, \dots, t_{j+k}](\cdot - x)_+^{k-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= [t_{j+1}, \dots, t_{j+k}](\cdot - x)_+^{k-1} - [t_j, \dots, t_{j+k-1}](\cdot - x)_+^{k-1}$$

- $B_{j,k,t}(x) = 0$ se $x \notin [t_j, t_{j+k}]$

infatti, per tali x, $g := (\cdot - x)_+^{k-1}$ è un polinomio di ordine k per $\cdot \in [t_j, t_{j+k}]$, e quindi $[t_j, \dots, t_{j+k}]_g = 0$

- $M_{j,k,t}(x) = \dfrac{k}{t_{j+k} - t_j} B_{j,k,t}(x)$ (Curry - Schoenberg)

SEQUENZE DI NODI PARTICOLARI (IX - 89)

- uniforme: $t = \mathbb{Z} = (\dots, -1, 0, 1, 2, \dots) \Rightarrow$ B-spline cardinali

$$B_{j,k,\mathbb{Z}}(x) = \sum_{r=0}^{k} (-)^{k-r} \binom{k}{r} (r - x - j)_+^{k-1} / (k-1)!$$

- binaria: $t = \mathbb{B} = (\dots, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots) \Rightarrow$ B-spline di Bernstein / Bezier

$$b_{j,k-1}(x) := \binom{k-1}{j} x^{k-1-j} (1-x)^j \qquad j = 0, \dots, k-1$$

$\sum_{j=0}^{k-1} f\left(\frac{j}{k-1}\right) b_{j,k-1}$ al variare di j è base per $\Pi_{<k}$

RELAZIONE DI RICORRENZA DI COX - DE BOOR (IX - 89)

- $B_{j,1} = (\cdot - t_{j+1})^0_+ - (\cdot - t_j)^0_+ = \begin{cases} 1 & \text{se } t_j \le x < t_{j+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $B_{j,k} = w_{jk} \cdot B_{j,k-1} + (1 - w_{j+1,k}) \cdot B_{j+1,k-1}$ $\qquad w_{jk}(x) := \dfrac{x - t_j}{t_{j+k-1} - t_j}$

Dim.

- $(t - x)^{k-1}_+ = (t-x)(t-x)^{k-2}_+$
- $[t_j, \dots, t_{j+k}](\cdot - x)^{k-1}_+ = (t_j - x) \cdot [t_j, \dots, t_{j+k}](\cdot - x)^{k-2}_+ + 1 \cdot [t_{j+1}, \dots, t_{j+k}](\cdot - x)^{k-2}_+$

poiché $[t_j](\cdot - x) = (t_j - x)$, $[t_j, t_{j+1}](\cdot - x) = 1$, $[t_j, \dots, t_r](\cdot - x) = 0 \quad r > j+1$

- $[t_j, \dots, t_{j+k}](\cdot - x)^{k-1}_+ = \dfrac{x - t_j}{t_{j+k} - t_j} [t_j, \dots, t_{j+k-1}](\cdot - x)^{k-2}_+ + \dfrac{t_{j+k} - x}{t_{j+k} - t_j} \cdot [t_{j+1}, \dots, t_{j+k}](\cdot - x)^{k-2}_+$

poiché $(t_j - x)[t_j, \dots, t_{j+k}] = \dfrac{t_j - x}{t_{j+k} - t_j}([t_{j+1}, \dots, t_{j+k}] - [t_j, \dots, t_{j+k-1}])$

Moltiplicando per $(t_{j+k} - t_j)$ si giunge alla tesi.

PROPRIETÀ DELLE B-SPLINE

- (i) Cox - De Boor: appena vista
- (ii) positività: $B_{j,k,t}(x) > 0$ su $t_j < x < t_{j+k}$

Dim. (per induzione)

$k = 1$ vero $B_{j,1}$ positiva su $t_j < x < t_{j+1}$ in quanto f caratteristica dell'intervallo

$k < r \Rightarrow$ positività di w_{jr} e $1 - w_{j+1,r}$ su $[t_j, t_{j+r}] \Rightarrow k = r$

- (iii) identità di Marsden: $S_{k,t}$ insieme delle c.l. di $B_{i,k,t}$ su i contiene i polinomi

Dim.

Proviamo che $(\cdot - \tau)^{k-1} = \sum_j \psi_{jk}(\tau) \cdot B_{jk}$, con $\psi_{jk}(\tau) := \prod_{i=j+1}^{j+k-1} (t_i - \tau)$.

Per $B_{j,k-1} \neq 0$, ovvero per $t_j < t_{j+k-1}$, sia $\alpha_j = \psi_{jk}(\tau)$, allora:

$$w_{jk}\, \alpha_j + (1 - w_{jk})\, \alpha_{j-1} = \psi_{j,k-1}(\tau) \cdot (w_{jk}(t_{j+k-1} - \tau) + (1 - w_{jk})(t_j - \tau))$$
$$= \psi_{j,k-1}(\tau)\, (\cdot - \tau)$$

dal momento che, per ogni funzione f, $w_{jk} \cdot f(t_{j+k-1}) + (1 - w_{jk}) \cdot f(t_j)$ è l'unica retta che interseca f in t_j e t_{j+k-1}, e deve essere uguale a f se, come in questo caso, f è una retta.

Procedendo allo stesso modo per induzione:

$$\sum_j \psi_{jk}(\tau)\, B_{jk} = (\cdot - \tau)^{k-1} \cdot \sum_j \psi_{j1}(\tau) \cdot B_{j1}$$

dove l'ultima somma vale 1, poiché $\psi_{j1} = 1$ e $\sum_j B_{j1} = 1$

PROPRIETÀ DELLE B-SPLINE (CONTINUA)

(iv) $\sum_j B_{jk} = 1$ su $I_{k,t}$ intervallo di base

(v) $\forall k > 1,\ \ell \in \Pi_{<2} \Rightarrow \ell = \sum_j \ell(t^*_{jk}) B_{jk}$

dove $t^*_{jk} := \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=j+1}^{j+k-1} t_i$ sono detti siti di Greville.

Dim.

$\forall p \in \Pi_{<k}$ può essere scritto come $p = \sum_j \lambda_{jk} p \cdot B_{jk}$,

dove $\lambda_{jk} f := \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-D)^{\nu-1} \psi_{jk}(\tau)}{(k-1)!} D^{k-\nu} f(\tau)$

Basta dividere Marsden per $(k-1)!$, derivarlo $\nu-1$ volte rispetto a τ, e scrivere p come $\sum_{\nu=1}^{k} \frac{(\cdot-\tau)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} D^{k-\nu} p(\tau)$.

A questo punto (iv) si prova ponendo $p \equiv 1$, mentre (v) si prova notando che $D^{k-2}\psi_{jk}$ è un polinomio lineare che si annulla in t^*_{jk}

(vi) t sequenza di nodi, $I = [a,b] \subseteq I_{k,t}$ contenente finiti t_i

$\Longrightarrow B := (B_{j,k,t|I} : B_{j,k,t|I} \neq 0)$

è base per $\Pi_{<k,\xi,\nu|I}$, con:

- ξ sequenza strettamente crescente contenente a, b, e ogni $t_i \in I$
- $\nu_i = k - \min(k, \#\{r : t_r = \xi_i\})$

Dim.

- Se t contiene nodi di molteplicità $> k$, la si riduce a k. Ciò rimuove solo le B-splines che sono 0, e non cambia la sequenza B.
- Si tolgano da t tutti i t_i per cui né B_i, né B_{i-k}, hanno supporto in I. Ancora una volta questo non cambia B.
- B consiste ora della restrizione a I di tutte le B-splines di ordine k per la sequenza di nodi t, con ogni ξ_i che compare esattamente $k-\nu_i$ volte in t, dunque la tesi discende dal teorema di Curry-Schoenberg.

B- FORM PER UNA PP FUNCTION (IX - 100)

(i) k ordine di f, $n = k\ell - \sum_i \nu_i$ numero di parametri lineari

(ii) $t = (t_i)_1^{n+k}$ vettore dei nodi

(iii) $\alpha = (\alpha_i)_1^n$ vettore dei coefficienti rispetto alla base $(B_i)_1^n$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i(x) \quad = \sum_{i=j-k+1}^{j} \alpha_i B_i(x) \qquad t_j \le x \le t_{j+1} \quad k \le j \le n$

ALTRE PROPRIETÀ DELLE B-SPLINE (IX - 102)

(vii) $f = \sum_j \lambda_{jk} f \; B_{jk}$

con $\lambda_{jk} f := \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-D)^{k-\nu} \cdot \psi_{jk}(\tau_j)}{(k-1)!} D^{\nu-1} f(\tau_j) \Rightarrow \lambda_{ik}(\sum_j \alpha_j B_j) = \alpha_i$

se $t_j^+ \le \tau_j \le t_{j+k}^-$, $\forall j$

Dim.

Proviamo che, $\forall i$, $\lambda_{ik} B_j = \delta_{ij}$ $\forall j$

Sia infatti $\tau_i \in [t_r^+, t_{r+1}^-]$; la cosa è banalmente soddisfatta per ogni $j \notin \{r-k+1, \dots, r\} =: J$.

Per $j \in J$, sia p_j il polinomio di ordine k che coincide con B_j su $[t_r, t_{r+1}]$. Allora $\lambda_{ik} B_j = \lambda_{ik} p_j$.

Ma anche $p_j = \sum_{s \in J} (\lambda_{sk} p_j) p_s$, e poiché i p_s sono linearmente indipendenti, $\lambda_{ik} p_\lambda = \lambda_{ik} B_j = \delta_{ij}$.

(viii) $D S_{k,t} = \{Df : f \in S_{k,t}\} = S_{k-1,t}$

$Df = \sum_j (\lambda_{j,k-1} Df) B_{j,k-1,t}$

dove $\lambda_{j,k-1} Df = \sum_{r=1}^{k-1} (-D)^{r-1} \psi_{j,k-1}(\tau) \cdot D^{k-1-r} \frac{Df(\tau)}{(k-2)!}$

confrontando con $\lambda_{jk} f = \sum_{r=1}^{k} (-D)^{r-1} \psi_{jk}(t) \cdot D^{k-r} \cdot \frac{f(\tau)}{(k-1)!}$

Poiché però $(t_{j+k-1} - \cdot) \psi_{j,k-1} = \psi_{jk}$

$(t_j - \cdot) \psi_{j,k-1} = \psi_{j-1,k}$

si ha che $(t_{j+k-1} - t_j) \psi_{j,k-1} = \psi_{jk} - \psi_{j-1,k}$

dunque $\lambda_{j,k-1} D = (k-1) \cdot \frac{\lambda_{jk} - \lambda_{j-1,k}}{t_{j+k-1} - t_j}$

da cui la proprietà di differenziazione:

$D(\sum_{j=r}^{s} \alpha_j B_{jk}) = (k-1) \cdot \sum_{j=r}^{s+1} \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j,k-1}$

ULTERIORI PROPRIETÀ DELLE B-SPLINE (XI - 131)

$t := (t_i)_1^{n+k}$, $t_i < t_{i+k}$ $\forall i$, $t_1 = \dots = t_k = a$, $t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = b$.

(ix) [convessità]

Per $t_i < x < t_{i+1}$, ($f := \sum_j \alpha_j B_j$ in x è una combinazione strettamente convessa delle k quantità $\alpha_{i+1-k}, \dots, \alpha_i$

Dim.

In quell'intervallo, $f(x) = \sum_{j=i-k+1}^{i} \alpha_j B_j(x)$, dove i $B_j(x)$ sono tutti non negativi e sommano all'unità.

In particolare, $\min\{\alpha_j\} \leq f(x) \leq \max\{\alpha_j\}$, dove $i-k+1 \leq j \leq i$

(x) [buon condizionamento]

$\exists\ D_{k,\infty}$, dipendente solo da k e non da t, tale per cui $\forall i$:

$|\alpha_i| \leq D_{k,\infty} \cdot \| \sum_j \alpha_j B_j \|_{[t_{i+1}, t_{i+k-1}]}$ dove $\|f\|_I = \sup_{x \in I} |f(x)|$

dove $D_{k,\infty} \leq k \cdot 2^{k-1}$, e si suppone che $D_{k,\infty} \sim 2^{k-\frac{3}{2}}$

DISTANZA DI UNA FUNZIONE CONTINUA DA $S_{k,t}$ (XII - 145)

$A_g := \sum_{i=1}^{n} g(\tau_i) \cdot B_i$

$(A_g)(\hat{x}) = \sum_{i=j+1-k}^{j} g(\tau_i) \cdot B_i(\hat{x})$

ma anche

$g(\hat{x}) = g(\hat{x}) = \sum_{i=j+1-k}^{j} B_i(\hat{x}) = \sum_{i=j+1-k}^{j} g(\hat{x}) \cdot B_i(\hat{x})$ poiché $\sum_{i=j+1-k}^{j} B_i(\hat{x}) = 1$

dunque:

$g(\hat{x}) - (A_g)(\hat{x}) = \sum_{i=j+1-k}^{j} (g(\hat{x}) - g(\tau_i)) \cdot B_i(\hat{x})$

$|g(\hat{x}) - (A_g)(\hat{x})| \leq \sum_{i=j+1-k}^{j} |g(\hat{x}) - g(\tau_i)| \cdot B_i(\hat{x})$

$\leq \max\{|g(\hat{x}) - g(\tau_i)| : j-k < i \leq j\}$

Scegliendo come $\tau_i = t_{i+\frac{k}{2}}$, $= \frac{1}{2}(t_{i+\frac{k-1}{2}} + t_{i+\frac{k+1}{2}})$ se k dispari:

$\max\{|g(\hat{x}) - g(\tau_i)| : j-k < i \leq j\}$

$\leq \max\{|g(x) - g(y)| : x, y \in [t_{j+1-\frac{k}{2}}, t_{j+1}]$ o $x, y \in [t_j, t_{j+k/2}]$

$\leq \omega\{g; \frac{1}{2} k |t|\}$

$\leq$ int$(\frac{1}{2}(k+1)) \cdot \omega\{g; |t|\}$

Allora $\|g - A_g\| \leq$ int$(\frac{1}{2}(k+1)) \cdot \omega\{g; |t|\}$ e

$\text{dist}(g, S_{k,t}) := \min\{\|g-s\| : s \in S_{k,t}\} \leq \text{const}_k\ \omega(g; |t|)$

DISTANZA DI UNA FUNZIONE REGOLARE DA $S_{k,t}$ (XII-148)

$\mathrm{dist}(g, S_{k,t}) = \mathrm{dist}(g-s, S_{k,t}) \qquad \forall s \in S_{k,t}$

$\mathrm{dist}(g, S_{k,t}) \leq \mathrm{const}_k \; \omega(g-s; |t|) \qquad \forall s \in S_{k,t} \cap C[a,b]$

$\mathrm{dist}(g, S_{k,t}) \leq \mathrm{const}_k \cdot |t| \cdot \|Dg - Ds\|$ " g,s deriv. a tratti con continuità

$\mathrm{dist}(g, S_{k,t}) \leq \mathrm{const}_k \cdot |t| \cdot \mathrm{dist}(Dg, S_{k-1,t})$ " g "

$\mathrm{dist}(g, S_{k,t}) \leq \mathrm{const}'_k \cdot |t| \cdot \omega(Dg; |t|)$ $\qquad \mathrm{const}'_k := \mathrm{const}_k \cdot \mathrm{const}_{k-1}$

g suff. regolare

ripetendo $\mathrm{dist}(g, S_{k,t}) \leq \mathrm{const}''_k \cdot |t|^2 \cdot \omega(D^2 g; |t|)$ $\qquad \mathrm{const}''_k := \mathrm{const}'_k \cdot \mathrm{const}_{k-2}$

in generale $\mathrm{dist}(g, S_{k,t}) \leq \mathrm{const}_{k,j} \cdot |t|^j \cdot \omega(D^j g; |t|)$ $\qquad j$ generico, $g \in C^j[a,b]$

e inoltre $\mathrm{dist}(g, S_{k,t}) \leq \mathrm{const}_{k,k-1} |t|^{k-1} \cdot \omega(D^{k-1} g; |t|) \leq \mathrm{const}_k |t|^k \cdot \|D^k g\| \quad j = k-1, \; g \in C^k[a,b]$

MIGLIOR ORDINE DI APPROSSIMAZIONE (XII-152)

$A g = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i g) B_i \qquad \mu_i$ funzionale lineare continuo su $C[a,b]$

$|\mu_i g| \leq \|\mu_i\| \cdot \|g\| \qquad$ per ogni $g \in C[a,b]$

$\|\mu_i\| := \sup \{ |\mu_i g| / \|g\| : g \in C[a,b] \}$

$\leq \|\mu_i\| \cdot \|g\|_{[t_i, t_{i+k}]} \qquad$ se μ_i ha supporto in $[t_i, t_{i+k}]$

Poiché però:

$A g = \sum_{i=j+1-k}^{j} (\mu_i g) B_i$ e $\sum_{i=j+1-k}^{j} B_i = 1, \; \forall i$ su $[t_j, t_{j+1}]$, $B_i \geq 0$

vale la limitazione:

$\|A g\|_{[t_j, t_{j+1}]} \leq (\max_i \|\mu_i\|) \cdot \|g\|_{[t_{j+1-k}, t_{j+k}]} \qquad \forall g \in C[a,b]$

Richiedendo ora che vengano riprodotti i polinomi di ordine k, ovvero:

$A p = p \qquad \forall p \in \Pi_{<k}$

si giunge al seguente teorema:

$A g$ approssimazione, B_i base di B-spline per $S_{k,t}$, t come al solito, μ_i funzionale lineare. Allora, se $A p = p$, $\forall p \in \Pi_{<k}$:

$\|g - A g\| \leq (1 + \max_i \|\mu_i\|) \cdot \mathrm{const}_k \|D^k g\| \cdot |t|^k \qquad \forall g \in C^{(k)}[a,b]$

Dim.

- $g - A g = (g-p) - A(g-p)$
- $\|g - A g\|_{[t_j, t_{j+1}]} \leq \|g-p\|_{[t_j, t_{j+1}]} + (\max_i \|\mu_i\|) \cdot \|g-p\|_{[t_{j+1-k}, t_{j+k}]}$

$\leq (1 + \max_i \|\mu_i\|) \cdot \|g-p\|_{[t_{j+1-k}, t_{j+k}]}$

Scegliendo ora p di ordine k in maniera tale da minimizzare $g-p$ su $[t_{j+1-k}, t_{j+k}]$, otteniamo che:

$\|g - A g\|_{[t_j, t_{j+1}]} \leq (1 + \max_i \|\mu_i\|) \cdot \mathrm{dist}(g, \Pi_{<k})_{[t_{j+1-k}, \ldots, t_{j+k}]}$

da cui la tesi.

SCHEMI VARI (XII - 154)

- ~~De~~ Boor 1968 :
  - $\mu_i g = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\, g(\tau_{ij})$
  - $\tau_{i1}, \dots, \tau_{ik}$ estremi del polinomio di Chebyshev di ordine k per il più grande intervallo in $[t_{i+1}, t_{i+k-1}]$ della forma $[t_j, t_{j+1}]$
  - β_{ij} scelti tali per cui $Ap = p \quad \forall p \in \Pi_{<k}$

- de Boor - Fix 1973 : $\quad Qg = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i g)\, B_i \qquad \lambda_i$ funzionale duale

Teor.

$\tau_i = t_{i+\frac{k}{2}}$, t al solito, $g \in C^{(k-1)}[a,b]$:

$$\| D^j g - D^j Qg \| \leq \text{const}_{k,j} (m_t)^{(2j-k)} + |t|^{k-j-1} \cdot \omega(D^{k-1} g; |t|)$$

dove $\quad m_t := \max\left\{ \frac{\Delta t_r}{\Delta t_s} : |r-s| = 1,\ k \leq r,\ s \leq n \right\}$