PROCESSI STOCASTICI 2011

- Testi di riferimento:
  - Karlin, Taylor - A first course in stochastic processes
    - A second " "

EQUAZIONE DEL CALORE

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$$

Vogliamo investigare:

- esistenza e unicità soluzione
- metodi per ottenere la soluzione, preferibilmente analitici, eventualmente numerici.

A tale scopo ci risultano essere necessari alcuni metodi per risolvere equazioni differenziali a derivate parziali:

- metodo della trasformata di Fourier, che riduce la PDE ad una ODE.
- separazione delle variabili
- metodo delle caratteristiche
- metodi della geometria differenziale
- cambiamento di variabili
- Simulazione

INTRODUZIONE

Consideriamo la solita terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con $\mathcal{A}$ σ-algebra generata dall'insieme di eventi $A \subset \Omega$ $(\omega \in A\ ;\ \omega \in \Omega)$

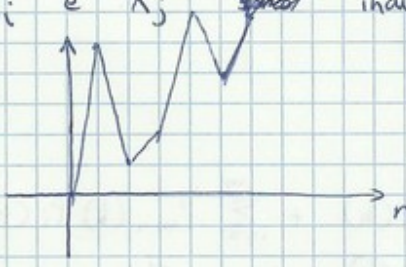
Poniamo $X(t,\omega)$ tra $\Omega \times T \to R$.

- Fissato ω_1, ovvero un particolare esperimento, $X(t,\omega_1)$ è una funzione del tempo, detta traiettoria o realizzazione.

Vediamo alcuni esempi.

Se $\Omega = \{1,2,\dots,6\}$, potrà essere $\omega_1(t)$: 5, 1, 2, 6, 4, 6, ...

X_i e X_j sono indipendenti; possiamo tracciare un grafico di X_n:



MOTO BROWNIANO

Si tratta di un processo a spazio continuo e tempo continuo.

Sia $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ un insieme di indici temporali.

Consideriamo gli incrementi $X_{t_1} - X_{t_0}$, $X_{t_2} - X_{t_1}$, ...

Definiamo un processo moto browniano se:

1) Gli incrementi relativi ad intervalli disgiunti sono indipendenti;
2) la distribuzione dell'incremento $X(t+s) - X(t)$ dipende solo da s, e non da t;
3) $P(X_t - X_s \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2(t-s)}\right\} dy$
4) $X(0) = 0$

PROCESSO DI POISSON

1 È tale per cui $X(0) = 0$, è costante a tratti,

2 il numero di eventi che si verifica in un intervallo e quello che si verifica in un altro intervallo ad esso disgiunto sono indipendenti, e si ha stazionarietà,

3 la probabilità di avere un evento in un intervallo di ampiezza h è $p(h) = \lambda h + o(h)$ $\quad \lambda > 0$

4 la probabilità di avere due o più eventi in un intervallo di ampiezza h è $p(h) = o(h)$

Posto $P_m(t) = P(N(t) = m)$, dalla 4. segue che

$\sum_{m=2}^{\infty} P_m(h) = o(h)$ $\qquad p(h) = P_1(h) + P_2(h)$

$P_0(t+h) \underset{\text{indip. stat.}}{=} P_0(t) \cdot P_0(h) = P_0(t)\,[1 - p(h)]$

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\frac{p(h)}{h} \cdot P_0(t)$$

Passando al limite per $h \to 0$:

$P_0'(t) = -\lambda \cdot P_0(t)$

$P_0(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$

con $c = 1$ poiché $P_0(0) = 1$

Generalizzando:

$$P_m(t+h) = \sum_{i=0}^{m} P_{m-i}(t)\, P_i(h)$$

$$= P_m(t)\, P_0(h) + P_{m-1}(t)\, P_1(h) + \sum_{i=2}^{m} P_{m-i}(t)\, P_i(h)$$

$$= P_m(t)\, P_0(h) + p(h) \cdot o(h) + o(h)$$

$$P_m(t+h) - P_m(t) = -P_m(t)\,[P_0(h) - 1] + P_{m-1}(t)\, P_1(h) + o(h)$$

$$= -\lambda h\, P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t)\, h + o(h)$$

$$\begin{cases} P_m'(t) = -\lambda P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t) \\ P_m(0) = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo:

$$Q_m(t) = P_m(t)\, e^{-\lambda t}$$

e risulta:

$$\begin{cases} Q_m'(t) = \lambda Q_{m-1}(t) \\ Q_0(t) = 1 \end{cases}$$

da risolversi ricorsivamente.

Ne consegue $P_m(t) = \frac{\lambda^m t^m}{m!} e^{-\lambda t}$

Esercizio: calcolare la distribuzione di $T^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} T_i$

(16.03.2011)

Possiamo affrontare problemi del genere facendo leva:

- sulle distribuzioni finito dimensionali
- sulle proprietà delle realizzazioni

In questo corso ci focalizzeremo principalmente sul primo aspetto.

Vediamo un esempio semplice.

Sia $X_n = X_{n-1} + \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & p \\ -1 & 1-p \end{cases}$ indipendenti, il caso più semplice di cammino casuale.

Si ha $P(X_n = i \mid X_{n-1} = i+1) = 1-p = 1 - P(X_n = i \mid X_{n-1} = i-1)$,

e $P(X_n = i \mid X_{n-1} = j) = 0 \quad j \neq i-1,\ j \neq i+1$.

Se i_0 è il punto iniziale del cammino, $P(X_0 = i_0) = 1$.

In generale vale $P(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)$

$= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \dots$

$= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot \dots \cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \cdot P(X_0 = i_0)$

Globalmente vedremo di occuparci di:

- processi ad incrementi indipendenti, introducendo eventualmente l'ipotesi di stazionarietà.
- martingale
- processi di Markov
- processi gaussiani
- processi stazionari
- processi di rinnovo
- processi di punto

Def. Un processo si dice ad incrementi indipendenti se le variabili aleatorie, scelti $t_n > t_{n-1} > \dots > t_0$, $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$, $X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}, \dots$ sono variabili indipendenti, e lo è anche X_{t_0}.

Equivalentemente, ciò significa che le $Z_n = X_n - X_{n-1}$ sono indipendenti

In questo caso si può studiare in maniera relativamente agevole $\sum_{i=1}^{n} Z_i$

Def. Se la distribuzione di $X(t+h) - X(t)$ dipende solo da h, diciamo che gli incrementi sono stazionari:

$$X(t_2 + h) - X(t_2) \sim X(t_1 + h) - X(t_1)$$

Prop. Se un processo ha incrementi indipendenti e stazionari, allora

$$E[X_t] = m_0 + m_1 t \qquad \mathrm{Var}[X_t] = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 t$$

con $m_0 = E[X_0]$ $\qquad m_1 = E[X_1] - m_0$

$\sigma_0^2 = \mathrm{Var}[X_0]$ $\qquad \sigma_1^2 = \mathrm{Var}[X_1] - \sigma_0^2$

Dim. Definiamo $f(t) = E[X_t] - E[X_0]$. In tal caso

$$f(t+s) = E[X_{t+s}] - E[X_0] = E[(X_{t+s} - X_t) + (X_t - X_0)]$$
$$= E[X(t+s) - X(t)] + E[X_t - X_0]$$
$$= E[X_s - X_0] + E[X_t - X_0] = f(s) + f(t)$$

Deve essere dunque soddisfatta l'equazione funzionale:

$$f(t+s) = f(t) + f(s)$$

Supponendo ora f differenziabile, e derivando prima rispetto a t, poi rispetto ad s:

$$f'(t+s) = f'(t) = f'(s)$$

Sostituendo per esempio con $s = 1$:

$$f'(t+1) = f'(t) = f'(1)$$

da cui $f'(t) = c \Rightarrow f(t) = ct + d$

Determiniamo ora d. Per $(t,s) = (0,0)$ si ottiene:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

da cui $d = 0$.

Pertanto $f(t) = c \cdot t = f(1) \cdot t$, e perciò $E[X_t] - E[X_0] = \{E[X_1] - E[X_0]\} t$

PROCESSI DI MARKOV

Def. Un processo $\{X_n\}$ è di Markov se vale:

$$P(X_n \in A \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_n \in A \mid X_{n-1} = i_{n-1})$$

$\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall i_0, \dots, i_{n-1}$ $\forall n$

• oppure, nel caso continuo:

$$P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A \mid X_s = x_s)$$

$s \le t$

In termini informali, il futuro è indipendente dal passato se si conosce il presente.

PROCESSI STAZIONARI

Def. Un processo è detto strettamente stazionario se le funzioni di distribuzione congiunta delle famiglie di v.a.:

$(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ e $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$

coincidono per $\forall h > 0$, $\forall n$, $\forall t_1, \dots, t_n$.

Def. Un processo si dice debolmente stazionario se ammette momento secondo finito e tale che $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h})$ dipende solo da h, $\forall t \in T$

- Chiamiamo un processo di rinnovo se è il processo tempo dell' n-esimo evento quando le $\{T_i\}$ sono v.a. i.i.d.
- Un processo è detto invece di conteggio di rinnovo se conta gli eventi del processo di rinnovo fino al tempo $t \in T$.
- Dati $\Omega \in \mathcal{A}$, un processo stocastico si dice processo di punto se il suo indice è $A \in \mathcal{A}$ e assume valori $0, 1, \dots$

(22.03.2011) [Feller]

Sia U uniforme su $[0,1]$, e definiamo i seguenti due processi stocastici:

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{se } t = U \\ 0 & \text{diversamente} \end{cases} \qquad Y_t = 0 \quad t \geq 0$$

Abbiamo che:

$$P(X_t < \tfrac{1}{2} \quad \forall t \in [0,1]) = 0$$

$$P(Y_t < \tfrac{1}{2} \quad \forall t \in [0,1]) = 1$$

Consideriamo ora l'evento:

$$A_n = \{X_{t_i} > 0 \quad t_i = \frac{i}{2^n}, \quad i = 0, 1, \dots, 2^n\}$$

di probabilità $P(A_n)$, e tale per cui:

$$P(X_t > 0, \ t \in [0,1]) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Possiamo però anche considerare la successione:

$$A'_n = \{X_{t_i} > 0 \quad t_i = \frac{i}{3^n} \quad i = 0, 1, \dots, 3^n\}, \text{ e dove:}$$

$$P(X_t > 0, \ t \in [0,1]) = \lim_{n \to \infty} P(A'_n)$$

A priori però non c'è alcun motivo per cui i limiti siano coincidenti: questa è una delle questioni che insorge quando si ~~tee~~ lavora con il tempo continuo.

Definiamo ora il concetto di processi stocastici uguali.

Def X_t e Y_t sono uguali se e solo se:

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega) \qquad \forall t \geq 0, \ \forall \omega \in \Omega$$

Si ~~tratta~~ tratta però di una definizione molto forte, che fa perdere il punto di vista della casualità.

Introduciamo pertanto una definizione meno restrittiva:

Def. X_t è una modificazione di Y_t se:

$$P(X_t = Y_t) = 1 \qquad \forall t \geq 0$$

Def X_t e Y_t hanno le stesse distribuzioni finito dimensionali se $\forall A \in \mathcal{B}(R^d)$, $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $\forall n$, $d = n+1$

$$P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A) = P((Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in A)$$

Def. X_t e Y_t sono indistinguibili se:

$$P(X_t = Y_t, \ \forall t \in T) = 1$$

Vediamo un esempio. Sia T una v.a. assolutamente continua,

$$X_t = 0 \quad \forall t, \qquad Y_t = \begin{cases} 0 & t \neq T \\ 1 & t = T \end{cases}$$

Si tratta di una modificazione, in quanto effettivamente è $P(X_t = Y_t) = P(T \neq t) = 1$.

~~Si tratta~~ Non si tratta invece di processi indistinguibili, come mostra immediatamente il fatto che $P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 0$.

Esercizi

- Determinare la distribuzione degli intertempi dei processi di Poisson
- Determinare la distribuzione del primo intertempo di un processo di Poisson, sapendo che in un intervallo di ampiezza $[0, T]$ se ne è verificato esattamente uno.

MOTO BROWNIANO

Def. Il moto browniano, o processo di Wiener, è un processo stocastico che verifica:

1. $X(0) = 0$
2. Gli incrementi $X(t+s) - X(t)$ sono distribuiti normalmente con media nulla e varianza $\sigma^2 s$
3. Per $\forall [t_1, t_2], [t_3, t_4]$, $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, gli incrementi $X(t_4) - X(t_3)$ e $X(t_2) - X(t_1)$ sono indipendenti.

Il moto browniano è un processo di Markov (perchè?)

Se $\sigma = 1$, denotiamo il rispettivo moto browniano come standard; naturalmente ogni moto può essere standardizzato, ponendo $\tilde{X}(t) = \frac{X(t)}{\sigma}$

Si ha: $\cdot\ P(X(t) \leq x \mid X(t_0) = x_0) = P(X(t) - X_0) \leq x - x_0 \mid 0)$

$\cdot\ f(x_1, \dots, x_n)\, d\underline{x} = p(x_1 t_1)\, p(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \cdot \dots \cdot p(x_n - x_{n-1}, t_n - t_{n-1}) d\underline{x}$

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left\{ - \frac{x^2}{2\sigma^2 t} \right\}$$

$X(t) = \tilde{X}(t) + \mu t$ è definito moto browniano con drift. In tal caso gli incrementi hanno media μs e varianza $\sigma^2 s$.

Sia ora $S_n = \sum_1^n x_i$ $\qquad x_i = \begin{cases} 1 & p \\ -1 & 1-p = q \end{cases}$

Si ha:

- $E[S_n] = n(p-q)$
- $\mathrm{Var}[S_n] = 4pqn$
- $E[\delta S_n] = n\delta(p-q)$
- $\mathrm{Var}[\delta S_n] = n\delta^2 4pq$

Il modello ci suggerisce che:

$$\begin{cases} (p-q)\,\delta r = c \\ 4pq\,\delta^2 r = D \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta \text{ piccolo} & \text{(spostamento)} \\ p-q \text{ "} & \text{(comportamento medio)} \\ r \text{ grande} & \text{(numero degli urti)} \end{cases}$$

Sia ora $v_{k,n} = P(S_n = k)$. Il tempo al salto n sarà $\frac{n}{r}$, essendoci r salti nell'unità di tempo, mentre $S_n \delta = k\delta$ sarà la posizione al tempo $\frac{n}{r}$.

Vogliamo ottenere la probabilità di trovare la particella al tempo t in un intorno di x.

$\frac{n}{r} \to t \qquad 4pq\delta^2 r \to D$

$R\delta \to x \qquad 4pq\,\delta^2 \frac{r}{n}\, n$ ($\delta^2 \to \Delta x^2$, $1/\Delta t$)

$$P(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{n-\frac{n+k}{2}}$$

Passando al limite:

$$v_{k,n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ - \frac{\left[\frac{1}{2}(n+k) - np\right]^2}{2npq} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ - \frac{[k + n(p-q)]^2}{8npq} \right\}$$

$$= \text{"} \quad \exp\left\{ - \frac{[\quad]^2 \cdot \delta^2}{2\cdot 4 \cdot pqr\,\delta^2 \frac{n}{r}} \right\}$$

($pqr\delta^2 = D$, $\frac{n}{r} = t$, $n\delta(p-q) = ct$)

$$= \text{"} \quad \exp\left\{ - \frac{[x - \delta n(p-q)]^2}{2Dt} \right\}$$

$$= \text{"} \quad \exp\left\{ - \frac{(x-ct)^2}{2Dt} \right\}$$

$$v(x,t) = \frac{v_{k,n}}{2G} = \frac{1}{2\delta \cdot \sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ - \frac{(x-ct)^2}{2Dt} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left\{ - \frac{(x-ct)^2}{2Dt} \right\}$$

Abbiamo ricavato il moto browniano partendo dal suo similtipo discreto del cammino casuale.

Vediamo ora un approccio basato sulle equazioni differenziali.

Avendosi $V_{k,n+1} = p\,V_{k-1,n} + q\,V_{k+1,n}$, procediamo come segue:

- $v\left(t+\frac{1}{r}, x\right) = p\,v(t, x-\delta) + q\,v(t, x+\delta)$
- $v(t,x) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} + o\left(\frac{1}{r}\right) = p\,v(t,x) - \delta p\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}p\delta^2\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q\,v(t,x) + \delta q\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}q\delta^2\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + o(\delta^2)$
- $\frac{\partial v}{\partial t} = r\delta(p-q)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 r\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dots$
- $\frac{\partial v}{\partial t} = c\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{d}{2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

nota come equazione di Folker – Plank.

(23.03.2011)

CATENE DI MARKOV

Def. Una catena di Markov è un processo stocastico a tempo discreto, il cui insieme degli stati può essere di cardinalità finita o infinita numerabile, e tale per cui:

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}) = P_{i_{n-1},j}$$

- Si può definire in maniera naturale una matrice $[P_{ij}] = P$, $i = 0,1,\dots$, $j = 0,1,\dots$, dove $P_{ij} = P_{i_{n-1},j}$

Es. Cammino casuale, $X_n = X_{n-1} + \varepsilon$, con $\varepsilon = \begin{cases} 1 & p_n \\ -1 & q_n \end{cases}$

In questo caso $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = q$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ q & 0 & p & & \\ & q & 0 & p & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

supponendo che ci siano barriere agli estremi che fissino il processo da quel punto in poi.

Prop.
- $P_{ij} \geq 0$
- $\sum_j P_{ij} = 1$
- $P(X_1 = i_1) = \sum_{i_0}\left[P(X_0 = i_0)\cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)\right]$

- Se vogliamo passare da un passo a più passi, è sufficiente elevare la matrice al numero di passi:
  - $P(X_n = j \mid X_0 = i) = P_{ij}^{(n)}$
  - $P^{(n)} = P^n$
  - $P_{ij}^{(n)} = \sum_{k\in S} P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(n-r)}$

Per esempio, $P_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in S} P_{ik} P_{kj}$.

Questo può comportare questioni di stampo numerico, poichè la moltiplicazione ripetuta della matrice per sè stessa finisce per comportare di volta in volta calcoli più impegnativi.

- Definiamo gli stati di una catena.

Def. j è accessibile da i se $\exists\, n \geq 0$ tale che $P_{ij}^n > 0$.

Def. Se $j \to i$, $i \to j$, diciamo che gli stati i e j comunicano.

Def. Una catena si dice irriducibile se tutti i suoi stati comunicano.

Def. Uno stato i si dice periodico con periodo $d(i)$ se d è il MCD degli interi n / $P_{ii}^n > 0$. Se $d = 0$ oppure $d = 1$, lo stato non viene considerato periodico.

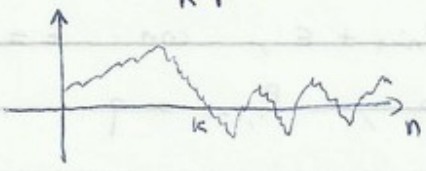
Def. Chiamiamo f_{ii}^n la probabilità:

$$f_{ii}^n = P(X_n = i,\ X_v \neq i,\ v = 1, \dots, n-1 \mid X_0 = i)$$

$$T = \inf(\tau : X_\tau = i,\ X_v \neq i,\ v = 1, \dots, \tau - 1 \mid X_0 = i)$$

In questo modo possiamo spezzare la probabilità:

$$P_{ii}^n = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^k\, P_{ii}^{n-k}$$



Def. Uno stato i si dice ricorrente se $\exists\, n > 0$ / $f_{ii}^n = 1$, ovvero se si finisce sicuramente per ritornarci.

PROPRIETÀ FORTE DI MARKOV

Def. $\{T < t\}$ è un tempo di Markov se è $\mathcal{F}_t$ - misurabile.

Def. Se $(X(t_1), \dots, X(t_n)) \sim (X(t_1 + \tau), \dots, X(t_n + \tau))$, τ: variabile aleatoria, $\forall\, t_1, \dots, t_n \in T$, $\forall\, n$ si dice che il processo X gode della proprietà forte di Markov.

PROCESSI DI NASCITA / MORTE

- $F_{ij}(s) = P(T_{ij} \leq s)$
- $P_{ij}(t) = \int_0^t P_{jj}(t-s)\, dF_{ij}(s)$

(24.03.2011)

PROCESSI DI DIFFUSIONE

Def. Si dice processo di diffusione un processo stocastico con insieme indice continuo che verifica la proprietà forte di Markov e le cui traiettorie sono quasi certamente continue

Es. Il moto browniano è un processo di diffusione.

Def. Un processo di Markov con funzione di densità di probabilità di transizione $p(s,x,t,A)$ si dice di diffusione se si verificano le seguenti proprietà: (drift ↑)

1. $\forall \varepsilon,\ t \geq 0,\ x \in R$ $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E[X(t+h) - X(t) \mid X(t) = x] = \mu(x,t)$

   $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathrm{Var}[X(t+h) - X(t) \mid X(t) = x] = \sigma^2(x,t)$

2. $\forall \varepsilon > 0,\ t \geq 0,\ x \in R$ $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|x-y| < \varepsilon} p(s,x,t,dy) = 0$

Chiamiamo $I = (\ell, r)$ l'intervallo di diffusione, che può essere anche chiuso o semiaperto, con $\ell \geq -\infty$ e $r \leq +\infty$.

Definiamo anche $T_z = \inf\{t : X(t) = z \mid X(0) = x\}$

Vediamo ora tre definizioni di continuità di traiettoria.

Def. [a.] $X(t)$ è continuo in media quadratica se $\forall\, t \in T$

$$\lim_{s \to t} E[|X(t) - X(s)|^2] = 0$$

[b.] $X(t)$ è continuo in probabilità se $\forall t \in T$, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{s \to t} P(|X(t) - X(s)| > \varepsilon) = 0$$

[c.] $X(t)$ è quasi certamente continua se $\forall\, t \in T$

$$P\left(\lim_{s \to t} X(s) = X(t)\right) = 1$$

Tali definizioni però non ci sono ancora sufficienti, in quanto farebbero risultare continuo, per esempio, anche il processo di Poisson. Ci servono pertanto altri risultati.

Teor. Processi che ammettono momenti secondi finiti sono continui in media quadratica se e solo se:

- $m(t) = E[X(t)]$ è continua;
- la funzione di covarianza:

$$\Gamma(s,t) = E[(X(t) - m(t))(X(s) - m(s))]$$

è continua per $s = t$.

Infatti $E[(X(s) - X(t))^2] = E[X^2(s) + X^2(t) - 2X(t)X(s)]$

$$= \Gamma(s,s) + m^2(s) + \Gamma(t,t) + m^2(t) - 2E[X(t)X(s)]$$

$$= \Gamma(s,s) + m^2(s) + \Gamma(t,t) + m^2(t) - 2\Gamma(s,t) - 2m(t)m(s)$$

il cui limite per $s \to t$ è proprio 0.

Poiché inoltre la convergenza in media quadratica implica la convergenza in probabilità, in tal caso vale anche essa.

Es. Poisson

- $m(t) = \lambda t$
- $\Gamma(s,t) = E[(N(t) - \lambda t)(N(s) - \lambda s)] = E[N(t)N(s)] - m(t)m(s)$

$$= E[(N(s) + (N(t) - N(s)))N(s)] - m(t)m(s)$$

$$= E[N^2(s)] + E[(N(t) - N(s))N(s)] - m(t)m(s)$$

$$= \lambda s + \lambda^2 s^2 + E[N(t) - N(s)] \cdot E(N(s)) - m(t)m(s)$$

$$= \lambda^2 s^2 + \lambda s + \lambda(t-s)\lambda s - \lambda^2 ts = \lambda s \quad \text{supposto } t > s$$

$$= \lambda t \quad \text{supposto } s > t$$

$$= \lambda \cdot \min(s,t), \text{ continua per } s = t$$

- $\{\lim_{s \to t} N(s) \neq N(t)\} \equiv \{\text{tempi di salto}\}$

$$P(\lim_{s \to t} N(s) = N(t)) = 1$$

Possiamo riassumere il tutto con:

Def. Un processo stocastico, definito dalle sue distribuzioni finito dimensionali, quasi certamente ha traiettorie continue se $\exists$ una versione di tale processo con traiettorie continue con probabilità 1.

Ciò che accade con Poisson è che:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(|X(h) - x| > \varepsilon \mid X(0) = x) = \lambda(x, \varepsilon) \geq 0$$

ovvero si ammette la possibilità di salti. Si tratta di ciò che non vogliamo, ovvero richiederemo che:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(|X(h) - x| > \varepsilon \mid X(0) = x) = 0 \qquad (*)$$

oltre a:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E[X(h) - x \mid X(0) = x] = \mu(x, t)$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E[(X(h) - x)^2 \mid X(0) = x] = \sigma^2(x, t)$$

Def. Un processo di Markov, con proprietà forte, si dice standard se le sue traiettorie verificano:

- $X(t)$ è continuo a destra: $\lim_{t \downarrow s} X(t) = X(s)$;
- il limite sinistro esiste;
- $X(t)$ è continuo a sinistra per tempi di Markov che convergono a T $\quad T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n$

$$\lim_{n \to +\infty} X(T_n) = X(T)$$

Prop. Ogni processo di Markov forte, continuo in probabilità, sotto opportune ipotesi di regolarità (deboli), ammette una versione standard.

Teor. (di Dynkin) Condizione sufficiente affinché un processo standard sia di diffusione è che valga la $(*)$ uniformemente. Tale $(*)$ prende pertanto il nome di condizione di Dynkin, e deve essere verificata appunto uniformemente, ovvero $\forall x \in (l, r)$, $\forall t \in [0, N]$.

(29.03.2011)

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} E[\Delta_h X(t) \mid X(t) = x] = \mu(x,t)$$
$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} E[(\Delta_h X_t)^2 \mid X(t) = x] = \sigma^2(x,t)$$
$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} E[(\Delta_h X_t)^k \mid X(t) = x]$$

$$\Delta_{h,\varepsilon} X(t) = \begin{cases} \Delta_h X(t) & |\Delta_h X(t)| < \varepsilon \\ 0 & \text{diversamente} \end{cases}$$

Se si considera un processo standard per il quale i momenti infinitesimali per qualche ordine p superiore a 2 tendono a zero. Formalizzando:

<u>Lemma</u> Se per un processo stocastico standard si ha:
$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} E[|\Delta_h X(t)|^p \mid X(t) = x] = 0$$
uniformemente in x, in ogni compatto contenuto in (ℓ, r), per un qualche $p > 2$, allora vale la condizione di Dynkin

<u>Dim.</u> $\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} P(|X(t+h) - X(t)| > \varepsilon \mid X(t) = x) \le \lim_{h\downarrow 0} \frac{E[(\Delta_h X_t)^p \mid X(t) = x]}{h\varepsilon^p}$
dove si richiede $p > 2$ in quanto i primi due momenti non verificano tale disuguaglianza.

CARATTERIZZAZIONE DI STROOK - VARADHAN

Sia un processo temporalmente omogeneo, $\lambda \gg 0$.
Consideriamo $Y_\lambda(t) = \exp\{\lambda X(t) - \lambda \cdot \int_0^t \mu(X(s))\, ds - \frac{\lambda^2}{2} \cdot \int_0^t \sigma^2(X(s))\, ds\}$
$\{Y_\lambda(t)\}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_t\} = \sigma(X_\tau, \tau \le t)$, ovvero vale $E[Y(t) \mid \mathcal{F}_s] = Y(s)$

Definendo $p(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial y} P(X(t) < y \mid X(0) = x)$, sia $x_1 < x_2 < \dots < x_r$ e $y_1 < y_2 < \dots < y_r$. Considerando il determinante della matrice $\| p(t, x_i, y_i) \|$, allora per ogni scelta e per ogni r risulta $\det | p(t, x_i, y_i) |$

DERIVATA DI UN PROCESSO STOCASTICO

Possiamo scrivere qualcosa del genere:

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu(X_t) + \frac{dW_t}{dt}\,\sigma(X_t)$$

$$dX_t = \mu(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t$$

$$X(t+\Delta t) - X(t) \approx \mu(x,t)\,\Delta t + \sigma(x,t)\,\Delta B(t) \quad \rightarrow \text{moto browniano}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \approx \mu(X(t),t) + \sigma(X(t),t)\cdot \frac{dB}{dt} \rightarrow \xi_t$$

$$E\left[\frac{\Delta_h B(t)}{h} \cdot \frac{\Delta_k B(s)}{k}\right] \overset{\text{ass.}}{=} 0$$

$$E\left[\frac{\Delta_h B(t)^2}{h^2}\right] = \frac{1}{h}\cdot E\left[\frac{\Delta_h B^2(t)}{h}\right] = \frac{1}{h}$$

$$E\left[\frac{dB_t}{dt}\cdot\frac{dB_s}{ds}\right] = \begin{cases} \infty & t=s \rightarrow 1 \\ 0 & \text{diversamente} \end{cases} = \delta(t-s)$$

$$\frac{\Delta X_h(t)}{h} = \mu(X(t)) + \sigma(X(t))\cdot\frac{dB(t)}{dt}$$

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dB(t)$$

$$X(t+h) - X(t) = \mu(X(t))\,h + \sigma(X(t))\cdot\Delta_h B_t$$

$$X(t_0+h) = x_0 + \mu(x(t_0))\,h + \sigma(x(t_0))\,Z_1$$

Per un ulteriore approfondimento si veda Kloeden - Platen

RISULTATI SUL MOTO BROWNIANO

Sia I l'intervallo di diffusione. Proviamo che $\mu(x) = 0$, $\sigma^2(x) = \sigma^2$.

$$E[\Delta_h X(t) \mid X(0) = x] \overset{\text{def. n.a.}}{=} 0$$

$$E[(\Delta_h X(t))^2 \mid X(0) = x] \overset{\text{def. n.a.}}{=} \sigma^2 h$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E[\Delta_h X(t) \mid X(0) = x] = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E[(\Delta_h X(t))]^2 \mid X(0) = x] = \sigma^2$$

$$E[(\Delta_h X)^4 \mid X(0) = x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h^2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} v^4 \cdot \exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2 h}\right\} dv$$

$$\frac{v^2}{2\sigma^2 h} = y \qquad = \frac{4\sigma^4 h^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} y^{3/2} e^{-y}\,dy = 3h^2\sigma^4$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E[(\Delta_h X)^4 \mid X(0) = x] = 0$$

(30.03.2011)

[assente, farsi dare appunti]

(31.03.2011)

Sia $w(x) = E\left[\int_0^{T^*} g[X(s)]\,ds \mid X(0)=x\right]$, $T^* = \min(T(a), T(b))$

Vediamo cosa succede se partiamo da un certo h. Si ha:

$$E\left[\int_h^{T^*} g(X(s))ds \mid X(h)=z\right] = E\left[\int_0^{T^*} g(X(s))\,ds \mid X(0)=z\right] = w(z)$$

$$w(X(h)) = E\left[\int_h^{T^*} g(X(s))\,ds \mid X(h)\right]$$

$$w(x) = \underbrace{E\left[\int_0^h g(X(s))\,ds \mid X(0)=x\right]}_{g(x)h+o(h)} + \underbrace{E[w(X(h)) \mid X(0)=x]}_{I}$$

$$I = E[w(x+\Delta x) \mid X(0)=x]$$

$$= w(x) + E[\Delta x \mid X(0)=x]\,w'(x)\,h + E[\Delta x^2 \mid X(0)=x]\cdot w''(x)\cdot\frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h} I = \lim_{h\to 0}\frac{w(x)}{h} + \mu(x)\,w'(x) + \sigma^2(x)\,w''(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h} w(x) = g(x) + \mu(x)\,w'(x) + \frac{\sigma^2(x)}{2} w''(x) + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h} w(x)$$

$$\Rightarrow \mu(x)\,w'(x) + \frac{\sigma^2(x)}{2} w''(x) = -g(x)$$

Vediamo di risolvere analiticamente.

Una generica equazione differenziale del 2° ordine ha la forma:

$$A(z)\cdot\frac{d^2u}{dz^2} + B(z)\cdot\frac{du}{dz} + C(z)\,u(z) = 0$$

Se fosse $B(z) = \frac{d}{dz}A(z)$, si potrebbe scrivere:

$$\frac{d}{dz}\left[A(z)\cdot\frac{d}{dz}u\right] + c(z)\,u = 0$$

semplificando notevolmente la forma.

Ci si può ricondurre a tale forma moltiplicando per $h(z)$ tale per cui $\frac{d}{dz}(hA) = hB$, ovvero

$$\frac{h'}{h} = \frac{B-A'}{A} \Rightarrow h(z) = e^{\int\frac{B(u)}{A(u)}du}$$

$$\frac{d}{dz}\left[hA\cdot\frac{d}{dz}u\right] + c(z)\,hu = 0$$

(30.03.2011)

Definiamo due tipi di processi di diffusione:

- Processo di Ornstein - Uhlenbeck

$\mu(x) := \alpha x$, $\sigma^2(x) := \sigma^2$, $I = \mathbb{R}$ (σ^2 costante)

- Processo di Feller (o di Cox - Ingersol)

$\mu(x) := px + q$, $\sigma^2(x) := 2rx$, $I = (0, +\infty)$ ($r > 0$)

Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e monotona, (X_t) diffusione su $I_x := (\ell, r)$; sia $Y_t := g(X_t)$. Allora (Y_t) è una diffusione.

Come cambiano μ e σ^2? ($I_y = (g(\ell), g(r))$)

Teorema

Se (X_t) è una diffusione regolare e se $g \in C^2(I_x)$ è monotona, allora (Y_t), definito da $Y_t := g(X_t)$, $\forall t \geq 0$, è un processo di diffusione su $I_y := (g(\ell), g(r)) = g(I_x)$ con:

- $\mu_Y(y) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\, g''(x) + \mu(x)\, g'(x)\big|_{y=g(x)}$
- $\sigma^2_Y(y) = \sigma^2(x) \cdot g'(x)^2\big|_{y=g(x)}$

Dim.

Ponendo $X_t = x$, e $\Delta X_t = X_{t+h} - X_t$, e sviluppando secondo Taylor fino al primo ordine otteniamo:

$$g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta x\, g'(x) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 g''(x) + \frac{1}{2}[g''(\xi) - g''(x)](\Delta x)^2$$

$$g(X_{t+h}) = g(X_t) + \Delta X_t \cdot g'(X_t) + \frac{1}{2} g''(X_t)(\Delta X_t)^2 + \frac{1}{2}[\dots](\Delta X_t)^2$$

Prendendo il valor medio, dividendo per h, e passando al limite $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \mathbb{E}[Y_{t+h} - Y_t \mid Y_t = y] = \mu_x(x)\, g'(x)\big|_{y=g(x)} + \frac{1}{2}\sigma_x^2(x)\, g''(x)\big|_{y=g(x)} + \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}[(g''(\xi) - g''(X_t))(\Delta X_t)^2 \mid X_t = x]$$

$$\Rightarrow \mu_Y(y) = \mu_x(x)\, g'(x) + \frac{1}{2}\sigma_x^2(x)\, g''(x)\big|_{y=g(x)}$$

In maniera analoga si procede per quanto riguarda $\sigma^2_Y(y)$.

Esempio: moto browniano geometrico

$g(x) := e^x \Rightarrow y_t = e^{X_t}$, con X_t moto browniano, $I_x = \mathbb{R}$, $\mu_x = \mu$.

Si tratta di uno strumento che trova applicazione in ambito economico, ed è alla base del modello di Black, Scholes per l'option pricing. Esso comporta:

- $I_y = (0, +\infty)$
- $\mu_y = \mu \cdot e^x + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot e^x \big|_{y=g(x)} = \mu y + \frac{1}{2}\sigma^2 y = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) y$
- $\sigma_y^2 = \sigma^2 \cdot (e^x)^2 \big|_{y=g(x)} = \sigma^2 y^2$

Considerando $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $\frac{y_{t_1}}{y_{t_0}}, \frac{y_{t_2}}{y_{t_1}}, \dots \Rightarrow e^{X_{t_1} - X_{t_0}}, e^{X_{t_2} - X_{t_1}}$

sono indipendenti, dunque gli incrementi percentuali sono indipendenti.

Esempio: moto browniano n-dimensionale

$(X_t^{(i)})$ m.b. $\quad Z_t := \sum_{i=1}^n (X_t^{(i)})^2 \quad X_t := (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})$

$X_{t+\Delta t}^{(i)} = x_i + \Delta X_t^{(i)}$

$$\Delta Z_t = Z_{t+\Delta t} - Z_t = \sum_{i=1}^n (X_{t+\Delta t}^{(i)})^2 - \sum_{i=1}^n (X_t^{(i)})^2 = \sum_{i=1}^n (X_t^{(i)} + \Delta X_t^{(i)})^2 - \sum_{i=1}^n (X_t^{(i)})^2$$

$$= 2 \cdot \sum_{i=1}^n X_t^{(i)} \cdot \Delta X_t^{(i)} + \sum_{i=1}^n (\Delta X_t^{(i)})^2$$

$$E[\Delta Z_t \mid Z_t = z] = 2 \cdot \sum_{i=1}^n E[X_t^{(i)} \Delta X_t^{(i)} \mid X_t = x] + \sum_{i=1}^n E[(\Delta X_t^{(i)})^2 \mid X_t = x]$$

$$= n\,\Delta t \Rightarrow \mu_z = n$$

Infatti:

- $E[X_t^{(i)} \Delta X_t^{(i)} \mid X_t = x] = E[X_t^{(i)} \mid X_t = x] \cdot E[\Delta X_t^{(i)} \mid X_t = x]$

  $= 0 \cdot " = 0$

per l'indipendenza, mentre:

- $E[(\Delta X_t^{(i)})^2 \mid X_t = x] = \Delta t$

essendo la varianza del moto browniano.

Sia ora:

$$\begin{cases} \sigma_z^2(z) = 4z \\ \mu_z(z) = n \end{cases} \qquad I_z = (0, +\infty)$$

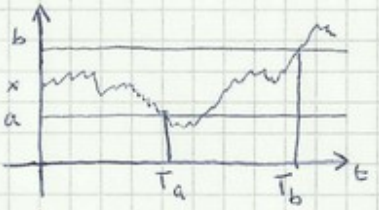
Consideriamo adesso $g(z) := \sqrt{z} \Rightarrow y_t = \sqrt{z_t} \rightarrow \begin{cases} \mu_y(y) = \frac{n-1}{2y} \\ \sigma_y^2(y) = 1 \end{cases}$

$I_z = (0, +\infty)$

Questo è detto processo di Bessel e corrisponde alla distanza da 0 di un moto browniano standard (multidimensionale).

Se $n = 1$ allora siamo in presenza del cosiddetto moto browniano riflesso $|X_t|$.

- (X_t) diffusione su $I = (\ell, r)$
- (X_t) regolare su I: $P(T_y < +\infty \mid X_0 = x) = 1 \quad \forall y \in I$
- $\mu(X_t)$, $\sigma^2(X_t)$ continue (su I) $\sigma^2(X_t) > 0 \quad \forall t \geq 0$



Barriere

$\ell < a < b < r \qquad T^* := \min\{T_a, T_b\}$

Si possono studiare:

(i) $\quad v(x) := P(T_b < T_a \mid X_0 = x)$

(ii) $\quad V(x) := E[T^* \mid X_0 = x]$ (caso particolare di (iii))

(iii) $\quad w(x) := E\left[\int_0^{T^*} g(X_s)\, ds \mid X_0 = x\right]$ g continua su I

Si dimostra che v, V, w sono finite e con derivate prime finite. Tali funzioni soddisfano le seguenti equazioni differenziali, o meglio problemi ai limiti:

(i) $\begin{cases} \mu(x)\, v'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\, v''(x) = 0 \\ v(a) = 0 \\ v(b) = 1 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} \mu(x)\, V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\, V''(x) = -1 \\ V(a) = 0 \\ V(b) = 0 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} \mu(x)\, w'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\, w''(x) = -g(x) \\ w(a) = 0 \\ w(b) = 0 \end{cases}$

assumendo naturalmente che le derivate prime e seconde esistano.

Dimostriamo ora che $v(x)$ soddisfa (i).

$$E[v(X_h) \mid X_0 = x] + o(h) = E[v(x + \Delta X_h) \mid X_0 = x] + o(h)$$

$$= E[\Delta X_h \mid X_0 = x]\, v'(x) + \frac{1}{2} E[(\Delta X_h)^2 \mid X_0 = x]\, v''(x) + o(h)$$

Dividendo per h e passando a $h \to 0^+$:

$$\mu(x)\, v'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\, v''(x) = 0$$

Definiamo anche la quantità $s(x) = \exp\left\{-2 \cdot \int^x \frac{\mu(z)}{\sigma^2(z)}\, dz\right\}$, e il suo integrale $S(x) = \int^x s(z)\, dz$, con $x \in (\ell, r)$. Tale funzione prende il nome di funzione di scala.

Un altro oggetto che poniamo è $m(x) = \frac{1}{\sigma^2(x) \cdot s(x)}$, $x \in (\ell, r)$, noto come densità di velocità.

Sia $Lf(x) = \left(\mu(x) \cdot \frac{d}{dx} + \frac{\sigma^2(x)}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2}\right) f(x)$; possiamo anche scrivere

$Lf = \left(\frac{\sigma^2(x)\, s(x)}{2} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{s(x)} \cdot \frac{d}{dx}\right) f = \frac{1}{2} \frac{d}{dm} \frac{d}{ds} f$

Vogliamo risolvere $Lf = 0$; $Lf = -1$; $Lf = -g(x)$

- Iniziamo risolvendo la prima.

$\frac{1}{2} \frac{d}{dm} \frac{d}{ds} u = 0$, $u(a) = 0$ $u(b) = 1$

Con una integrazione si giunge a:

$\frac{du}{ds} = \beta$

Un' ulteriore integrazione porta a:

$u(x) = \beta S(x) + \alpha$

Imponendo le condizioni agli estremi si ottiene:

$\alpha = -\beta S(a)$ $\qquad \beta = \frac{1}{S(b) - S(a)}$

dunque:

$u(x) = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}$

Si noti che $u(x)$ dipende da $S(x)$, ma non dipende da eventuali trasformazioni lineari della stessa, ovvero ponendo $S^*(x) = c_1 + c_2 S(x)$, il valore di $u(x)$ non cambia, qualunque siano c_1 e $c_2 \neq 0$. Questo giustifica anche come mai non sia stato necessario porre uno degli estremi di integrazione nelle definizioni di $s(x)$ e $S(x)$.

Osserviamo anche che, posto $Y(t) = S(X(t))$, in $(S(\ell), S(r))$, il drift è nullo, infatti:

$$\begin{aligned} \mu_Y(y) &= \frac{1}{2} \sigma^2(x)\, S''(x) + \mu(x)\, S'(x) \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2(x)\, s'(x) + \mu(x)\, s(x) \\ &= \left[-\frac{1}{2} \sigma^2(x) \cdot 2 \frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)} - \mu(x)\right] \\ &\exp\left\{-2 \cdot \int^x \frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\, dz\right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma^2_Y(y) = \sigma^2(x)\cdot[S'(x)]^2\Big|_{y=S(x)} = \sigma^2(x)\cdot s^2(x)\Big|_{y=S(x)}$$

$$s_Y(y) = 1 \qquad S_Y(y) = y$$

$$v(y) = P(T_a < T_b \mid Y(0)=y) = \frac{y-a}{b-a}$$

- Risolviamo ora la terza:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\Pi}\frac{d}{dS}w = -g(x), \qquad w(a)=w(b)=0$$

poichè la seconda ne è un suo caso particolare.

$$\frac{dw}{ds} = -2\cdot\int_a^{\eta} g(\xi)\,d\Pi(\xi) + \beta = -2\cdot\int_a^{\eta} g(\xi)\,m(\xi)\,d\xi + \beta$$

$$w(x) = -2\cdot\int_a^x\int_a^{\eta} g(\xi)\,m(\xi)\,d\xi\,dS(\eta) + \beta[S(x)-S(a)] + \alpha$$

Imponendo le condizioni agli estremi:

$$w(a)=0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$w(b)=0 \Rightarrow \beta = \frac{2}{S(b)-S(a)}\cdot\int_a^b\int_a^{\eta} g(\xi)\,m(\xi)\,d\xi\,dS(\eta)$$

da cui:

$$w(x) = \overbrace{2\,v(x)\cdot\int_a^b\int_a^{\eta} g(\xi)\,m(\xi)\,d\xi\,d\eta}^{K} - 2\cdot\int_a^x\int_a^{\eta}\ldots$$

$$= K\cdot(1-v(x))\cdot\int_a^{\eta}(S(\xi)-S(a))\,m(\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$

Il caso particolare $v(x)$ è:

$$E(T^* \mid X(0)=x) = r(x) = 2\cdot\Big\{v(x)\cdot\int_x^b[S(b)-S(\xi)]\,m(\xi)\,d\xi + (1-v(x))\cdot\int_a^x[S(\xi)-S(a)]\,m(\xi)\,d\xi\Big\}$$

Inoltre:

$$V^{(x)}_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)} = E\big[T^*_{x-\varepsilon,x+\varepsilon} \mid X(0)=x\big] = \int_x^{x+\varepsilon}[S(x+\varepsilon)-S(\xi)]\,m(\xi)\,d\xi + \int_{x-\varepsilon}^{x}[S(\xi)-S(x-\varepsilon)]\,m(\xi)\,d\xi$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{r(x)}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\Big\{\int_x^{x+\varepsilon}[x+\varepsilon-\xi]\,m(\xi)\,d\xi + \int_{x-\varepsilon}^{x}(\xi-x+\varepsilon)\,m(\xi)\,d\xi\Big\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x}{\varepsilon^2}\cdot\int_x^{x+\varepsilon} m(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_x^{x+\varepsilon} m(\xi)\,d\xi - \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\int_x^{x+\varepsilon}\xi\,m(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\int_{x-\varepsilon}^{x}\xi\,m(\xi)\,d\xi - \frac{x}{\varepsilon^2}\cdot\int_{x-\varepsilon}^{x} m(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_{x-\varepsilon}^{x} m(\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{x}{\varepsilon^2}\cdot\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} m(\xi)\,d\xi = m(x)$$

$m(x)\cdot\varepsilon^2$ è il tempo medio speso all'interno della striscia. Nel caso del moto browniano, $m(x)=1$; i processi si possono dunque confrontare in base a questo indicatore, da cui la nomenclatura di densità di velocità.

Esempi

- moto browniano: $\sigma^2 = 1$, $\mu = 0$

$$s(x) = 1 \qquad S(x) = x \qquad m(x) = 1$$

$$u(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$v(x) = 2 \cdot \{u(x) \cdot \int_x^b [s(b) - s(\xi)]\, m(\xi)\, d\xi + (1-u(x)) \cdot \int_a^x [s(\xi) - s(a)] \cdot m(\xi)\, d\xi\}$$

$$= 2 \cdot \left\{\frac{x-a}{b-a} \cdot \int_x^b (b-\xi)\, d\xi + \frac{b-x}{b-a} \cdot \int_a^x (\xi - a)\, d\xi\right\}$$

$$= (x-a)(b-x)$$

- moto browniano con drift: $\sigma^2 > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$

$$s(x) = \exp\left\{-\frac{2\mu}{\sigma^2} x\right\} \qquad S(x) = A \cdot e^{-2\mu/\sigma^2 x} + B$$

$$u(x) = \frac{e^{-2\mu x/\sigma^2} - e^{-2\mu a/\sigma^2}}{e^{-2\mu b/\sigma^2} - e^{-2\mu a/\sigma^2}}$$

(07.04.2011)

$$P(t,x,y) = P(X(t) < y \mid X(t_0) = x)$$

$$P(0,x,y) = \begin{cases} 1 & x \le y \\ 0 & \text{diversamente} \end{cases}$$

$$p(t,x,y) = \frac{\partial P(t,x,y)}{\partial y} \qquad t > 0$$

$$u(t,x) = E[g(X(t)) \mid X(0) = x_0] \qquad g \text{ limitata e continua}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u(0^+, x) = g(x) \qquad \text{condizione iniziale}$$

Faremo ora uso della notazione:

$$f(y, t \mid x, t_0) := p(t - t_0, x, y)$$

$$f(x, t \mid x_0, t_0) = \int_I f(z, \tau \mid x_0, t_0) \cdot f(x, t \mid z, \tau)\, dz$$

(equazione di Smolukowsky)

Usando la funzione $\begin{matrix} t_0 \longrightarrow t_0 - \Delta t \\ \tau \longrightarrow t_0 \end{matrix}$

$$f(x, t \mid x_0, t_0 - \Delta t) = \int f(z, t_0 \mid x_0, t_0 - \Delta t) \cdot f(x, t \mid z, t_0)\, dz$$

$$f(x, t \mid x_0, t_0 - \Delta t) - f(x, t \mid x_0, t_0) = \int_I f(z, t_0 \mid x_0, t_0 - \Delta t) [f(x, t \mid z, t_0) - f(x, t \mid x_0, t_0)]\, dz$$

$$= f(z, t_0 \mid x_0, t_0 - \Delta t) \left[\sum \frac{1}{n!} (z - x_0)^n \cdot \frac{\partial^n f(x, t \mid x_0, t_0)}{\partial x_0^n}\right] dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum \frac{1}{n!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial x_0^n} \int_I (z - x_0)^n \cdot f(z, t \mid x_0, t_0)\, dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu(x_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\sigma^2(x)}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$$

che consiste nell'equazione richiesta per il caso temporalmente omogeneo.

In particolare se $\mu(x_0) \equiv 0$ e $\sigma^2(x_0) \equiv \sigma^2$ si ottiene la densità di probabilità di transizione di un processo di Wiener

$$p(t, x, y) = f(y, t \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left\{ -\frac{y^2}{2\sigma^2 t} \right\}$$

$$\lim_{t \to 0} f(y, t \mid x) = \delta(y - x)$$

Dimostriamo ora l'equazione forward (Folker - Planck).

Si ha $f(x, t \mid x_0, t_0) = \int_I f(x, t \mid z, \tau)\, f(z, \tau \mid x_0, t_0)\, dz$

Trasformiamo ancora t in $t + \Delta t$, e sottraiamo $f(x, t \mid x_0, t_0)$:

$$f(x, t+\Delta t \mid x_0, t_0) - f(x, t \mid x_0, t_0) = \int_I f(x, t+\Delta t \mid z, t)\, f(z, t \mid x_0 t_0)\, dz - f(x, t \mid x_0, t_0)$$

Introduciamo una funzione $R(x)$ tale che $R(x) \xrightarrow[(x \to r)]{x \to \ell} 0$ $\quad \frac{d^n R}{dx^n} \to 0$.

Allora $\int_I \frac{f(x, t+\Delta t \mid x_0) - f(x, t \mid x_0)}{\Delta t} R(x)\, dx = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_I dx\, R(x) \int_I dz\, f(x, t+\Delta t \mid x_0, t_0) \right.$

$$\left. f(z, t \mid x_0, t_0) - \int_I R(x) \cdot f(x, t \mid x_0)\, dx \right\}$$

Passando al limite $\Delta t \to 0$ e sviluppando in serie di Taylor:

$$\int_I \frac{\partial f}{\partial t} R(x)\, dx = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iint_I dx\, dz \left[\cancel{R(z)} \cdot \sum_1^\infty \frac{(x-z)^n}{n!} \cdot \frac{d^n R}{dz^n} \right] f(x, t+\Delta t \mid x_0, t_0) \cdot f(z, t \mid x_0, t_0) \right.$$

$$\left. - \int_I \cancel{R(x)\, f(x, t \mid x_0, t_0)}\, dx \right\}$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{n!} \cdot \int dz \cdot \frac{d^n R(z)}{dz^n} f(z, t \mid x_0, t_0)\, A_n(z, t)$$

avendo posto:

$$A_n(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \int (x - z)^n \cdot f(x, t \mid x_0, t_0)$$

Si ha poi:

$$\int_I R(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}\, dx = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \int dz\, R(z) \frac{\partial^n f(z, t \mid x_0, t_0)}{\partial z^n} A_n(z, t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n [f(x, t \mid x_0, t_0)\, A_n(x, t)]}{\partial x^n}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, t)\, f(x, t \mid x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} [\sigma^2(x, t)\, f(x, t \mid x_0, t_0)]$$

Esempi:

- Moto browniano

Sia $\sigma^2 = 2$, $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f(x,t \mid x_0,t_0) \xrightarrow{t \to t_0} \delta(x-x_0)$

Utilizziamo le trasformate di Fourier:

$$\varphi(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x,t)\, dx$$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \varphi(\lambda,t)\, d\lambda$$

$$\frac{\partial \varphi(\lambda,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx = e^{i\lambda x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - i\lambda \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = -\lambda^2 \cdot \varphi(\lambda,t)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\lambda^2 \cdot \varphi$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\lambda^2 \cdot dt$$

$$\ln \varphi(\lambda,t) = -\lambda^2 \cdot t + H(\lambda)$$

$$\varphi(\lambda,t) = \psi(\lambda) \cdot e^{-\lambda^2 t}$$

Applichiamo ora la trasformata anche alla condizione iniziale:

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(\lambda,t) = \lim_{t \to t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x,t \mid x_0)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \delta(x-x_0)\, dx = e^{i\lambda x_0}$$

$$\varphi(\lambda,t_0) = e^{i\lambda x_0} = \psi(\lambda) \cdot e^{-\lambda^2 t_0} \Rightarrow \psi(\lambda) = e^{i\lambda x_0 + \lambda^2 t_0}$$

$$\varphi(\lambda,t) = e^{i\lambda x_0 + \lambda^2 t_0 - \lambda^2 t} = e^{i\lambda x_0}\, e^{-\lambda^2 (t-t_0)}$$

- Vediamo ora il caso che contempla la presenza di drift:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f(x,t \mid x_0,t_0) \xrightarrow{t \to t_0} \delta(x-x_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} = \mu \cdot \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$$

Consideriamo ora le seguenti trasformazioni:

$$\begin{cases} x_0' = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x_0 - \mu t_0) \\ t_0' = t_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x - \mu t) \\ t' = t \end{cases}$$

In questo modo si conserva la massa probabilistica:

$$f'(x',t' \mid x_0',t_0')\, dx = f(x,t \mid x_0,t_0)\, dx$$

e inoltre si semplifica l'equazione:

$$\frac{\partial f'}{\partial t_0'} = \frac{\partial^2 f'}{\partial x_0'^2}$$

con $\lim_{t' \to t_0'} f'(x',t' \mid x_0',t_0') = \delta(x'-x_0')$

$$f(x,t \mid x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)}} \cdot \exp\left\{-\frac{[x-x_0-\mu(t-t_0)]^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right\}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x,t \mid x_0,t_0)\,dx = \begin{cases} 0 & \mu>0 \\ 1/2 & \mu=0 \\ 1 & \mu<0 \end{cases}$$

(12.04.2011)

- Processo O.U. (Ornstein - Uhlenbeck)

$$\begin{cases} \mu(x) = -\frac{x}{\theta} \\ \sigma^2(x) = \sigma^2 \end{cases}$$

$$dX(t) = \frac{X(t)}{\theta}\,dt + \sigma \cdot dW(t)$$

Se $\sigma = 0$, $\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{X(t)}{\theta}$

Vediamo di risolvere l'equazione di Fokker Plank per questo:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\theta} f\right) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \lim_{t\to t_0} f(x,t \mid x_0,t_0) = \delta(x-x_0) \end{cases}$$

Si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \cdot \{\dots\}\,dx$$

Ponendo $\varphi(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x,t)\,dx$ risulta:

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = -\frac{x}{\theta} e^{-i\lambda x} f\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\lambda}{\theta} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x f e^{-i\lambda x}\,dx$$
$$+ \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f}{\partial x} e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{i\lambda\sigma^2}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x} e^{-i\lambda x}\,dx$$
$$= 0 - \frac{1}{i} \cdot \frac{d}{d\lambda} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot e^{-i\lambda x}\,dx$$
$$+ 0 - \lambda^2 \cdot \frac{\sigma^2}{2} \varphi(\lambda,t)$$
$$= -\frac{\lambda}{\theta} \cdot \frac{\partial \varphi(\lambda,t)}{\partial \lambda} - \lambda^2 \cdot \frac{\sigma^2}{2} \varphi(\lambda,t)$$

ovvero:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\lambda}{\theta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = -\lambda^2 \cdot \frac{\sigma^2}{2} \varphi(\lambda,t)$$

Con il metodo delle caratteristiche si risolve:

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\lambda}{\frac{\lambda}{\theta}} = \frac{d\varphi}{-\lambda^2 \cdot \frac{\sigma^2}{2} \cdot \varphi}$$

$$\begin{cases} dt = \frac{d\lambda}{\lambda/\theta} \implies \lambda = \kappa e^{t/\theta} & \kappa = \lambda e^{-t/\theta} \\ \frac{d\lambda}{\lambda/\theta} = \frac{d\varphi}{-\lambda^2 \cdot \frac{\sigma^2}{2} \varphi} \implies \lambda\,d\lambda = \frac{d\varphi}{-\frac{\sigma^2}{2}\theta\varphi} & \ln\varphi = \frac{\lambda^2}{2}\frac{\sigma^2}{2}\theta + H \end{cases}$$

$$\varphi = \exp\left\{-\frac{\sigma^2\theta}{4}\lambda^2\right\} H'$$

$$H' = \varphi \cdot \exp\left\{\frac{\sigma^2\theta}{4}\lambda^2\right\} \qquad H' = \mathcal{H}(k)$$

per il metodo delle costanti arbitrarie

$$\varphi \cdot \exp\left\{\frac{\sigma^2\theta}{4}\lambda^2\right\} = \mathcal{H}(\lambda \cdot e^{-t/\theta})$$

$$\varphi(\lambda, t) = e^{-\frac{\sigma^2\theta}{4}\lambda^2} \cdot \mathcal{H}(\lambda \cdot e^{-t/\theta})$$

Imponiamo ora la condizione iniziale:

$$\varphi(\lambda, t_0) = \lim_{t \to t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x, t \mid x_0, t_0)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \delta(x - x_0)\, dx = e^{-i\lambda x_0}$$

In definitiva risulta dunque:

$$\varphi(\lambda, t) = e^{-\frac{\sigma^2}{4}\theta\lambda^2} e^{-i\lambda x_0}$$

e antitrasformando:

$$f(x, t \mid x_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2\theta(1 - e^{-t/\theta})}} \exp\left\{-\frac{(x - x_0 e^{-t/\theta})^2}{\sigma^2\theta(1 - e^{-2t/\theta})}\right\}$$

Esercizio: operare gli stessi passaggi per un processo del tipo $\mu(x) = px + q$, $\sigma^2(x) = 2rx$ (processo di Feller)

Un altro metodo che può essere seguito è quello di trasformare il processo di Ornstein - Uhlenbeck nel processo di Wiener. Operando i cambiamenti di variabile:

$$\begin{cases} x_0' = \psi(x_0, t_0) = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\, e^{-t_0/\theta} x_0 \\ t_0' = \varphi(t_0) = \frac{\theta}{2} \cdot e^{2t_0/\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \psi(x, t) \\ t' = \varphi(t) \end{cases}$$

$$f(x, t \mid x_0, t_0)\, dx = f'(x', t' \mid x_0', t_0')\, dx'$$

$$f(x, t \mid x_0, t_0) = f'(x', t' \mid x_0', t_0') \cdot \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\, e^{t/\theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} = -\frac{x_0}{\theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \xrightarrow{\varphi, \psi} \frac{\partial f'}{\partial t_0'} = \frac{\partial^2 f'}{\partial x_0'^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \cdot e^{t/\theta} \cdot \frac{\partial f'}{\partial t_0} = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \cdot e^{t/\theta} \left[\frac{\partial f'}{\partial x_0'} \frac{\partial x_0'}{\partial t_0} + \frac{\partial f'}{\partial t_0'} \frac{\partial t_0'}{\partial t_0}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \cdot e^{t/\theta} \cdot \left[\frac{\partial f'}{\partial x_0'} \cdot \frac{x_0'}{\theta} + \frac{\partial f'}{\partial t_0'} \frac{2t_0'}{\theta}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \cdot e^{t/\theta} \cdot \frac{\partial f'}{\partial x_0'} \cdot \frac{\partial x_0'}{\partial x_0} = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\, e^{t/\theta} \cdot \frac{\partial f'}{\partial x_0} \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \cdot e^{t_0/\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\, e^{t/\theta} \cdot \frac{\partial f'}{\partial x_0} \cdot \frac{-x_0'}{x_0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \cdot e^{t/\theta} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\, e^{t_0/\theta} \cdot \frac{\partial^2 f'}{\partial x_0'^2} \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\, e^{t_0/\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \cdot e^{t/\theta} \cdot \frac{\partial^2 f'}{\partial x_0'^2} \cdot \frac{2}{\sigma^2}\, e^{2t_0/\theta}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \cdot e^{t/\theta} \cdot \left\{ \frac{\partial f'}{\partial x_0'} \cdot \frac{x_0'}{\theta} + \frac{\partial f'}{\partial t_0'} \cdot \frac{2t_0'}{\theta} + \frac{x_0'}{\theta} \frac{\partial f'}{\partial x_0'} + \frac{2t_0'}{\theta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial f'}{\partial t_0'} + \frac{\partial^2 f'}{\partial x_0'} = 0$$

Teorema

Siano $c_1(t)$ e $c_2(t)$ funzioni arbitrarie del tempo. Il processo la cui densità di probabilità di transizione f è soluzione dell'equazione di Kolmogorov:

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + b(x_0, t_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_0} + a(x_0, t_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0$$

è trasformabile in un processo di Wiener con $\sigma^2 = 2$.

$$\frac{\partial f'}{\partial t_0'} + \frac{\partial^2 f'}{\partial x_0'^2} = 0$$

se e solo se si ha:

$$b(x_0, t_0) = \frac{a'_{x_0}(x, t_0)}{2} + \frac{\sqrt{a(x_0, t_0)}}{2} \left\{ c_1(t_0) + \int^{x_0} dz \; c_2(t_0) \cdot \frac{a(z, t_0) - a'_2(z, t_0)}{[a(z, t_0)]^{3/2}} \right\}$$

In tal caso

$$\psi(x_0, t_0) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \cdot \int^{t_0} ds \; c_1(s) \cdot \int^{x_0} dz \, [a(z, t_0)]^{1/2} \right\}$$

$$\varphi(t_0) = \int^{t_0} d\theta \; \exp\left\{ -\int^{\theta} ds \; c_2(s) \right\}$$

con $f(x, t \mid x_0, t_0)\, dx = f'(x', t' \mid x_0', t_0')\, dx'$

DISTRIBUZIONI STAZIONARIE

$\exists \lim_{t \to \infty} f(x, t \mid x_0, t_0) = W(x)$

$$f(x, t+s \mid x_0) = \int dz \; f(x, t \mid z, \bar{s})\, f(z, \bar{s} \mid x_0)$$

~~$W(x) = \int dz \; W x$~~

$$p(t+s, x, y) = \int p(t, x, z)\, p(s, z, y)\, dz$$

$$f(t+s, y \mid x, 0) = \int f(z, t \mid x)\, f(y, s \mid z)\, dz$$

$$f(t, y \mid x, s) = \int f(z, t \mid x)\, f(y, t+s \mid z, t)\, dz$$

$$= \int f(z, t \mid x)\, f(y, s \mid z)\, dz$$

$$W(y) = \int W(z)\, f(y, s \mid z)\, dz$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sigma^2(y) \cdot W(y)] - \frac{\partial}{\partial y} [\mu(y)\, W(y)] = 0$$

(13.04.2011)

Vediamo di risolvere:

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{\sigma^2(y)}{2} W(y)\right] - \mu(y) W(y) = 0 \frac{1}{2} c_1$$

avendo integrato una volta l'equazione precedente.

Utilizzando la funzione $s(y) = \exp\left\{-\int^y \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)} dz\right\}$, giungiamo a:

$$\frac{d}{dy}\left[s(y) \cdot \sigma^2(y) \cdot W(y)\right] = c_1 \cdot s(y)$$

$$W(y) = m(x) \cdot [c_1 \cdot s(x)] + c_2$$

e devono esistere c_1, c_2 affinchè la funzione sia effettivamente una densità di probabilità.

Per esempio, nel caso del processo di Ornstein – Uhlenbeck:

$$s(x) = e^{\mu x^2/\sigma^2}$$

$$W(x) = c_1 \left(\int_0^x e^{\mu x^2/\sigma^2} dx\right) e^{-\mu x^2/\sigma^2} + c_2 e^{\mu x^2/\sigma^2}$$

e deve essere $c_1 = 0$.

BARRIERE

Richiamiamo la funzione di scala:

$$S(x) = \int^x d\xi \; e^{-\int \frac{2\mu(v)}{\sigma^2(v)} dv}$$

Sia $J = [c,d] \subset (l,r) = I$, possiamo definire:

$S[J] = S[c,d] = S(d) - S(c)$, che gode delle seguenti proprietà:

- $S[c,d] \in (0,\infty)$
- $S[c,d] = S[c,x] + S[x,d] \qquad x \in [c,d]$
- $S[c,d]$ è monotona per d fissato.

Accanto a questa introduciamo anche:

$$M[J] = M[c,d] = \int_c^d m(x)\,dx = \int_c^d \frac{1}{\sigma^2(x) s(x)} dx$$

$$u(x) = P(T_b < T_a \mid X(0) = x) = \frac{S[a,x]}{S[a,b]}$$

$$V_{a,b}(x) = E[T^* \mid X(0) = x] = 2 \cdot \left\{u(x) \cdot \int_x^b S(\eta,b)\, dM(\eta) + (1-u(x)) \cdot \int_a^x S(a,\eta)\, dM(\eta)\right.$$

Enunciamo che:

$S(l,b] = \infty$ per un qualche $b \Rightarrow$ è sempre ∞

Possiamo anche definire:

$T_{l^+} = \lim_{a \downarrow l} T_a$, che ha senso poichè T_a è monotona non crescente di a. Si ha che $T_l = T_{l^+}$, anche se non lo

Lemma

- Sia $(\ell, x_0] < \infty$ per un qualche $x_0 \in (\ell, r)$, allora
$$P(T_{\ell^+} \leq T_b \mid X(0) = x_0) > 0 \quad \forall x_0 \in (\ell, b] \subset (\ell, r)$$
- Sia $(\ell, x_0) = \infty$, allora:
$$P(T_{\ell^+} \leq T_b \mid X(0) = x_0) = 0$$

Def.

- Una baniera si dice attrattiva se $S(\ell, x]$ è finito.

  Es. moto browniano standard
  $$S[a,x] = x - a \qquad S(-\infty, x) = \infty$$
  moto browniano con drift $\mu < 0$
  $$S[a,x] = e^{-2\mu x} - e^{-2\mu a} \qquad S(-\infty, x] = e^{-2\mu x} > 0$$
  Nel primo caso la baniera è dunque non attrattiva, mentre nel secondo sì.

- Una baniera si dice raggiungibile (accessibile) se il tempo medio per raggiungerla è finito.

  Es. Consideriamo una baniera attrattiva, ovvero tale per cui $S(\ell, x) < \infty$. Per il lemma sappiamo che essa può essere raggiunta in un tempo opportuno con probabilità maggiore di 0 per ogni x_0. Si ha:
  $$V_{a,b}(x) = 2\left\{ \frac{S[a,x]}{S[a,b]} \int_x^b \dots + \frac{S[x,b]}{S[a,b]} \int \dots \right\}$$
  ($\frac{S[a,x]}{S[a,b]}$: finiti >0; $\frac{S[x,b]}{S[a,b]}$: finito >0)

  Ne consegue che:
  $$\lim_{a \downarrow \ell} E[T^{\wedge} \mid X(0) = x] < \infty \quad \text{se e sdo se} \quad \lim_{a \downarrow \ell} \int_a^x S(a, \xi)\, d\Pi(\xi) < \infty$$
  ($T^{\wedge} = T_a \wedge T_b$); il limite viene chiamato talvolta $\Sigma(\ell)$. Abbiamo dunque caratterizzato la raggiungibilità per baniere attrattive.
  Si può verificare che nel caso del moto browniano con drift $\Sigma(\ell) = \infty$, e dunque la baniera è irraggiungibile.

Lemma

- Sia ℓ attrattiva. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  - $P(T_\ell < \infty \mid X(0) = x) > 0$
  - $E[T_\ell \wedge T_b \mid X(0) = x] < \infty$
  - $\Sigma(\ell) < \infty$

Def.

- $M(\ell, x] = \lim_{a \uparrow \ell} M[a, x]$
- $N(\ell) = \int_\ell^x S[\eta, x] \, d M(\eta)$

Lemma: Valgono le seguenti relazioni

- $S(\ell, x] = \infty \rightarrow \Sigma(\ell) = \infty$]
- $\Sigma(\ell) < \infty \rightarrow S(\ell, x] < \infty$]
- $M(\ell, x] = \infty \rightarrow N(\ell) = \infty$]
- $N(\ell) < \infty \rightarrow M(\ell, x] < \infty$]
- $\Sigma(\ell) + N(\ell) = S(\ell, x] + M(\ell, x]$

Una tabella può essere organizzata nel seguente modo:

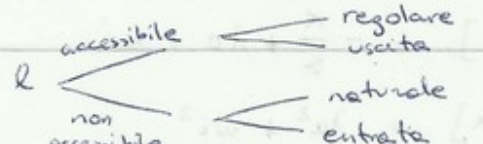
$S(\ell,x]$	$M(\ell,x]$	$\Sigma(\ell)$	$N(\ell)$	Possibile?	Perchè?

a seconda che i vari valori siano finiti o meno.

Dei 16 casi realizzabili a priori, soltanto 6 sono effettivamente ammissibili, e ammettono una denominazione:

$S(\ell,x]$	$M(\ell,x]$	$\Sigma[\ell]$	$N(\ell)$	Feller	Russi
$< \infty^*$	$< \infty^*$	$< \infty$	$< \infty$	regolare	attrattiva
$< \infty$	$= \infty^*$	$< \infty^*$	$= \infty$	uscita, trappola assorbente	attrattiva raggiungibile
$< \infty^*$	$= \infty^*$	$= \infty^*$	$= \infty$	naturale	attrattiva inraggiungibile
$= \infty^*$	$< \infty^*$	$= \infty$	$= \infty^*$	naturale	non attrattiva naturale, inraggiung.
$= \infty^*$	$= \infty^*$	$= \infty$	$= \infty$	naturale	non attrattiva inraggiungibile
$= \infty^*$	$< \infty$	$= \infty$	$< \infty^*$	entrata	non attrattiva inraggiungibile

dove abbiamo indicato con $*$ le quantità effettivamente da controllare, derivando le altre di conseguenza in virtù del lemma precedente.



Significato delle baniere:

- regolare: può essere attraversata da una parte come dall'altra, un esempio è dato da ogni valore reale nel processo di Wiener.
- assorbente: $M[\xi_\ell \gamma] = \lim_{x \to \ell} \mu(x)\, e^{-\int \frac{2\mu(x)}{\sigma^2(x)} dx} f(x,t|x_0,t_0) = 0$

  ↳ $\lim_{x \to \ell} f^a(x,t|x_0,t_0) = 0$ nel caso non singolare

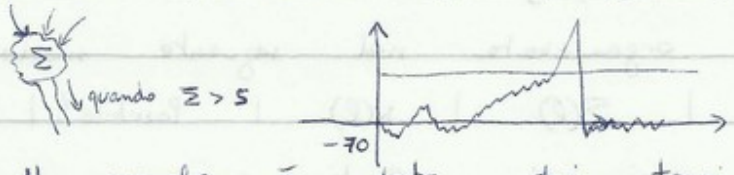
  ↳ $\lim_{x \downarrow \ell} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sigma^2(x)}{2} f\right) - \mu(x) f = 0$ flusso attraverso ℓ
- uscita: $\lim_{b \downarrow \ell} \lim_{x \downarrow \ell} P(T_b < t \mid X(0) = x) = 0$

Es. Studiare la natura delle baniere del processo di Bessel

$\mu(x) = \frac{\alpha - 1}{2x}$, $\sigma^2(x) = 1$.

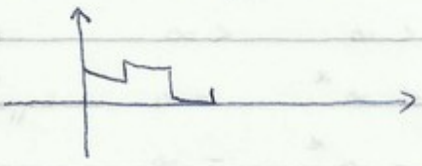
(14.04.2011)

MODELLI MATEMATICI PER I NEURONI



Il segnale è dato dai tempi che intercorrono tra i picchi

Il modello di Stein prevede che il potenziale di membrana tenda naturalmente a decadere, salvo la possibilità di impulsi (positivi o negativi)



$$dx(t) = -\frac{x(t)}{\theta} dt + a \cdot dN^+(t) + i \cdot dN^-(t) \qquad a > 0 \quad i < 0$$

$N^+(t) \sim$ P Poisson (λ)

$N^-(t) \sim$ P Poisson (ω)

$$E[X(t) \mid X(0) = x_0] = x_0\, e^{-t/\theta} + (\lambda a + i\omega)\,\theta\,(1 - e^{-t/\theta})$$

$$E[X(\infty)] = (\lambda a + \omega i)\,\theta$$

$$M(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E[X(t+h) - X(t) \mid X(t) = x] = -\frac{x}{\theta} + \lambda a + \omega i$$

$$M_2(x) = \lim E[(X(t+h) - X(t))^2 \mid X(t) = x] = \lambda a^2 + \omega i^2$$

Per $\lambda \to \infty$, $\omega \to \infty$, $a \to 0$, $i \to 0$, si dovrà avere:

$\cdot\ \lambda a + \omega i \to \mu$ $\qquad$ $\cdot\ \lambda a^2 + \omega i^2 \to \sigma^2$

Se si vorrà avere $\mu \neq 0$:

$\cdot\ a(n) = -i(n) \sim \frac{1}{n}$ $\qquad$ $\cdot\ \lambda(n) = \mu n \frac{(\sigma n)^2}{2}$ $\qquad$ $\cdot\ \omega(n) = \frac{(\sigma n)^2}{2}$

$$f(x,t \mid x_0,t_0) = \frac{\partial P(X(t) < x \mid X(t_0) = x_0)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(-\frac{x}{\theta} + \mu\right) f\right] + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$\{T^{(n)}\} \longrightarrow \{\textcircled{H}\}$

$x^n \longrightarrow y$

$T = \inf\{t > 0 : X(t) > s\}$

$\frac{\partial P}{\partial t}(T < t \mid X(0) = x_0) = g(s,t \mid x_0,t_0)$

$y^c(t) = \{y(t),\ t \in (t_0,t_1) \mid y(t) < S,\ t \in (t_0,t_1),\ y(t_0) = y_0\}$

$y^a(t) = \{y(t),\ t \in (t_0,t_1),\ y(t) < S,\ t \in (t_0,t_1) \mid y(t_0) = y_0\}$

$f^{(a)}(y,t \mid y_0,t_0)$ soluzione dell'equazione di Kolmogorov con $f^{(a)}(y,t \mid y_0,t_0)\big|_{y=s} = 0$

$$f^c_{t_1}(x,t \mid y,s) = f^a(x,t \mid x_0,t_0) \cdot \frac{P(T > t_1 \mid x_0,t_0)}{P(T > t_1 \mid X(s) = s)}$$

$$g(s,t \mid x_0,t_0) = \frac{\partial P(T < t \mid X(0) = x_0)}{\partial t}$$

$$f(x,t \mid x_0,t_0) = \int_{t_0}^{t} g(s,\tau \mid x_0,t_0) \cdot f(x,t \mid s,\tau)\, d\tau$$

$$f(s,t \mid x_0,t_0) = \int_{t_0}^{t} g(s,\tau \mid x_0,t_0) \cdot f(s,t \mid s,\tau)\, d\tau \qquad \text{equazione di Forket (1943)}$$

$$= \int_{t_0}^{t} g(s,\tau \mid x_0,t_0) \cdot f(s,t-\tau \mid s)\, d\tau$$

Se $t_0 = 0$:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot f(s,t \mid x_0)\, dt = f_\lambda(s \mid x_0) \qquad f_\lambda(s \mid s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(s,t \mid s)$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot f(s,t \mid s)\, dt = g_\lambda(s \mid x_0)$$

$$g_\lambda(s \mid x_0) = \frac{f_\lambda(s \mid x_0)}{f_\lambda(s \mid s)} \qquad g(s,t \mid x_0) = \frac{|s - x_0|}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left\{-\frac{(s-x_0)^2}{2\sigma^2 t}\right\}$$

$$= e^{\frac{x_0^2 - s^2}{2}} \cdot \frac{D_{-\lambda\theta}\left(-\sqrt{2\sigma^2\theta}\, x_0\right)}{D_{-\lambda\theta}\left(-\sqrt{2\sigma^2\theta}\, S\right)}$$

che non è risolvibile esattamente.

Possiamo fruire di tavole:

	Media	Varianza	Skewness
3	μ	μ^2	2,00...

Questi risultati suggeriscono una distribuzione di tipo esponenziale:

$$g(s,t|x_0) \sim \frac{1}{\varepsilon T} e^{-\frac{t}{\varepsilon T}}$$



$$E(x(\infty)) = \mu\theta$$

$$f(s,t|x_0) = \int_0^t g(s,\tau|x_0) \cdot \underbrace{f(s,t|s,\tau)}_{\sim \frac{\kappa(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}}} d\tau$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_s^\infty f(x,t|x_0) = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \int_0^t g(s,\tau|x_0) \cdot \int_s^\infty f(x,t|s,\tau)\, d\tau$$

$$j(s,t|x_0) = g(s,t|x_0) \cdot \lim_{\tau \to t} \int_s^\infty \overbrace{f(x,t|s,\tau)\, d\tau}^{\to 1/2}$$

$$= -\int_0^t g(s,\tau|x_0) \cdot \overbrace{j(s,t|s,\tau)\, d\tau}^{\frac{\kappa'(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}}}$$

$$g(s,t|x_0) = j(s,t|x_0) + \sum 2^n \int S(s,t|x_0) \cdot j(s,t|s,\tau)$$

$$\mu(x,t) = -\frac{x}{\theta} + \sin \omega t \qquad \mu(y,\tau) = -\frac{y}{\theta}$$

$$\sigma^2(x,t) = \sigma \sim \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^2 = \varepsilon$$





19.04.2011

Se il processo è di Markov si può sempre scrivere l'eq di Kolmogorov.

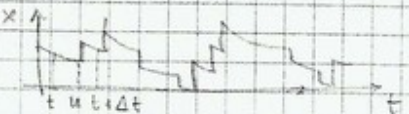
Processo di Stein:

(CK) $f(x, t+\Delta t \mid x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t+\Delta t \mid z, t)\, f(z, t \mid x_0, t_0)\, dz$

$z \mapsto x_1 = z e^{-\Delta t/\vartheta}$ ~~in generale~~ (no salti)

$z \mapsto x_2^{(u)} = z e^{-u/\vartheta} + a\, e^{-(t+\Delta t-u)/\vartheta}$

$z \mapsto x_3^{(u)} = z e^{-u/\vartheta} + i\, e^{-(t+\Delta t-u)}$



salto positivo al tempo $u \in (t, t+\Delta t)$

salto negativo al tempo $u \in (t, t+\Delta t)$

$$x_i = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} x_i(u)\, du$$

$$f(x, t+\Delta t \mid z, t) = \left[1 - (\lambda+\omega)\Delta t\right] \delta(x - x_1) + \lambda \Delta t\, \delta(x - x_2) + \omega \Delta t\, \delta(x - x_3) + o(\Delta t$$

integro (eq. (CK))

$$f(x, t+\Delta t \mid x_0, t_0) = e^{\Delta t/\vartheta} \Big\{ \left[1 - (\lambda+\omega)\Delta t\right] f(x e^{\Delta t/\vartheta}, t \mid x_0, t_0) +$$

$$+ \lambda \Delta t\, f\left(x e^{\Delta t/\vartheta} - \frac{a\vartheta}{\Delta t}\left(e^{\Delta t/\vartheta} - 1\right), t \,\middle|\, x_0, t_0\right) +$$

$$+ \omega \Delta t\, f\left(x e^{\Delta t/\vartheta} - \frac{i\vartheta}{\Delta t}\left(e^{\Delta t} - 1\right), t \,\middle|\, x_0, t_0\right) \Big\} + o(\Delta t)$$

Adesso $\Delta t \to 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\vartheta} f\right) + \lambda \left[f(x-a, t \mid x_0, t_0) - f(x, t \mid x_0, t_0) \right] +$$

$$+ \omega \left[f(x-i, t \mid x_0, t_0) - f(x, t \mid x_0, t_0) \right]$$

Taylor in $x = a$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\vartheta} f\right) - \lambda a \frac{\partial f}{\partial x} - \omega i \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} (a^n \lambda + i^n \omega)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-\partial}{\partial x}\left\{ \left[-\frac{x}{\vartheta} + (\lambda a + \omega i) \right] f \right\} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} (a^n \lambda + i^n \omega) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \left(-\frac{x}{\vartheta} + \mu \right) f \right\} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$\lambda, \omega \to +\infty$ $\quad \lambda a + i\omega \to \mu$ $\quad \lambda a^n + i^n \omega \to 0$ $\quad \forall n > 2$

$a, i \to 0$ $\quad \lambda a^2 + i^2 \omega \to \sigma^2$

esercizio

Sia X un p.s. con densità f che soddisfa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\sigma^2(t,t_0)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \text{con } \sigma^2(t,t_0)>0 \ \forall (t,t_0), \quad \sigma^2(t,t_0)\to 0 \text{ per } t\to t_0 \\ \lim\limits_{t\to t_0} f(x,t\,|\,x_0,t_0) = \delta(x-x_0) \end{cases}$$

1) Verificare che

$$f(x,t\,|\,x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t,t_0)}}\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2(t,t_0)}\right\}$$

è soluz dell'eq. e verifica la c.i.

2) $f(x,t\,|\,x_0,t_0)$ è la d.d.p. di un processo di diffusione?

solo se $\sigma^2(t,t_0)$ è indipendente da t_0 (altrimenti non è di Markov)
(e se $\sigma^2(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int f \ldots -$

Esercizio:

$\mu(t)$, $\sigma^2(t)$ continue

$f(x,t\,|\,x_0,t_0) = ?$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \mu(t)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\sigma^2(t)}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \lim\limits_{t\to t_0} f(x,t\,|\,x_0,t_0) = \delta(x-x_0) \end{cases}$$

Trasf Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}e^{-i\lambda x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\mu(t)\frac{\partial f}{\partial x}e^{-i\lambda x}\,dx + \frac{\sigma^2(t)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}e^{-i\lambda x}\,dx$$

$$\varphi(\lambda,t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,e^{-i\lambda x}\,dx$$

$$\frac{\partial \varphi}{t} = \mu(t)\left[e^{-i\lambda x}f(x,t)\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\lambda\mu(t)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,e^{-i\lambda x}\,dx + \frac{\sigma^2(t)}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}e^{-i\lambda x}\right.$$

∂

$- - -$

OPPURE

uso il teorema che verifica la trasformabilità in MB.
Vedo che devo scegliere $c_2(t) = 0$ e $c_1(t) = \frac{2\mu(t)}{2\sqrt{\sigma^2(t)/2}} =: \psi(t)$

Le trasf. sono

$$x' = \sqrt{k_1}\,\frac{x\,2^{3/2}}{[\sigma^2(t)]^{3/2}} - \frac{\sqrt{k_1}}{2}\int \psi(t)\,dt + k_3$$

$$t' = t$$ da finire

Esercizio

Sia B un mb standard. Si consideri

$$X_t = B_t - B_1, \quad t \in (0,1)$$

1) Distrib. di X_{1-t}
2) (X_t) è indip. da B_1 ?
3) $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = ?$

1) $X_{1-t} = B_{1-t} - B_1$ ~ mb std

2) no perché il mb è indip. dal passato, non dal futuro

3) $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_s - \mathbb{E}(X_s))\right] = \mathbb{E}\left[(B_t - B_1)(B_s - B_1)\right] =$

$$= \mathbb{E}\left[(B_t - B_1)(B_s - B_1)\right] = \mathbb{E}\left[B_t B_s - B_1 B_s - B_t B_1 + B_1^2\right] =$$
$$= \mathbb{E}(B_t B_s) - \mathbb{E}(B_1 B_s) - \mathbb{E}(B_1 B_t) + \mathbb{E}(B_1^2) =$$
$$= \min(t,s) - s - t + 1$$

2) Poiché la distrib. è $\mathcal{N}(0,t)$ controllo la covarianza $(=0)$

$$\mathrm{cov}(X_t, B_1) = \mathbb{E}\left[(B_t - B_1 - \underbrace{\mathbb{E}(B_t - B_1)}_{=0})(B_1 - \underbrace{\mathbb{E}(B_1)}_{=0})\right] =$$
$$= \mathbb{E}\left[B_t B_1 - B_1^2\right] = t - 1 \neq 0 \quad \text{in gen}$$

conseguenza: muart dopo Pasqua

(20.04.2011)

Consideriamo un moto browniano standard.

- Stabilire se siano moti browniani i processi:

1. $\{-B(t),\ t\geq 0\}$
2. $\{\sqrt{t}\cdot B(1),\ t\geq 0\}$
3. $\{B(2t)-B(t),\ t\geq 0\}$

Risoluzione:

1. Verifichiamo che sono soddisfatte le condizioni:
   - $B(0)=0 \Rightarrow -B(0)=0$;
   - se vale $B(t_1+s)-B(t_1) \sim B(t_2+s)-B(t_2)$, allora $[-B(t_1+s)]-[-B(t_1)] \sim [-B(t_2+s)]-[-B(t_2)]$;
   - analogamente si conserva l'indipendenza per degli incrementi per intervalli disgiunti;
   - $B(t+s)-B(s) \sim N(0,t-s)$
   - $[-B(t+s)]-[-B(s)]$ è il procedimento moltiplicato per -1, per cui è $\sim N((-1)\cdot 0,(-1)^2\cdot(t-s))$, ovvero $\sim N(0,t-s)$. Sì
2. No, in quanto gli incrementi per intervalli disgiunti non sono indipendenti: posto $\varphi(t)=\sqrt{t}\cdot B(1)$, fissato $\varphi(1)-\varphi(0)$, $\varphi(2)-\varphi(1)$ è per forza pari a $(\sqrt{2}-1)$ volte il precedente. No
3. Proviamo a verificare le condizioni; sia $\beta(t)=B(2t)-B(t)$
   - $B(0)=0 \Rightarrow B(2\cdot 0)-B(0)=0 \Rightarrow \beta(0)=0$

   ~~$B(t_1+s)-B(t_1) \sim B(t_2+s)-B(t_2)$~~
   ~~se e solo per ogni t_1, t_2~~

   ? [
   - $\beta(t_1+s)-\beta(t_1) \sim \beta(t_2+s)-\beta(t_2)$

     $B(2(t_1+s))-B(t_1+s)-B(2t_1)+B(t_1) \sim B(2(t_2+s))-B(t_2+s)+B(2t_2)+B(t_2)$

     $B(2(t_1+s))-B(2t_1) \sim B(2(t_2+s))-B(2t_2)$]

   - $B(2t)-B(t)-B(2s)+B(s)$

     che in generale non è $N(0,t-s)$ No

· Siano $t_1 < t_2 < t_3$. Determinare $E[B(t_1)\,B(t_2)\,B(t_3)]$.

Risoluzione

~~$E[B(t_1)\,B(t_2)\,B(t_3)] = E[B(t_1)\,B(t_1+h)\,B(t_1+h+k)]$~~ Ponendo:

$$B(t_2) = B(t_1) + (B(t_2) - B(t_1))$$

$$B(t_3) = B(t_1) + (B(t_2) - B(t_1)) + (B(t_3) - B(t_2))$$

si ha $E[B(t_1)\,B(t_2)\,B(t_3)] = E\{B(t_1)\cdot[B(t_1) + (B(t_2) - B(t_1))]$

$$\cdot[B(t_1) + (B(t_2) - B(t_1)) + (B(t_3) - B(t_2))]\}$$

$$= E\{[B^2(t_1) + B(t_1)[B(t_2) - B(t_1)]]\cdot[B(t_1) + (B(t_2) - B(t_1)) + (B(t_3) - B(t_2))]\}$$

$$\left[= E[B^3(t_1)] + E[B^2(t_1)\cdot(B(t_2) - B(t_1))] + E[B^2(t_1)\cdot(B(t_3) - B(t_2))]\right.$$

$$\left. + E[B^2(t_1)\cdot(B(t_2) - B(t_1))] + E[B(t_1)\cdot((B(t_2) - B(t_1))^2] + E[B(t_1)(B(t_2) - B(t_1))(B(t_3) - B(t_2))\right.$$

e si procede di seguito.

Una risoluzione più rapida può essere data da:

$$E[B(t_1)\,B(t_2)\,B(t_3)]$$

$$= E[B(t_1)\,B(t_2)\,(B(t_3) - B(t_2) + B(t_2))]$$

$$= E[(B(t_3) - B(t_2))\,B(t_2)\,B(t_1)] + E[B^2(t_2)\,B(t_1)]$$

$$= E[(B(t_3) - B(t_2))(B(t_2) - B(t_1) + B(t_1))\,B(t_1)] + [E(B^2(t_2)\,B(t_1))]$$

$$= E[B(t_1)(B(t_2) - B(t_1))(B(t_3) - B(t_2))] + E[(B(t_3) - B(t_2))\cdot B^2(t_1)] + E[B^2(t_2) - B(t_1)]$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

Sia $\{X(t),\ t \geq 0\}$ processo di diffusione, $\mu(x) = mx$, $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^2$, $I = (0, \infty)$. Determinare eventuali barriere e la loro natura.

Risoluzione

~~$S(a,\infty) = S(\infty) - S(a) = \int_0^{\infty} d\xi \cdot e^{-\int \frac{mx}{\sigma^2 x^2}} - \int_0^{0} d\xi \cdot e^{-\int \frac{mx}{\sigma^2 x^2}}$~~

$$s(x) = \exp\left\{-2\cdot\int^{x} \frac{\mu(\xi)}{\sigma^2(\xi)}\,d\xi\right\} = \exp\left\{-2\cdot\int \frac{m\xi}{\sigma^2\xi^2}\,d\xi\right\} = x^{2m/\sigma^2}$$

$$S(x) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 2m}\cdot x^{1-2m/\sigma^2}$$

$$m(x) = \frac{1}{\sigma^2}\cdot x^{2m/\sigma^2 - 2}$$

$$S(0,x] = \lim_{a \to 0} S(x) - S(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 - 2m/\sigma^2 > 0 \\ \infty & \text{se } 1 - 2m/\sigma^2 < 0 \end{cases}$$

Consideriamo il caso in cui $S(0,x) < \infty$, ovvero $1 - 2m/\sigma^2 \geq 0$

Si ha:

- $\Sigma(0) = \lim_{a \downarrow 0} \int_a^x \left(\xi^{1-2m/\sigma^2} - a^{1-2m/\sigma^2}\right) \cdot \frac{\xi^{2m/\sigma^2 - 2}}{\sigma^2} \, d\xi = \infty$
- $M(0,x] = \infty$ (verificare)
- $N(0) = \infty$

naturale, attrattiva, inaccessibile

Nel caso invece in cui $S(0,x) = \infty$, cioè $1 - 2m/\sigma^2 < 0$:

- $\Sigma(0) = \infty$, come conseguenza del valore di $S(0,x)$;
- $M(0,x] < \infty$
- $N(0) = \infty$

INTRODUCIAMO OPERATORE:

$$L = \mu(x)\frac{d}{dx} + \frac{\sigma^2(x)}{2}\frac{d^2}{dx^2}$$

$$\begin{cases} L\,w(x) = -g(x) \\ w(a) = w(b) = 0 \end{cases}$$

$$w(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

G FUNZIONE DI GREEN

(*) $Ly = p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = -f(x)$

$y(x)$ VERIFICHI CONDIZIONI AL CONTORNO $y(a) = y(b) = 0$

$p(x) > 0 \quad [a,b]$

SE $Ly = 0$ NON AMMETTE SOLUZIONI (NON NULLE) CHE VERIFICHINO LE CONDIZIONI AL CONTORNO, L'EQUAZIONE (*) PUÒ ESSERE INVERTITA IN FORMA INTEGRALE:

$$y(x) = \int_a^b \underbrace{G(x,\xi)}_{\text{f2 DI GREEN}} f(\xi)\, d\xi$$

PROPRIETÀ DI $G(x,\xi)$:

(1) $\forall \xi \in [a,b] \quad y(x) = G(x,\xi)$ SIA SOLUZIONE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA

$Ly = 0 \quad x \in [a,\xi)$ e $x \in (\xi,b]$

(2) $\forall \xi \in (a,b) \quad y = G(x,\xi)$ VERIFICA LE CONDIZIONI AL CONTORNO

(3) LA DERIVATA DI G PRESENTA UNA DISCONTINUITÀ DI SALTO

$$\frac{\partial G(\xi^+,\xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi^-,\xi)}{\partial x} = \frac{1}{p(\xi)}$$

SIA $y_1(x)$ SOLUZ DI $Ly = 0$ E $y(a) = 0$

E $y_2(x)$ $Ly = 0$ E $y(b) = 0$

$y_1(x)$ e $y_2(x)$ RISULTANO LINEARMENTE INDIPENDENTI

WRONSKIANO

$$W(\xi) = W(y_1, y_2) = y_1(\xi) y_2'(\xi) - y_1'(\xi) y_2(\xi)$$

UTILIZZIAMO L'INDIPENDENZA TRA y_1 e y_2 PERCHÉ CHE $W(\xi) \neq 0 \ \forall \xi$

TESI:

$W(\xi) \neq 0$

DIM:

$$\frac{d}{d\xi} W(\xi) = y_2'' y_1 + y_1' y_2' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 \left\{ -\frac{q(x)}{p(x)} y_2' - \frac{r(x)}{p(x)} y_2 \right\} - y_2 \left\{ -\frac{q(x)}{p(x)} y_1' - \frac{r(x)}{p(x)} y_1 \right\} =$$

$$= -\frac{q(x)}{p(x)} \left[y_1 y_2' - y_2 y_1' \right] = -\frac{q(x)}{p(x)} W(x) \Rightarrow W(x) = W(x_0) e^{-\int \frac{p(u)}{q(u)} du}$$

↓

WRONSKIANO SE È NULLO IN UN PUNTO È NULLO OVUNQUE

- SE ESISTESSE ξ^* t.c. $W(\xi^*) = 0$ ALLORA

$$\left(\frac{y_1}{y_2} \right)' = \frac{W}{y_2} \Rightarrow \text{SE } W = 0 \Rightarrow y_1 = \partial y_2 + c$$

ASSURDO PERCHÉ y_1 e y_2 INDIP. ☒

- $$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{-y_1(x) y_2(\xi)}{p(\xi) W(\xi)} & a \leq x \leq \xi \leq b \\ \dfrac{-y_1(\xi) y_2(x)}{p(\xi) W(\xi)} & a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

$$w(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) \, d\xi = -y_1(x) \int_x^b \frac{y_2(\xi) f(\xi)}{p(\xi) W(\xi)} \, d\xi - y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(\xi) f(\xi)}{p(\xi) W(\xi)} \, d\xi$$

SE $x = a$ $w(a) = 0$ CONDIZIONE VERIFICATA

SE $x = b$ $w(b) = 0$ " "

(CALCOLI)

27/04 BS(2)

VOGLIO DIMOSTRARE CHE

$$Lw = -f(x)$$

$$w'(x) = -y_1'(x)\int_x^b \frac{y_2(\xi) f(\xi)}{p(\xi) W(\xi)}\,d\xi + \frac{y_1(x) y_2(x) f(x)}{W(x) p(x)} - y_2'(x)\int_a^x \frac{y_1(\xi) f(\xi)}{W(\xi) p(\xi)}\,d\xi$$

$$- \frac{y_2(x) y_1(x) f(x)}{W(x) p(x)}$$

$$w''(x) = -y_1''(x)\int_x^b \frac{y_1(\xi) f(\xi)}{p(\xi) W(\xi)}\,d\xi + y_1'(x)\frac{y_2(x) f(x)}{W(x) p(x)} - y_2''(x)\int_a^x \frac{y_1(\xi) f(\xi)}{W(\xi) p(\xi)}\,d\xi$$

$$- \frac{y_2'(x) y_1(x) f(x)}{W(x) p(x)} = -y_1''\int_x^b \frac{y_2(\xi) f(\xi)}{W(\xi) p(\xi)}\,d\xi - y_2''\int_a^x \frac{y_1(\xi) f(\xi)}{W(\xi) p(\xi)}\,d\xi +$$

$$- \frac{f(x)}{W(x) p(x)} \cdot [y_1 y_2' - y_2' y_1] \qquad (W'(x))$$

SOSTITUIAMO NELL' EQ.

$$p(x) w''(x) + q(x) w'(x) + r(x) w(x) = -f(x)$$

E VERIFICO CHE VALE.

SE CONSIDERIAMO 2 SOLUZ PARTICOLARI DELL' OMOG ASSOCIATA CHE VERIFICHINO CIASCUNA UNA CONDIZIONE AL BORDO
POSSIAMO COSTRUIRE LA GREEN $G(x,\xi)$ PER OTTENERE UNA SOLUZ $w(x)$ CHE VERIFICHI EQ. DIFFERENZIALE. (..?)

DIFFUSIONE =

$$\begin{cases} p(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x) \geq 0 \\ q(x) = \mu(x) \\ r(x) = 0 \end{cases} \qquad (a,b) \subset (e,\tilde{e})$$

FUNZIONE DI GREEN CON $y(a) = y(b) = 0$

$$G(\xi, x) = \begin{cases} \frac{-y_1(x) y_2(\xi)}{W(\xi) p(\xi)} & a \leq x \leq \xi \leq b \\ \frac{-y_2(x) y_1(\xi)}{W(\xi) p(\xi)} & a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

y_1 e y_2 sono soluzioni dell' omogenea associata.

$$\psi_1(x) = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)} \qquad \psi_2 = \frac{S(b) - S(x)}{S(b) - S(a)}$$

SOLUZIONI OMOG. ASSOCIATA

$S(x)$ = FZ DI SCALA

$$W(\xi) = \frac{S(\xi) - S(a)}{S(b) - S(a)} \left\{ - \frac{\Lambda(\xi)}{S(b) - S(a)} \right\} - \frac{S(b) - S(\xi)}{S(b) - S(a)} \left\{ \frac{\Lambda(\xi)}{S(b) - S(a)} \right\} =$$

ψ_2

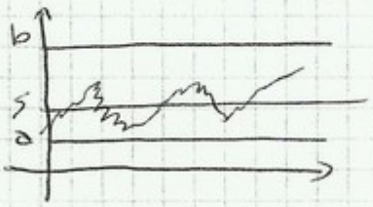
$$= \frac{\Lambda(\xi)}{S(b) - S(a)} \quad (?)$$

$$\Lambda(\xi) = \exp\left\{ - \int_{\cdot}^{\xi} \frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)} \right\}$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} 2\, \dfrac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)} \cdot \dfrac{S(b) - S(\xi)}{\sigma^2(\xi)\Lambda(\xi)} & x \le \xi \\ 2\, \dfrac{S(b) - S(x)}{S(b) - S(a)} \cdot \dfrac{S(\xi) - S(a)}{\sigma^2(\xi)\Lambda(\xi)} & x \ge \xi \end{cases}$$

FZ DI GREEN (OTTENUTA IN BASE A QUESTA FORMULAZIONE)

(B) =



SE VOGLIO STUDIARE QUANTO TEMPO IN MEDIA IL PROCESSO PASSA IN $(\xi, \xi + d\xi)$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in (\xi, \xi + d\xi) \\ 0 & \text{DIV} \end{cases} \qquad w(x) = \int_{\xi}^{\xi + d\xi} G(x, y)\, dy$$

SIGNIFICATO "INTUITIVO" INT. FZ GREEN NELL'INT $(\xi, \xi + d\xi)$

ESERCIZIO:

$$\{W(t)\}_{t \ge 0} \qquad I = [0, \infty)$$

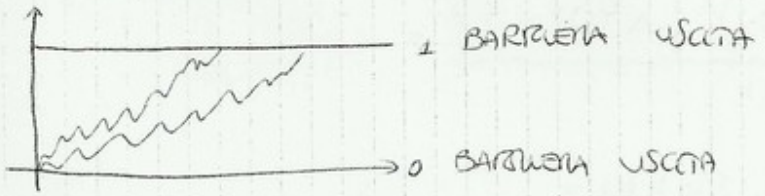
$X(t)$ MB CON DRIFT μ e COEFF DI DIFF $\sigma^2 = 1$

O BARRIERA RIFLETTENTE

$$V(x) = E[T_a \mid X(0) = x]$$

1) DETERMINARE $V(x)$ → $\mu = 0$
→ $\mu \neq 0$

KARLIN - TAYLOR 28/04 PS ①



-PROCESSO CONDIZIONATO -

CONSIDERO IL SOTTOINSIEME DI TRAIETTORIE CHE TERMINA LA PROPRIA ESISTENZA SULLA BARRIERA 1

$\{X(t)\}_{t>0}$ $p(t,x,y)$

$\{X^*(t)\}_{t\geq 0}$, $p^*(t,x,y)$

- → CONSIDERO SOLO REALIZZ CHE TERMINANO SULLA BARRIERA 1
- → È ANCH'ESSO UNA DIFFUSIONE
- ANDREMO A STUDIARE (DENSITÀ TRANSIZIONE, COEFF INFINITESIMALI BARRIERE) (RELAZ. CON PROCESSO DI PARTENZA)

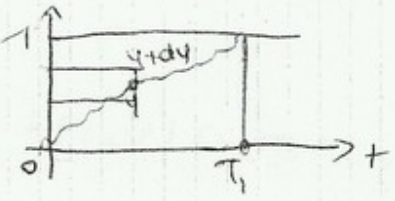
DENSITÀ TRANSIZIONE

ESPRIMIAMO: $P(X^*(t)\in(y,y+dy) \mid X^*(0)=x) =$

$= p^*(t,x,y)\,dy = P(X(t)\in(y,y+dy) \mid X(0)=x,\ T_1<T_0) =$

MARKOVIANITÀ → $X(t)=$

$= \dfrac{P(X(t)\in(y,y+dy),\ T_1<T_0 \mid X(0)=x)}{P(T_1<T_0 \mid X(0)=x)} = \dfrac{P(X(t)\in(y,y+dy) \mid X(0)=x)\,P(T_1<T_0 \mid X(t)=y)}{P(T_1<T_0 \mid X(0)=x)}$



$= p(t,x,y)\,\dfrac{S(y)-S(0)}{S(1)-S(0)}\cdot\dfrac{S(1)}{S(y)} = p(t,x,y)\,\dfrac{S(y)}{S(x)}$

- CALCOLIAMO MOMENTI INFINITESIMALI NUOVO PROCESSO $X^*(t)$

$\mu^*(\xi) = \lim_{h\downarrow 0} E\{X^*(h)-X^*(0) \mid X^*(0)=\xi\}$

$= \lim_{h\downarrow 0} \dfrac{1}{h}\int (y-\xi)\,p^*(h,\xi,y)\,dy$

$p^*(h,\xi,y) = p(h,\xi,y)\dfrac{S(y)}{S(\xi)}$ → SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR

$= \lim_{h\downarrow 0} \dfrac{1}{h}\int (y-\xi)\,p(h,\xi,y)\left\{1+\dfrac{S'(\xi)}{S(\xi)}(y-\xi)+\dfrac{S''(z)(y-\xi)^2}{2S(\xi)}\right\} =$ $z\in(\xi,y)$

$= \mu(\xi)+\dfrac{S'(\xi)}{S(\xi)}\sigma^2(\xi) = \mu^*(\xi)$

$$\sigma^{*2}(\xi) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{E\left\{ (x^*(h) - x^*(0))^2 \mid x^*(0) = \xi \right\}}{h} =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-\xi)^2 p^*(h, \xi, y)\, dy =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-\xi)^2 p(h, \xi, y) \frac{s(y)}{s(\xi)}\, dy = \text{TAYLOR} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int (y-\xi)^2 p(h, \xi, y) \left\{ 1 + (y-\xi) \frac{s(z)}{s(\xi)} \right\} dy = \underline{\underline{\sigma^2(\xi)}} = \underline{\underline{\sigma^{*2}(\xi)}}$$

$z \in (\xi, y)$

- STUDIAMO BARRIERE NUOVO PROCESSO

$$s^*(x) = \exp\left\{ -2 \int \frac{\mu^*(\eta)}{\sigma^{*2}(\eta)}\, d\eta \right\} = \exp\left\{ -2 \int \frac{\mu(\eta)}{\sigma^2(\eta)} + \frac{s(\eta)}{s(\eta)}\, d\eta \right\} =$$

$$= s(x) \exp\left\{ -2 \int \frac{s(\eta)}{s(\eta)}\, d\eta \right\} = s(x) \cdot \exp\{ -2 \ln s(x) \} = s(x) \cdot \frac{1}{[s(x)]^2}$$

$$s^*(x) = \frac{1}{s(x)}$$

$$m^*(x) = \frac{1}{\sigma^{*2}(x)\, s^*(x)} = m(x)\, [s(x)]^2$$

STUDIAMO BARRIERA IN 0 $\Rightarrow$ CI ASPETTIAMO CHE NON SIA PIÙ DI USCITA

$$S^*(0, \eta) = \int_0^\eta ds^*(y) = \int_0^\eta \frac{s(y)}{[s(y)]^2}\, dy = \frac{1}{s(0)} - \frac{1}{s(\eta)} = +\infty$$

$s(0) = 0$

$$N^*(0) = \int_0^b \int_\eta^b ds^*(\xi)\, d\mu^*(\eta) = \int_0^b \underbrace{\left[\frac{1}{s(\eta)} - \frac{1}{s(b)} \right]}_{\text{POSITIVO}} \cdot s^2(\eta)\, m(\eta)\, d\eta < \int_0^b s(\eta)\, m(\eta)\, d\eta =$$

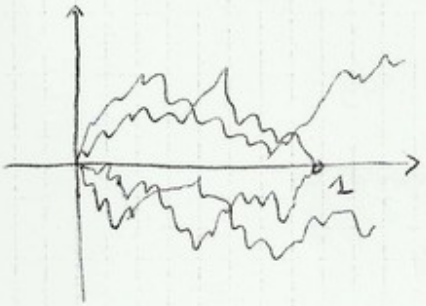
$$= \int_0^b \int_0^b ds(\xi)\, m(\eta)\, d\eta = \underline{E(0) < \infty}$$

↓ MI RICORDO UNA QUANTITÀ CHE CONOSCO

$\Rightarrow$ RISULTA CHE 0 È UNA BARRIERA DI ENTRATA NON + DI USCITA. (1 VERSO DI USCITA)

- CALCOLO FE (VERSO NUOVO PROCESSO x_t) -

PONTE BROWNIANO

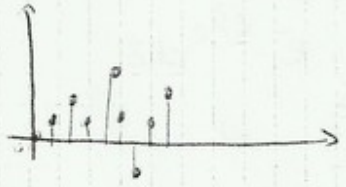


- DI TUTTE LE TRAIETTORIE DEL MB CONSIDERO SOLO LA SOTTOCLASSE DI TRAIETTORIE CHE PASSANO IN 0 AL TEMPO 1
- LA PROB CHE IL PROCESSO LIBERO VALGA 0 AL TEMPO 1 È 1 PROBABILITÀ NULLA!

↓

ALGORITMO DEL PROCESSO CONDIZIONATO VISTO PRIMA.

SE SIMULO UN MB A TEMPI A VALORI DISCRETI OTTENGO



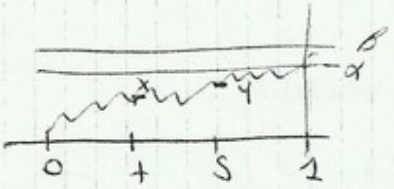
SE VOGLIO RAFFINARE IL PROCESSO POSSO STUDIARE I PONTI TRA UN VALORE E L'ALTRO INVECE DI RISIMULARE UNA NUOVA TRAIETTORIA

- AFFINCHÉ L'INSIEME CHE SODDISFA LE RICHIESTE DEL PROBLEMA NON ABBIA MISURA NULLA (COME OSSERVATO IN PRECEDENZA) ANDIAMO A STUDIARE

$t \in [0,1] \qquad \alpha < B(1) < \beta \qquad W^*(t)$

- $p^*(t,x;s,y)$

$$= P(W^*(s) = y \mid W^*(t) = x)$$



SIA

- $\pi(x,t) = P(B(1) \in (\alpha,\beta) \mid B(t) = x)$

$0 < t < s < 1$

- $p^*(x,t;s,y)\,dy = P(s-t,x,y)\,\frac{\pi(y,s)}{\pi(x,t)}\,dy$

← NORMALIZZAZIONE RISPETTO A TUTTE LE TRAIETTORIE CHE AL TEMPO t SONO IN x E POI FINISCONO NELLA FASCIA (α,β)

MOMENTI INFINITESIMALI

$$\mu^*(x,t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-x)\, p^*(t,x;t+h,y)\,dy =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-x)\, p(t,x;t+h,y)\, \frac{\pi(y,t+h)}{\pi(x,t)}\,dy = \text{TAYLOR} =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-x)\, p(t,x;t+h,y) \left\{ 1 + \left(\frac{\frac{\partial \pi(x,t)}{\partial x}}{\pi(x,t)} \right)(y-x) + o(h) \right\} dy$$

$$= \overset{0}{\overset{\|}{\mu}}(x) + \left(\frac{\frac{\partial \pi(x,t)}{\partial x}}{\pi(x,t)}\right) \cdot \overset{1}{\overset{\|}{\sigma^2}}(x) = \mu^*(x)$$

$\sigma^{*2}(x) = \sigma^2(x) = 1$ PER LO STESSO MOTIVO DI PRIMA RELATIV. AL PROCESSO CONDIZIONATO

RICORDO:
$\pi(x,t)$ PER IL MBS, CALCOLATE:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(y-x)^2}{(1-t)}\right\} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-x}{\sqrt{1-t}}}^{\frac{\beta-x}{\sqrt{1-t}}} e^{-z^2/2} dz$$

$\alpha = -\varepsilon$, $\beta = \varepsilon$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu^*(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{\partial \pi(x,t)}{\partial x}}{\pi(x,t)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{-\frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{(\varepsilon-x)^2}{2(1-t)}} + \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{(-\varepsilon-x)^2}{2(1-t)}}\right\}}{\int_{\frac{-\varepsilon}{\sqrt{1-t}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-t}}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz}$$

DE L'HOPITAL (PER 2 VOLTE)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{-x^2/1-t}}{2e^{-x^2/1-t}} \cdot \frac{2x}{1-t} = \boxed{\frac{x}{1-t}}$$

ABBIAMO OTTENUTO CHE $\mu^*(x,t) = \frac{\frac{\partial \pi(x,t)}{\partial x}}{\pi(x,t)} = \boxed{\frac{x}{1-t}}$ → NOTIAMO CHE NON È PIÙ TEMPO OMOGENEO

(COME VISTO CHE "FORZIAMO" IL PROCESSO A TERMINARE IN 1)

UN ALTRO MODO PER RICAVARE PURE BROWNIANO È:

$$\begin{cases} \mu^*(x,t) = \frac{x}{1-t} \\ \sigma^*(x,t) = 1 \end{cases}$$

PASSO OTTENERE UNA TRASFORMAZIONE CHE MI PORTI AL PROCESSO DI WIENER?

- APPLICANDO IL TEOREMA SCOPRIAMO CHE È POSSIBILE TROVARE 2 TRASFORMAZIONE.
- COSA SIGNIFICA UO'?? CONCETTUALMENTE: CONSIDERO TUTTE LE TRAIETTORIE "COMPIUTO" IL TEMPO $\infty \to 1$ E RISCALO L'ASSE DEI TEMPI IN MODO TALE DA OTTENERE WIENER.

RAGIONAMENTO MOLTO DIVERSO DA QUELLO DEL CONDIZIONAMENTO.

TRASFORMAZIONE CHE SPOSTA PONTE → WIENER
RISCALDAMENTO SPAZIO - TEMPO : MANTENGO TUTTE LE TRAIETTORIE

$$s' = \sqrt{k_1} \cdot \frac{x}{t-1}$$

$$t' = \frac{k_3}{1-t_p} + k_2$$

TRASFORMAZIONE PIÙ UTILIZZATA : $\underline{X(t) = (1-t)\, B\left(\frac{t}{1-t}\right)} \quad t \in [0,1]$

→ CALCOLO MOMENTI INFINITESIMALI (PER VERIFICARE CHE SIA MB)

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E\left[X(t+h) - X(t) \mid X(t) = x\right] =$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E\left[(1-(t+h))\, B\left(\frac{t+h}{1-(t+h)}\right) - x \;\middle|\; B\left(\frac{t}{1-t}\right) = \frac{x}{1-t}\right] =$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(1-t-h)\, E\left[\underbrace{\left[\frac{\overrightarrow{B(t+h)}}{1-t-h} \;\middle|\; B\left(\frac{t}{1-t}\right) = \frac{x}{1-t}\right]}_{\frac{x}{1-t} = \text{VALORE MB ALL'ISTANTE INIZIALE}}\right] - \frac{x}{h}$$

(PROC. INCREMENTATO)

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{(1-t)x}{h(1-t)} - \frac{x}{1-t} - \frac{x}{h} = -\frac{x}{1-t}$$

- RISCALANDO TEMPO E SPAZIO OTTENGO UN PROCESSO CHE HA STESSA DISTRIB. FINITO DIMENSIONALE DEL MOTO BROWNIANO.

- MENTRE NORMALIZZANDO ABBIAMO OTTENUTO UNA DELLE TRAIETTORIE IN QUEL CASO LE STIAMO UTILIZZANDO TUTTE.

- (3) MODO PER INTRODURRE PONTE BROWNIANO

CONSIDERO PROCESSO : $\tilde{B}(t) = B(t) - t\,B(1)$ $\quad t \in [0,1]$

USO TUTTE LE TRAIETTORIE MA SOLO QUELLE CHE VIVONO SULL'INT $[0,1]$

$\tilde{B}(t)$ È ANCORA MARKOVIANO
↳ TRAMITE LE PROPRIETÀ DEL MB È DIMOSTRABILE

- È ANCORA GAUSSIANO (TRASF LINEARE MB)
- $E[\tilde{B}(t)] = 0$
- $E[\tilde{B}(t_1)\tilde{B}(t_2)]$

(BASTEREI DIM CHE È UN PONTE B. CALCOLANDO MOMENTI INFINITESIMALI)

↓

SE LA FZ DI COVARIANZA COINCIDE CON LA COVARIANZA DEL PONTE BROWNIANO VUOL DIRE CHE SI TRATTA DI UN PONTE BROWNIANO.

CALCOLO COVARIANZA PONTE BROWNIANO

$$E[X(t_1)X(t_2)] = (1-t_1)(1-t_2)\, E\left[B\left(\frac{t_1}{1-t_1}\right) B\left(\frac{t_2}{1-t_2}\right)\right] =$$

$$= (1-t_1)(1-t_2)\min\left(\frac{t_1}{1-t_1}, \frac{t_2}{1-t_2}\right) =$$

$$= \begin{cases} t_1(1-t_2) & t_1 < t_2 \\ t_2(1-t_1) & t_1 > t_2 \end{cases}$$

ORA CALCOLIAMO

$$E[\tilde{B}(t_1)\tilde{B}(t_2)] = E[(B(t_1) - t_1 B(1))(B(t_2) - t_2 B(1))] =$$

$$= E[B(t_1)B(t_2)] - t_1 E[B(t_2)B(1)] - t_2 [B(t_1)B(1)] + t_1 t_2 E[B^2]$$

$$= \min(t_1, t_2) - t_1 t_2 - \cancel{t_2 t_1} + \cancel{t_1 t_2}$$

$$\begin{cases} t_1(1-t_2) & t_1 < t_2 \\ t_2(1-t_1) & t_1 > t_2 \end{cases}$$

→ È UGUALE ALLA COVARIANZA DEL PONTE BROWNIANO

$\tilde{B}(t)$ → STESSA MEDIA e STESSA COVARIANZA DEL PONTE BROWNIANO = PONTE BROWNIANO.

ESERCIZI

- MOTO BROWNIANO GODE DI PROPRIETÀ DI MARTINGALA RISPETTO ALLA SUA FILTRAZIONE NATURALE $\mathcal{F}_t$ $\{B(t), t \geq 0\}$

1) $E[B(t) | \mathcal{F}_s] \qquad s < t$

2) $E\{E[e^{i\lambda B(t)}] | \mathcal{F}_s\}$ è MARTINGALA (SI PUÒ DIM CHE LA PARTE REALE È MARTINGALA E ANCHE LA PARTE IMMAGINARIA)

1) $E[(B(t) - B(s)) + B(s) | \mathcal{F}_s] = E[(B(t) - B(s)) | \mathcal{F}_s] + E[B(s) | \mathcal{F}_s] =$

$= E[B(t) - B(s)] + B(s) = B(s)$

$B(t) - B(s)$: INCREMENTO INDIPENDENTE DALLA PASSATA

$B(s) = E[B(s) | \mathcal{F}_s]$

2) $E\{E[e^{i\lambda(B(t)-B(s)+B(s))} | \mathcal{F}_s]\} = E\{E[e^{i\lambda(B(t)-B(s))} | \mathcal{F}_s] E[e^{i\lambda B(s)} | \mathcal{F}_s]\}$

PREVEDO COSÌ

$E\{E[e^{i\lambda(B(t)-B(s))}] \varphi(\lambda s)\} = \varphi(\lambda s)$

$=$

CONSIDERIAMO UN SISTEMA DETERMINISTICO E CONSIDERIAMO UNA COPPIA DI TEMPI (s,t) $t_0 \le s \le t \le T$

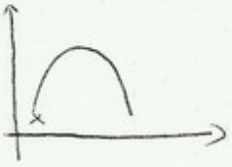
$G_{s,t}$ APPLICAZIONE MISURABILE

$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \quad / \forall x \in \mathbb{R}^d$

$G_{t,t} = x$

$G_{u,t}(G_{s,u}(x)) = G_{s,t}(x) \qquad s \le u \le t$

↳ SEGUO IL MOTO PARTICELLA - RILEGGO SISTEMA DINAMICO TRAMITE LEGGE DI TRASFORMAZ



$G_{s,t}(x) = x + v(t-s)$ ESEMPIO CON v = VELOCITÀ

$G_{s,t}(x) = x_t(s, x)$

$\dot{x}_t = f(x_t, t)$ EQ DIFF SIST. DINAMICO (UNICA SOLUZ.)

RILEGGO IN TERMINI PROBABILISTICI RISP

$$P(s, x, t, B) = \delta_{G_{s,t}(x)}(B) = \begin{cases} 1 & G_{s,t}(x) \in B \\ 0 & G_{s,t}(x) \notin B \end{cases}$$

PER QUESTI OGGETTI VALE L'EQ DI CHAPMAN - KOLMOGOROV

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta_{G_{u,t}(y)}(B)\, \delta_{s,u}(dy) = \delta_{G_{s,t}}(B) = \delta_{G_{u,t}[G_{s,u}(x)]}(B)$$

→ LAVORIAMO SU UN PROCESSO DI MARKOV $X(t)$ SU $t \in [t_0, T]$

DEFINIAMO T_t OPERATORE (PER CASO OMOGENEO)

DEFINITO SUI BORELIANI $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

SPAZIO FZ MISURABILI - LIMITATE SU $\mathbb{R}^d$ DI NORMA $\|g\| = \sup \|g(x)\|$

DEF PER $t \in (0, T]$ def $T_t g = E_x g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) P(t, x, dy)$

L'OPERATORE T_t → DICE LA MEDIA DOVE SARÀ LE REALIZZAZIONI DEL PROCESSO

SE COME FZ g CONSIDERO $I_B(x) = \quad T_t I_B(x) = P(t, x, B)$

POSSO RICAVARE DENSITÀ TRANSIZIONE TRAMITE TRASFORMAZIONE T_t.

($T_t = M_t$ SU KARLIN)

OPERATORI T_t TRASFORMANO LO SPAZIO B IN SE STESSO

↓

TEOREMA GLI OPERATORI T_t $t \in [0, T-t_0]$

- TRASFORMANO LO SPAZIO $(\mathbb{R}^d)$ IN SE STESSO
- SONO LINEARI
- POSITIVI
- CONTINUI

(NB IN GENERALE SI DICE PROC. FELLER PROCESSO A MEDIA f_2 CONTINUA)

HANNO NORMA $\|T\| = 1$

T_0 È L'OPERATORE IDENTITÀ

- $T_{s+t} = T_s T_t$

DIMOSTRIAMO SOLO QUEST'ULTIMA.

$$T_{s+t} g(x) = E[g(X(t+s)) \,|\, X(0)=x] = E\left[E[g(X(t+s)) \,|\, X(t)] \,|\, X(0)=x\right] =$$

↓ SE ESPLICITIAMO LA FORMULA OTTENIAMO $T_s T_t g(x)$

↳ ESISTE INTEGRALE

SE $T = \infty$ ALLORA

SE T_T = SEMIGRUPPO (DEF ?)

DINAMICA PROC. MARKOV → DESCRIVIBILE TRAMITE (1)

DEF A OPERATORE O GENERATORE INFINITESIMALE DI UN PROC. MARKOV X_t $t \in [t_0, T]$ VALE

$$A g(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t g(x) - g(x)}{t}$$

↳ UNIFORME RISP. x

TASSO MEDIO INFINITESIMALE CAMBIAMENTO DI UNA FZ f DEL PROCESSO X_t DATO CHE $X(s) = x$

DOMINIO DI DEF. OPERATORE

$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

ESEMPIO MOTO UNIFORME CON UNA VELOCITÀ $V \in \mathbb{R}^d$

$T_t g(x) = g(x + vt)$ → FA LIMITATE E CONTINUE

$$A g(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(x+vt) - g(x)}{t} = \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial g}{\partial x_i}$$ → CON DERIVATE PRIME LIMITATE E CONTINUE.

DEF SE $B_1, B_2, \dots B_d$ SONO MOTI BROWNIANI UNIDIMENSIONALI INDIPENDENTI, ORIGINATI IN $x_1 - x_d$ ALLORA IL PROCESSO

$\{B(t), t \geq 0$ DEF DA $\vec{B}(t) = (B_1(t), B_1(t) - B_d(t))$

ORIGINATO IN $(x_1 - x_d)$ È UN MB d-DIMENSIONALE

($2d$ = PLANARE)

(04.05.2011)

CORREZIONE ESERCIZI

(1) Se X_i è la taglia della famiglia generata dall'i-esimo individuo, abbiamo che:

caso 1: $Z_{n+1} = Z_n + \sum_{i=1}^{Z_n} X_i$

caso 2: $Z_{n+1} = Z_n + X_n Z_n$

Calcoliamo i momenti:

media

caso 1: $E\left(\sum_{i=1}^{Z_n} X_i \mid Z_n = x\right) = E\left(\sum_{i=1}^{x} X_i \mid Z_n = x\right) = E\left(\sum_{i=1}^{x} X_i\right)$

$= x \cdot E(X_i) = (\mu - 1)\, x$

tenuta conto dell'attesa di X_1, infatti $Z_1 = Z_0 + \sum_{i=1}^{Z_0} X_i = 1 + X_1$.

caso 2: $E(X_n \cdot Z_n \mid Z_n = x) = E(x \cdot X_n) = x \cdot E(X_n) = x(\mu - 1)$

varianza

caso 1: $Var\left(\sum_{i=1}^{Z_n} X_i \mid Z_n = x\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{x} X_i\right) = x \cdot Var(X_1) = \sigma^2 x$

caso 2: $Var(x \cdot X_n) = x^2 \cdot Var(X_n) = x^2 \cdot \sigma^2$

(2) Si poteva fare qualcosa di più:

$\Delta Z = Z_{t+\Delta t} - Z_t = Z'_t \Delta t + o(\Delta t^2)$

$E(\Delta Z \mid Z_t = x) = E(Z'_t \Delta t \mid Z_t = x) = E((Z_{t+1} - Z_t)\, \Delta t \mid Z_t = x)$

$= \Delta t\, (\mu - 1)\, x$

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t \cdot (\mu - 1) \cdot x}{\Delta t} = (\mu - 1)\, x$ ✓

Il problema si verifica con la varianza. Infatti risulta:

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t^2 \cdot \sigma^2 \cdot x^\alpha}{\Delta t} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2)$

Per risolvere questa questione, scriviamo innanzitutto il processo discreto come $Z_{n\tau}$, poi:

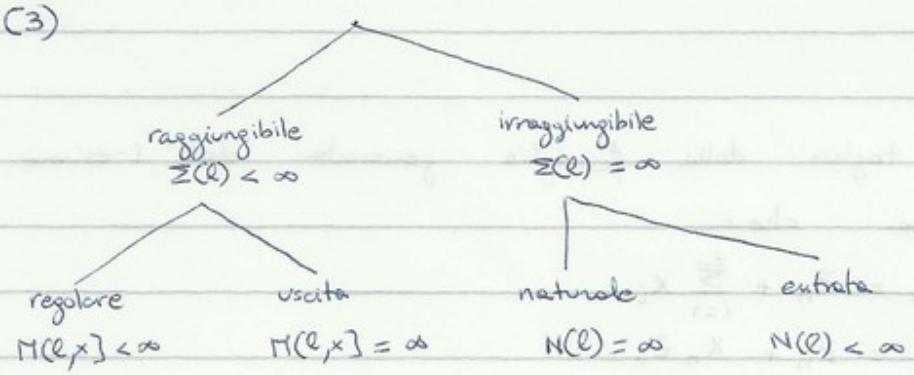
$\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{E(Z_{(n+1)\tau} - Z_{n\tau} \mid Z_{n\tau} = x)}{\tau} = (\mu - 1)\, x$

$\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{Var(Z_{(n+1)\tau} - Z_{n\tau} \mid Z_{n\tau} = x)}{\tau} = \sigma^2 x$

A questo punto devo imporre una dipendenza da τ:

$E(X_{n\tau}) = (\mu - 1)\, \tau \qquad Var(X_{n\tau}) = \sigma^2 \tau$

(3)



$$\Sigma(0) = \int_{\ell}^{x} \left(\int_{\ell}^{\xi} s(y)\, dy \right) m(\xi)\, d\xi$$ (formulazione alternativa)

(10.05.2011)

$$M_t = \exp\{i(v, B_t) + \frac{t}{2}\|v\|^2\}$$

$$\begin{aligned} E_x[M_t \mid \mathcal{F}_s] &= E_x[M_s \exp\{i(v, B_t - B_s) + \tfrac{t-s}{2}\|v\|^2 \mid \mathcal{F}_s\}] \\ &= M_s \; E_x[\exp\{i(v, B_t - B_s) + \tfrac{t-s}{2}\|v\|^2] \\ &= M_s \cdot e^{\frac{t-s}{2}\|v\|^2} \cdot E_x[\exp(i(v, B_t - B_s))] \\ &= M_s \end{aligned}$$

- Considerando l'operatore $T_t g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \cdot P(t, x, dy)$, abbiamo che $T_{s+t} = T_s \cdot T_t$. Per questo T_t viene chiamato operatore di semigruppo
- A fianco di questo, possiamo anche definire un operatore infinitesimale $A = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t g(x) - g(x)}{t}$
- Proviamo ad applicare l'operatore di semigruppo ad un processo di Wiener:

$$\begin{aligned} T_t g(x) &= \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \cdot \exp\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(x + \sqrt{t} z) \, e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad \frac{x-y}{\sqrt{t}} = z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ag &= \left[\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \cdot \lim_{t \downarrow 0} \left[\frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} g(x + \sqrt{t} z) \, e^{-\frac{z^2}{2}} dz - (2\pi)^{d/2} \cdot g(x)\right]\right. \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \cdot \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot [g(x + z\sqrt{t}) - g(x)] \, dz \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \int \{\sqrt{t} \sum_{i=1}^{d} z_i g_{x_i}(x) + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} z_i z_j g_{x_i x_j}(x) \\ &\qquad + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} z_i z_j [g_{x_i x_j}(\xi) - g_{x_i x_j}(x)]\} \frac{e^{-z^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{1}^{d} \int \frac{e^{-z^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \cdot dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

- L'operatore di semigruppo può anche essere definito in maniera dinamica, ponendo $T_{s,t} g(x) = \int g(y) \, P(s, x, t, dy)$. In tal caso l'equazione di Kolmogorov diventa $T_{s,t} = T_{s,u} \cdot T_{u,t}$, e il relativo operatore infinitesimale può essere definito come:

$$A_s g(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_{s,s+h} g(x) - g(x)}{h}$$

Def. Il generatore infinitesimale A si dice locale se il valore Ag dipende solo dal comportamento di $g(x)$ in un intorno di x.

Def. Una d.d.p. di transizione gode della proprietà di Feller se $\forall h>0$, g funzione continua e limitata su E, la funzione $\varphi(t,z) = \int g(y)\, p(t,z,t+h,dy)$ è continua.

Teor. Se X è continua a destra, e gode della proprietà di Feller, allora gode della proprietà di Markov forte.

Prop. Se vale Dynkin, A_t è locale.

Teor. $\forall R>0$, $t\geq 0$, esistono:

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\, p(t,x,t+h, B_R^c(x)) = 0$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_{B_R(x)} (y_i - x_i)\, p(t,x,t+h,dy) = b_i(x,t)$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_{B_R(x)} (y_i - x_i)(y_j - x_j)\, p(t,x,t+h,dy) = a_{ij}(x,t)$$

Allora la matrice $a(x,t)$ è semidefinita positiva $\forall x, t \geq 0$ e posto $L_t = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, si ha $Ag(x) = L_t g(x)$ $\forall g \in C^2(\mathbb{R}^n)$

Def. Assegnato L_t, operatore differenziale su $\mathbb{R}^d$, con $a(x,t)$ matrice semidefinita positiva, un processo $X(t)$ d-dimensionale si dice diffusione se:

- è fortemente markoviano
- le traiettorie sono continue su $[0, \xi(\omega)]$ e il limite $\lim_{t\to\xi(\omega)} X(t)$ esiste
- $\forall g \in C^2$, se $T_{s,t}$ è il semigruppo associato, allora $T_{s,t}\, g = g(x) + \int T_{s,u} L_u g(x)\, du$

- Ci si chiede ora se possa essere possibile, ~~data una~~ data L_t, ricavare una diffusione; il contrario l'abbiamo già fatto. Consideriamo il caso omogeneo, e supponiamo che T_t e L_u commutino.

$$T_t g(x) = g(x) + \int_0^t L T_h g(x)\, du$$

$$u(x,t) = T_t g(x)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} Lg = \frac{\partial g}{\partial t} \\ g(x,0) = \delta(x-y) \end{cases} \qquad p(t,x,dy) = g(t,x,dy)$$

[Karlin - Taylor, pag. 287]

Def. L'operatore R_λ, $\lambda > 0$, definito come:

$$(R_\lambda g)(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (T_t g)(x)\, dt$$

con $T_t g$ funzione limitata e continua almeno a tratti, si dice operatore risolvente.

Oss. $$(R_\lambda g)(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot \int_e^r g(\eta)\, p(t, x, d\eta)\, dt = \int_e^r d\eta\, g(\eta) \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, \eta)\, dt$$
$$= \int_e^r d\eta\, g(\eta) \cdot \int_0^\infty [illegible]\, G_\lambda(x, \eta)$$

Prop. $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$

Per Wiener: $G_\lambda(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}|x-\eta|}$, da cui si può sostituire e trovare un'altra forma per $(R_\lambda g)(x)$.

Es. Sia X_t un processo di diffusione in $I(0, \infty)$, con $\mu(x) = 0$, $\sigma^2(x) = 2x$, 0 barriera di uscita.

Verificare che $\varphi(\lambda, x, t) = E[e^{-\lambda X(t)} \mid X(0) = x] = \int e^{-\lambda x} p(x_0, t, x)\, dx$
$= e^{\frac{-\lambda x}{1+\lambda t}}$

Si ricordi che $\frac{\partial p}{\partial t_0} = x_0 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x_0^2}$, e $\lim_{t \to t_0} p(x_0, t_0, x, t) = \delta(x - x_0)$

Sol. Moltiplichiamo l'equazione differenziale per $e^{-\lambda t}$ e integriamo:

$$e^{-\lambda t} \cdot \frac{\partial p}{\partial t_0} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x_0^2}$$
$$\int e^{-\lambda t} \cdot \frac{\partial p}{\partial t_0} = \int e^{-\lambda t} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x_0^2}$$

svolgendo poi qualcosa di analogo per la condizione iniziale,

$$\lim_{t \to t_0} \int_0^\infty e^{-\lambda x} p(x_0, t_0, x, t)\, dx = e^{-\lambda x_0}$$

Questa è una traccia di risoluzione.

Es. $U(t) = B^2(t) - t$. Verificare che si tratta di una martingala rispetto a $\mathcal{F}_t$.

Sol. $$E[B^2(t) - t \mid \mathcal{F}_s] = E[(B(t) - B(s) + B(s))^2 \mid \mathcal{F}(s)] - t$$
$$= E[(B(t) - B(s))^2] + B^2(s) + 2E[(B(t) - B(s))\, B(s) \mid \mathcal{F}_s] - t$$
$$= t - s + B^2(s) - t = B^2(s) - s$$

(11.05.2011)

Consideriamo un processo di diffusione su (ℓ, r) con barriere di uscita o riflettenti:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{s(x)} \cdot \frac{d}{dx}\right) u = Lu \qquad \text{[eq. backward]}$$

$u(0,x) = g(x)$

$u(t,\ell) = 0$ se ℓ uscita

$u'(t,\ell) = 0$ se ℓ riflettente

$u(t,x) = c(t) \cdot \varphi(x)$

$$\frac{c'(t)}{c(t)} = \frac{L\varphi}{\varphi(x)} = \lambda \qquad c'(t) = \lambda \cdot c(t) \qquad L\varphi = \lambda\varphi$$

$\{\lambda_n\}$ autovalori, $\{\varphi_n\}$ autofunzioni

$L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \qquad c(t) = c_n \cdot e^{-\lambda_n t}$

$$u(t,x) = \sum_0^\infty c_n \cdot e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x)$$

Esercizio: Ornstein - Uhlenbeck

In questo caso l'equazione backward diventa:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$L\varphi = \lambda\varphi \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x \cdot \frac{\partial}{\partial x}$

È visibile un legame con i polinomi ortogonali di Hermite, definibili come $H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

$\lambda_n = n$

$$p(t,x,y) = e^{-y^2} \cdot \sum_0^\infty e^{-nt} H_n(x) H_n(y) \pi_n \quad , \quad \text{con } \frac{1}{\pi_n} = \sqrt{\pi} \cdot 2^n \cdot n!$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x - y \cdot e^{-t})}{2(1-e^{-2t})}\right\}$$

Consideriamo il processo di diffusione dato dalla distanza di un Ornstein - Uhlenbeck con $\delta = \sigma^2 = 1$ dall'origine.

Esso possiede drift e varianza infinitesimale:

$$\mu(x) = \left(\frac{N-1}{2x} - x\right) \qquad \sigma^2(x) = 1 \qquad I = (0, \infty)$$

∞ barriera naturale 0 barriera di entrata $(N > 1)$

$$\lim x^{N-1} \frac{du}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\varphi + \left(\frac{N-1}{2x} - x\right)\frac{d}{dx}\varphi = -\lambda\varphi$$

C'è un legame con l'equazione dei polinomi di Laguerre L_n^α:

$$\int_0^\infty [L_n^\alpha(x)]^2 \cdot \frac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}\,dx = \binom{n+\alpha}{n}$$

$$x \cdot L_n^{\alpha''}(x) + (\alpha+1-x) \cdot L_n^{\alpha'}(x) + n \cdot L_n^\alpha(x) = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \lambda_n = 2n$$

Torniamo all'ultimo esercizio svolto ieri. Abbiamo verificato che si tratta di una martingala rispetto a $\mathcal{F}_t$.
Anche $V(t) = \exp\{\lambda B(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}$ è $\mathcal{F}_t$-martingala, inoltre vediamo $T_{ab} = \min\{t : B(t) = a \text{ oppure } B(t) = b\}$, e consideriamo $E[U(T_{ab}) \wedge n]$. Esso è pari a $E[U(0)]$, che vale naturalmente 0.
Per l'optional stopping varranno:

$$E[T_{ab} \wedge n] = E[B^2(T_{ab} \wedge n)] \le (|a|+b)^2 < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} E[T_{ab} \wedge n] < \infty \qquad E[T_{ab}] < \infty$$

$$0 = E[B(T_{ab})] = a \cdot \underbrace{P(B(T_{ab}) = a)}_{1-U} + b \cdot \underbrace{P(B(T_{ab}) = b)}_{U}$$

$$E[T_{ab}] = E[B^2(T_{ab})] = a^2(1-U) + b^2 U$$

Proprietà varie:

- Le traiettorie del moto browniano, pur essendo ovunque continue, sono quasi certamente ovunque non differenziabili

Dim. (Orsingher) Fissiamo t arbitrario. Consideriamo l'evento

$$A = \{\omega \in \Omega : \lim \frac{W(t+h) - W(t)}{h} \text{ esiste finito}\}$$

Andiamo a considerare l'insieme degli $\omega \in \Omega$ tali per cui $\frac{1}{n}|W(t+\frac{1}{n}) - W(t)| < r$, e chiamiamolo $C_{n,r}$.
Si ha che $A \subset \bigcup_{r\ge1} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n>m} C_{n,r}$. Abbiamo ora:

$$P\left(\frac{W(t+\frac{1}{n}) - W(t)}{1/n} < r\right) = \int_{-r/\sqrt{n}}^{r/\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

$$P(A) \le \sum_r \sum_m P\left(\frac{W(t+\frac{1}{n}) - W(t)}{1/n} < r\right)$$

$$= \sum_r \sum_m \int_{-r/\sqrt{n}}^{r/\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{dunque } P(A) = 0.$$

- Incremento in media quadratica:

$$\int_0^t dW^2(\tau) = t = \int_0^t d\tau$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \underbrace{\left[W\left(\frac{kt}{2^n}\right) - W\left(\frac{(k-1)t}{2^n}\right)\right]^2}_{\Delta_{k,n}} = t$$

Th. $\lim_{n\to\infty} E\left[\sum \left(\Delta_{k,n}^2 - \frac{t}{2^n}\right)\right] = 0$

Abbiamo che:

- le $\Delta_{k,n}^2$ sono indipendenti
- $E\left[\Delta_{k,n}^2\right] = \frac{t}{2^n}$
- $E\left[\sum_{k=1}^{2^n} \left[\Delta_{k,n}^2 - \frac{t}{2^n}\right]^2\right] = \sum_{k=1}^{2^n} E\left[\left(\Delta_{k,n}^2 - \frac{t}{2^n}\right)^2\right]$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} E\left[\Delta_{k,n}^4 + \frac{t^2}{2^{2n}} - \frac{t}{2^{n+1}}\ \Delta_{k,n}^2\right]$$

$$= 2t^2 \cdot \sum_{k=1}^{2^n} 2^{-2n} = 2t^2 \cdot 2^{-2n} \cdot 2^n = 2t^2 \cdot 2^{-n} \longrightarrow 0$$

- Le traiettorie sono a variazione illimitata, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} |\Delta_{k,n}| = \infty$$

Dim.

$$\sum |\Delta_{kn}| \geq \sum |\Delta_{kn}| \cdot \frac{\Delta_{kn}}{(\max \Delta_{kn})} = \sum \frac{\Delta_{kn}^2}{\max(\Delta_{kn})} \longrightarrow \infty$$

($\Delta_{kn}^2 \to \infty$, $\max(\Delta_{kn}) \to 0$)

- Il moto browniano è invariante per cambiamenti di scala, cioè, per ogni scelta di a, il processo $X(t) = a^{-1} \cdot B(a^2 t)$ è un moto browniano standard.

Infatti, verifichiamo che si mantiene la normalità degli incrementi (le altre verifiche sono banali); abbiamo che:

$$X(t) - X(s) = \frac{1}{a}\left[B(a^2 t) - B(a^2 s)\right]$$

$$E\left[X(t) - X(s)\right] = 0$$

$$\mathrm{Var}\left[\frac{1}{a}\left(B(a^2 t) - B(a^2 s)\right)\right] = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{Var}\left[B(a^2 t) - B(a^2 s)\right] = t - s$$

Si possono ora fare delle considerazioni sui tempi:

$$T_{ab} = \inf\{t : B(T_{ab}) = a \text{ oppure } B(T_{ab}) = b\}$$

$$t' = a^2 t$$

$$E\left[T_{ab}\right] = E\left[\inf\{t \geq 0,\ X(t) = 1 \text{ oppure } X(t) = \tfrac{b}{a}\}\right]$$

$$= a^2 \cdot E\, T_{\frac{a}{a},1}$$

$$E\left[T_{-b,b}\right] = b^2 \cdot E\, T_{1,1}$$

[Karatsas - Shreve, pag. 47]

(12.05.2011)

Dimostriamo ora che il moto browniano esiste, ovvero che può essere definito effettivamente un processo come descritto secondo Wiener che sia coerente con la teoria dei processi stocastici

Def. Prende il nome di sistema di Dynkin $\mathcal{D}$ un insieme di sottoinsiemi di Ω tale per cui valga:

- $\Omega \in \mathcal{D}$
- $A, B \in \mathcal{D} \qquad B \subseteq A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$
- $\{A_n\} \in \mathcal{D} \qquad A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{D}$

Teor. Sia $\mathcal{C}$ collezione di sottoinsiemi di Ω, chiusa per $\cap$ a coppie. Se $\mathcal{D}$ è un sistema di Dynkin che contiene $\mathcal{C}$, allora $\mathcal{D}$ contiene la σ-algebra $\sigma(\mathcal{C})$.

Questo risultato ci può essere utile per il seguente esercizio:

Es. Si consideri un processo stocastico $X = \{X_t, t \geq 0\}$ per cui $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ siano v.a. indipendenti $\forall n \geq 1 \quad 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Mostrare che per ogni $s \in [0, \infty)$ gli incrementi $X_t - X_s$ sono indipendenti da $\mathcal{F}_s$.

La risoluzione si trova a pagina 117 del Karatsas - Shreve e può essere sintetizzata nel seguente modo.

Sol. Consideriamo un $s < t$ e denotiamolo come s_n. Poniamo una successione finita di tempi $0 < s_0 < s_1 < \dots < s_n = s$, e consideriamo $\sigma(X_0, X_{s_1} - X_0, \dots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$, indipendente da $X_t - X_s$. Essa è uguale a $\sigma(X_0, X_{s_1}, \dots, X_{s_n})$. Prendiamo in esame ora $\bigcup_{n \geq 1} \sigma(X_0, X_1, \dots, X_{s_n}) = \mathcal{C}$. Ancora si tratta di un insieme indipendente da $X_t - X_s$.

Ora, l'insieme $\mathcal{D}$ di tutti gli insiemi in $\mathcal{F}_s^X$ indipendenti da $X_t - X_s$ è un sistema di Dynkin, contenuto in $\mathcal{C}$. Per il teorema precedente $\mathcal{F}_s^X = \sigma(\mathcal{C})$. Ma allora $\mathcal{F}_s^X \equiv \mathcal{D}$.

Rivediamo ora la definizione di insieme cilindrico:

Def. $C = \{\omega \in R^{[0,\infty)}, (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in A\}$ $\quad A \in \mathcal{B}(R^n)$

Definiamo anche $\mathcal{C}$ come l'insieme di tutti gli insiemi cilindrici, e T come l'insieme delle successioni finite $\underset{\sim}{t} = (t_1, \dots, t_n)$ $n \geq 1$, con t_i non negativi e distinti. Sia anche $Q_{\underset{\sim}{t}}$ misura di probabilità per n fissato, su $(R^n, \mathcal{B}(R^n))$

Def. $\{Q_{\underset{\sim}{t}}\}_n$ si dice collezione di famiglie di distribuzione finito dimensionale.

Def. $\{Q_{\underset{\sim}{t}}\}$ è consistente se:

- $\underset{\sim}{s} = \{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}\}$ permutazione di $\underset{\sim}{t}$, $\forall A_i \in \mathcal{B}(R)$, allora:
  $Q_{\underset{\sim}{t}}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = Q_{\underset{\sim}{s}}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)$
- $\underset{\sim}{t} = (t_1, \dots, t_n)$ $\quad \underset{\sim}{s} = (t_1, \dots, t_{n-1})$
  $A \in \mathcal{B}(R^{n-1})$ $\quad Q_{\underset{\sim}{t}}(A \times R) = Q_{\underset{\sim}{s}}(A)$

Si ricordi che $Q_{\underset{\sim}{t}}(A) = P(\omega : (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in A)$

Teor. (Daniell 1918, Kolmogorov 1933)

Sia $\{Q_{\underset{\sim}{t}}\}$ una famiglia di distribuzioni finito dimensionali consistente. Allora esiste una misura di probabilità P su $(R^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(R^{[0,\infty)}))$ tale che vale:

$Q_{\underset{\sim}{t}}(A) = P(\omega \in R^{[0,\infty)}, (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in A)$ $\quad A \in \mathcal{B}(R^m)$

Varrà:

$$F_{s_1, s_2, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(s_1, 0, y_1)\, p(s_2 - s_1, y_1, y_2) \cdots p(s_n - s_{n-1}, y_{n-1}, y_n)\, dy$$

per $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ e volendo:

$$p(s, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2s}}$$

Cor. Esiste una misura di probabilità P su $R^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(R^{[0,\infty)})$ sotto cui il processo ha incremento stazionario indipendente e $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

In tutto questo discorso abbiamo finora trelasciato la questione della continuità. Si noti che $C^{[0,\infty)} \notin \mathcal{B}(R^{[0,\infty)})$, per cui una funzione non continua non può essere univocamente determinata dai suoi valori in una quantità numerabile di punti. Vediamo dunque come approcciare

Teor. (Kolmogorov - Centov 1956)

Sia $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ un processo stocastico definito su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ che verifichi, per opportuni $\alpha, \beta, C > 0$, e $0 < s < t < T$:

$$E|X_t - X_s|^\alpha \leq C \cdot |t-s|^{1+\beta}$$

Allora esiste una modificazione continua $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t, t \in [0,T]\}$ di X che è localmente Hölder continua con esponente $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$

$$P\left[\omega : \sup_{\substack{0 \leq t-s \leq h(\omega) \\ s,t \in [0,T] \\ h \text{ v.a. q.c.} > 0}} \frac{|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta\right] = 1$$

Es. Mostrare che se $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ $s \in [0,t)$

$\forall n > 0$ $\exists c_n$ / $E|B_t - B_s|^{2n} = c_n |t-s|^n$

Sol $G_X(u) = \exp\{-(t-s) \cdot \frac{u^2}{2}\}$

$E[|X|^{2p}] = |t-s|^p \cdot (2p-1)!!$ $\qquad c_n = (2n-1)!!$

Cor. $\exists P$ su $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$, e un processo stocastico $W = \{W_t, \mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$ su tale spazio, tali che sotto P, W è un moto browniano.

Dim. Si tratta di un'applicazione del teorema precedente e dell'esercizio

Possiamo ora dimostrare il teorema di Kolmogorov - Centov.

Dim. Suddividiamo il problema in cinque passi:

1. caso $T = 1$
2. scelgo $t = \frac{k}{2^n}$, $s = \frac{k-1}{2^n}$
3. considero $D_n = \{\frac{k}{2^n}, k = 0, \dots, 2^n\}$, $D = \bigcup D_n$, e mostriamo $|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq 2 \cdot \sum_{v=m+1}^{n} 2^{-\gamma i}$
4. $\{X_t, t \in D\}$ è uniformemente continua in D
5. $\tilde{X} = X$ $\quad \omega \in \Omega^*$ $\quad t \in D$

   $\tilde{X} = 0$ $\quad \omega \in \Omega^*$ $\quad t \in [0,1]$

(17.05.2011)

- **Prop.** (invarianza per inversioni temporali)
  Il processo dato da $X(t) = 0$ per $t = 0$, $X(t) = t \cdot B(\frac{1}{t})$ per $t > 0$, è un moto browniano standard.

- **Dim.** $\cdot\ E(X(t)) = 0$
  $\cdot\ \mathrm{Cov}(X(t+h)\,X(t)) = (t+h)\cdot t \cdot \mathrm{Cov}\left(B(\frac{1}{t+h}) \cdot B(\frac{1}{t})\right) = \frac{(t+h)\,t}{t+h} = t$
  $\cdot$ la distribuzione di $X(t)$ su $\mathbb{Q}$ corrisponde ad un moto browniano
  $\lim_{\substack{t \downarrow 0 \\ t \in \mathbb{Q}}} X(t) = 0$, dunque si ha continuità in 0.

Questa proprietà ci permette di mettere in relazione proprietà del moto browniano per $t \to 0$ con proprietà per $t \to +\infty$
Per esempio, si prova che $\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0$.
Infatti $\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t \cdot B(\frac{1}{t})}{t} = \lim_{t\to\infty} B(\frac{1}{t}) = B(0) = 0$

- **Prop.** (principio di riflessione)
  Consideriamo un moto browniano che al tempo $t = \tau$ ha raggiunto il livello a e viene da esso riflesso:

$$\tilde{W}(t) = \begin{cases} W(t) & t < \tau \\ 2a - W(t) & t > \tau \end{cases}$$

Poichè è possibile mettere in corrispondenza biunivoca equiprobabilistica $W(t)$ e $\tilde{W}(t)$, possiamo calcolare agilmente:

$$P(\max W(u) \geq a) = 2 \cdot P(W(T) > a) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2T}}\,dx$$

da cui $g(a,t\,|\,0) = \frac{d\,P(T_a < t)}{dt} = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\}$

- **Prop.** Consideriamo un moto browniano, non necessariamente unidimensionale, originato in $x \in \mathbb{R}^d$. Non ha importanza, per l'andamento futuro, se è $B(0) = x$ oppure $B(s) = x$.
- **Prop.** Se $\{B(t),\ t \geq 0\}$, è un moto browniano originato in 0, allora $\forall\ s > 0$ $\{B(t+s) - B(s)\}$ è ancora un moto browniano originato in 0 (Markov)

[Peres, Brownian Motion, pag. 43]

Sia ora $\mathcal{F}_0(t)$ la filtrazione generata da $B(s)$, $s \in [0,t]$.
Allora $B(t+s) - B(s)$ è indipendente da $\mathcal{F}_0(t)$
Definiamo anche $\mathcal{F}^+(s) = \bigcap_{t>s} \mathcal{F}_0(t)$; $\mathcal{F}^+(s) \supset \mathcal{F}_0(s)$

- Teor. Per $\forall s \geq 0$ il processo $\{B(t+s) - B(s),\ t \geq 0\}$ è indipendente da $\mathcal{F}^+(s)$

Dim. $B(t+s) - B(s) = \lim_{n\to\infty} B(t+s_n) - B(s_n)$, con $\{s_n\} \to s$ strett. decresc.
$\forall\ t_1, \dots, t_m > 0$
$(B(t_1+s) - B(s),\ B(t_2+s) - B(s),\ \dots,\ B(t_m+s) - B(s))$
[...] vedasi riferimento bibliografico

- Teor. (legge 0-1 di Blumenthal)
$A \in \mathcal{F}^+(0)$, $x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow P_x(A) = \{0,1\}$
- Teor. $\tau = \inf\{t : B(t) > 0\}$, $G = \inf\{t : B(t) = 0\}$
$P(\tau = 0) = P(G = 0) = 1$
- Teor. (legge 0-1 di Kolmogorov)
$x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{T} \Rightarrow P_x(A) = \{0,1\}$

La proprietà di Markov si traduce nel fatto che il processo si ripete omogeneo ("ricomincia" insomma) per ogni tempo deterministico. Verifichiamo ora che ciò accade anche per tempi di arresto.

- Teor. $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_t^+ \supset \mathcal{F}_t$. Allora $\mathcal{F}_t^+$ è continua a destra

Dim. $\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}^+(t+\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}(t + \frac{1}{n} + \frac{1}{k})$

- Teor. Un tempo di arresto rispetto a $\mathcal{F}_t^+$ è un tempo di arresto stretto (utilizzando opzionalmente, invece di $\mathcal{F}_t^+$, una filtrazione continua a destra)

Dim. $\{T \leq t\} = \bigcap_n \{T < t + \frac{1}{k}\} \in \mathcal{F}^+(t + \frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{F}^+(t)$

- Def. $\mathcal{F}^+(T) = \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}^+(t),\ t \geq 0\}$

- **Prop.** (forte di Markov)
  Per ogni tempo di arresto T, q.c. finito, il processo $\{B(t+T) - B(T)\}$ è un moto browniano standard, indipendente da $\mathcal{F}^+(T)$.
- In generale, per tempi non deterministici e non di arresto, non è detto che valga questa ripetizione, anche se i controesempi sono piuttosto particolari.
- **Dim.** Sia $\{T_n\}$ una successione di tempi di arresto con:

  $T_n = (m+1)\cdot 2^{-n}$ se $m\cdot 2^{-n} < T < (m+1)\cdot 2^{-n}$

  Come detto, per come definito, T_n è un tempo di arresto.

  Sarà $B_k(t) = B\left(t+\frac{k}{2^n}\right) - B\left(\frac{k}{2^n}\right)$; $B_*(t) = B(t+T_n) - B(T_n)$,

  $E \in \mathcal{F}^+(T_n) \quad \forall \{B_* \in A\}$ → indipendenti $\in \mathcal{F}^+(k\cdot 2^{-n})$

  $$P(\{B_* \in A\} \cap E) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{B_k \in A\} \cap E \cap \{T_n = k\cdot 2^{-n}\})$$
  $$= \sum P(B_k \in A)\cdot P(E \cap \{T_n = k\cdot 2^{-n}\})$$
  $$= P(B \in A)\cdot \sum_k P(E \cap \{T_n = k\cdot 2^{-n}\})$$
  $$= P(B \in A)\cdot P(E)$$

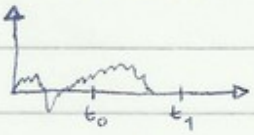
  Dimostriamo ora che, oltre che per T_n, vale pure per T.

  $\{B(s+T_n) - B(T_n),\ s\geq 0\}$ è un moto browniano indipendente da $\mathcal{F}^+(T_n) \supset \mathcal{F}^+(T)$; $B(s+T) - B(T) = \lim_{n\to\infty} B(s+T_n) - B(T_n)$

- **Es.** Si consideri $T = \inf\{t : B(t) = \max_{0\leq s\leq t} B(s)\}$. Si tratta di un tempo di arresto?

  Ris. Si prenda in considerazione $B(T+t) - B(T)$. Se T fosse un tempo di arresto, quello sarebbe un moto browniano. Ma essendo $B(T)$ punto di massimo, per $t=0$ vale ovviamente 0, in un intorno è necessariamente negativo, assurdo in quanto il moto browniano però non esserlo.

(19.05.2011)



Ci si vuole chiedere quale sia la probabilità che, in un intervallo $[t_0, t_1]$, con $t_0 > 0$, il moto browniano possieda almeno uno zero. Sappiamo che:

$$\frac{dP(T_a < t)}{dt} = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} \cdot \exp\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\}$$

Abbiamo:

$$P\left(\max_{0<u<t} B(u) \geq 0 \mid X(0) = -a\right) = P(\max B(u) \geq a \mid B(0) = 0) = P(T_a \leq t)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^t u^{-3/2} \exp\left\{-\frac{a^2}{2u}\right\} du = P(a),$$ corrispondente alla probabilità di avere almeno uno zero in $(0, t)$.

Se α è la probabilità di avere almeno uno zero in (t_0, t_1), dato che $B(0) = 0$, sarà:

$$\alpha = \int_0^\infty P(|B(t_0)| \in da \mid B(0) = 0)\, P(a)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{2t_0}} P(a)\, da$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{2t_0}} \cdot \left(\int_0^{t_1 - t_0} u^{-3/2} \exp\left\{-\frac{a^2}{2u}\right\} du \right) da$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}} \cdot \int_0^{t_1 - t_0} u^{-3/2} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{2t_0}} \cdot e^{-\frac{a^2}{2u}}\, da$$

$$= \frac{\sqrt{t_0}}{\pi} \cdot \int_0^{t_1 - t_0} \frac{du}{\sqrt{u}(t_0 + u)} = \int_0^{\sqrt{t_1 - t_0}/t_0} \frac{dv}{1 + v^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan \sqrt{\frac{t_1 - t_0}{t_0}} = \frac{2}{\pi} \cdot \arccos \sqrt{\frac{t_0}{t_1}}$$

dove nella ~~penultima~~ ultima uguaglianza abbiamo sostituito $u = t_0 v^2$.

Vediamo ora come generalizzare questo tipo di problema (di primo passaggio) ad un processo di diffusione generico.

- Equazione di Schrodinger: $T_{x_0} = \inf\{t : X(t) \geq s\}$, $g(s, t | x_0) = \frac{dP(T_{x_0} < t)}{dt}$

Giunti ad un certo istante di tempo, si può verificare:

- a. non ha ancora attraversato la barriera S;
- b. ha attraversato S un numero pari di volte;
- c. ha attraversato S un numero dispari di volte.

Abbiamo che:

- $P(a) = Q(t) = \int_t^{\infty} g(s,\tau|x_0)\, d\tau$
- $P(b) = \pi_p(t) = \int_0^t g(s,\tau|x_0)\, d\tau \cdot \int_{-\infty}^{s} f(x,t|s,\tau)\, dx$
- $P(c) = \pi_d(t) = \int_s^{\infty} f(x,t|x_0)\, dx$
  $\hookrightarrow \frac{d}{dx} P(X(t) < x \mid X(0) = x_0)$

Naturalmente la somma di queste tre quantità deve valere 1.

$\int_t^{\infty} g(s,\tau|x_0)\, d\tau + \dots = 1$

Derivando si ottiene l'equazione:

$$g(s,\tau|x_0) = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \int_0^t g(s,\tau|x_0) \cdot F(s,t|s,\tau)\, d\tau - \frac{\partial}{\partial t} F(s,t|x_0)$$

detta appunto equazione di Schrodinger.

- Se S è baniera di simmetria:

$$g(s,t|x_0) = \frac{1}{2} g(s,t|x_0) - \frac{\partial}{\partial t} F(s,t|x_0)$$

da cui semplicemente:

$$g(s,t|x_0) = -2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} F(s,t|x_0)$$

- Per $x > s$ vale inoltre:

$$f(x,t|x_0) = \int_0^t g(s,\tau|x_0)\, f(x,t|s,\tau)\, d\tau$$

Il caso $x = s$ è noto come equazione di Fortet ed è stato dimostrato nel 1943. Si tratta di un'equazione integrale di Volterra di prima specie.

Si noti che, essendo $f(x,t|s,\tau) = \frac{e^{-\frac{(x-s)^2}{2(t-\tau)}}}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}}$, sarà

$$f(s,t|s,\tau) = \frac{e^{-\frac{(s-s)^2}{2(t-\tau)}}}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}}$$

Per $t \to \tau$ ci si presenta dunque una singolarità, tuttavia integrabile essendo del tipo uno su radice.

- È inoltre:

$$f(s,t|x_0) = \int_0^t g(s,\tau|x_0)\, f(s,t-\tau|s)\, d\tau$$, integrale di convoluzione.

Trasformando:

$$f_\lambda(s|x_0) = \mathcal{L}_\lambda(f(s,t|x_0)) \qquad f_\lambda(s|s) = \mathcal{L}_\lambda(f(s,t)|s)$$

$$g_\lambda(s|x_0) = \mathcal{L}_\lambda(g(s,t|x_0))$$

$$g_\lambda(s|x_0) = \frac{f_\lambda(s|x_0)}{f_\lambda(s|s)}$$

Si ha:

$$f_\lambda(s|x_0) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \exp\left\{-\frac{(s-x_0-\mu t)^2}{2t}\right\} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}} \exp\left\{-(s-x_0)\left[\mu+\sqrt{2\lambda+\mu^2}\right]\right\}$$

$$g_\lambda(s|x_0) = \exp\left\{-(s-x_0)\left[\mu+\sqrt{2\lambda+\mu^2}\right]\right\}$$

$$f_\lambda(s|s) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}$$

$$g(s,t|x_0\,t) = \frac{|s-x_0|}{\sqrt{2\pi(t-t_0)^3}} \exp\left\{-\frac{(s-x_0-\mu(t-t_0))}{2(t-t_0)}\right\}$$

$f(x,t|x_0) \Longrightarrow f_\lambda(x|x_0)$ verifica Kolmogorov

$$\hookrightarrow \frac{f_\lambda(s|x_0)}{f_\lambda(s|s)} = g_\lambda(s|x_0)$$

$$f^a(x,t|x_0) = \frac{\partial}{\partial x} P(X^a(t) < x \mid X^a(0) = x_0)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} P(X(t) < x,\ T_a > t \mid X^a(0) = x_0)$$

$$= f(x,t|x_0) - \int_0^t g(s,\tau|x_0)\, f(x,t|s,\tau)\, d\tau$$

- Es. Si consideri un moto browniano, e definiamo il tempo di arresto τ come $\min\{t \geq 0 : B(t) = 2-4t\}$. Determinare $E(\tau)$.

Ris. Poichè $B(t)$ è martingala, sarà $E[B(\tau)] = E[B(0)] = 0$.
Ma anche $E[B(\tau)] = E[2-4\tau] = 2 - 4\cdot E[\tau]$, dunque $E(\tau) = \frac{1}{2}$.

- Es. Sempre nell'ipotesi di avere un moto browniano, si determini, al variare di t, $\tau^\circ := \sup\{s<t : B(s) = 0\}$

Ris. Il problema si riconduce alla probabilità di non avere zeri dopo quello che si vuole sia l'ultimo, essendo $P(\tau^\circ < \beta) = P(B(s) \neq 0 \quad s \in (\beta,t))$. Ma sarà anche:

$$= 1 - P(B(s) = 0 \text{ per un qualche } s \in (\beta,t))$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} \arccos\sqrt{\frac{\beta}{t}}$$

- Es. Sia $Y(t) = e^{aB(t)}$. $P(Y(\tau) = 1$, per un $\tau \in (t,t+1))$

Ris. Naturalmente $P(Y(\tau) = 1, \ldots) = P(e^{aB(\tau)} = 1, \ldots)$

$$= P(aB(\tau) = 0, \ldots) = P(B(\tau) = 0, \ldots) \quad [a \neq 0]$$

e ci si riconduce ad uno dei casi precedenti.

PROCESSI STOCASTICI

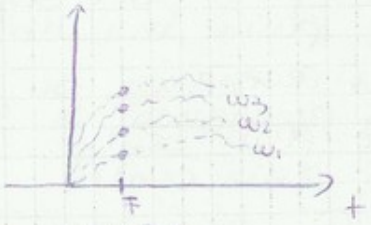
15-03

CONSIDERIAMO UNA TERNA $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ CON $\mathcal{A}$ σ-ALGEBRA GENERATA DALL'INSIEME DI EVENTI $A \subset \Omega$

DEFINIAMO

PROCESSO STOCASTICO

$\{X(t,\omega),\ t \in T,\ \omega \in A\}$ FAMIGLIA DI VARIABILI ALEATORIE INDICIZZATE DAL PARAMETRO $t \in T$ (INSIEME DISCRETO O CONTINUO).

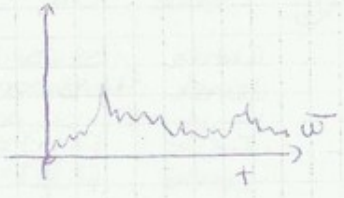


OSSERVIAMO CHE SE FISSIAMO IL PARAMETRO t

$X(\bar{t},\omega)$ OTTENIAMO UNA V.A.

SE FISSIAMO IL PARAMETRO ω

$X(t,\bar{\omega})$ OTTENIAMO UNA TRAIETTORIA CHE VARIA NEL TEMPO

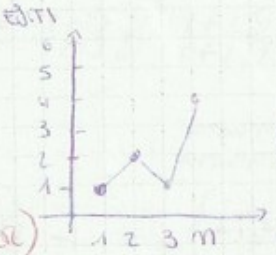


ESEMPI (LANCIO MONETA)

1) INSIEME INDICE T DISCRETO

$\Omega = \{1, 2, \dots 6\}$

REALIZZAZIONI PROCESSO TEMPO MEDIO



(ESEMPIO DI TRAIETTORIA (FISSATO ESPER. $\bar{\omega}$

(S REAL. v.A. X_m) $X(m) = 5, 3, 2, 1, 2 \dots$

2) MOTO BROWNIANO (PROCESSO DI WIENER)

(ESEMPIO INSIEME INDICE E INSIEME DEGLI STATI CONTINUO)

SIA $t_0 < t_1 < \dots < t_m$

ALLORA

- $X(0) = 0$
- INCREMENTI $X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1}, \dots$ RELATIVI AD INTERVALLI DISGIUNTI SONO INDIPENDENTI
- LA DISTRIBUZIONE DELL'INCREMENTO GENERICO $X(t+s) - X(t)$ DIPENDE SOLO DA s E NON DA t = STAZIONARIETÀ
- PROBABILITÀ $P(X_t - X_s \le x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \int_{-\infty}^{+x} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\dfrac{y^2}{\sigma^2(t-s)}\right\} dy$

INCREMENTI DISTRIBUITI NORMALMENTE

PROCESSO DI POISSON

1) • $X(0) = 0$, PROCESSO COSTANTE A TRATTI

2) • IL NUMERO DI EVENTI CHE SI VERIFICA IN UN INTERVALLO ...
È IL NUMERO DI EVENTI CHE SI VERIFICA IN UN INTERVALLO AD ESSO DISGIUNTO SONO INDIPENDENTI = STAZIONARIETÀ.

3) • LA PROBABILITÀ DI AVERE UN EVENTO IN UN INTERVALLO DI AMPIEZZA h
È $p(h) = \lambda h + o(h)$ $\quad \lambda > 0$

4) • LA PROBABILITÀ DI AVERE DUE O PIÙ EVENTI IN UN INTERVALLO DI AMPIEZZA h
È $p(h) = o(h)$.

DALLA (4) SEGUE CHE $\sum_{m=2}^{+\infty} P_m(h) = o(h)$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE LA PROB. CHE SI VERIFICHI UN EVENTO IN UN INT. DI AMPIEZZA h
COME $p(h) = P_1(h) + P_2(h) + \dots$

OSS: $P_0(t+h) = P_0(t) \cdot P_0(h) = P_0(t)[1 - p(h)]$

↓ INDIP. STAZIONARIETÀ

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\frac{p(h)}{h} P_0(t)$$

PASSANDO AL LIMITE PER $h \to 0$

$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \Rightarrow \boxed{P_0(t) = C e^{-\lambda t}}$ con $C = 1$ POICHÉ $P_0(0) = 1$

GENERALIZZANDO

$$P_m(t+h) = \sum_{i=0}^{m} P_{m-i}(t) P_i(h) = P_m(t) P_0(h) + P_{m-1}(t) P_1(h) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{m} P_{m-i}(t) P_i(h) = P_m(t) P_0(h) + p(h) \cdot P_{m-1}(t) + o(h) =$$

$$P_m(t+h) - P_m(t) = -P_m(t)[P_0(h) - 1] + P_{m-1}(t) P_1(h) + o(h) =$$

$$= -\lambda h P_m(t) + \lambda h P_{m-1}(t) + o(h)$$

$$\text{con } h \to 0 \quad \frac{P_m(t+h) - P_m(t)}{h} = P_m'(t) = -\lambda P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t)$$

[NB $P_m(0) = 0$]

QUESTA E.D. ALLE DIFFERENZE SI RISOLVE TRAMITE SOSTITUZIONE
$Q_m(t) = P_m(t) e^{\lambda t}$. NE RISULTA CHE $\boxed{P_m(t) = \frac{\lambda^m t^m}{m!} e^{-\lambda t}}$

DEF: UN PROCESSO SI DICE AD INCREMENTI INDIPENDENTI SE LE VARIABILI ALEATORIE, SCELTI $t_m > t_{m-1} > \dots > t_0$, $X_{t_m} - X_{t_{m-1}}$, $X_{t_{m-1}} - X_{t_{m-2}}$, $\dots$, SONO INDIPENDENTI (ANCHE X_{t_0})

EQUIVALENTEMENTE LE $Z_m = X_m - X_{m-1}$ SONO INDIPENDENTI

DEF: SE LA DISTRIBUZIONE DI $X(t+h) - X(t)$ DIPENDE SOLO DA h DICIAMO CHE GLI INCREMENTI SONO STAZIONARI

$$X(t_2 + h) - X(t_2) \sim X(t_1 + h) - X(t_1)$$

$\Rightarrow$ SE UN PROCESSO HA INCREMENTI INDIPENDENTI E STAZIONARI, ALLORA

$E[X_t] = m_0 + m_1 t$

$VAR[X_t] = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 t$

CON $m_0 = E[X_0]$ $\quad m_1 = E[X_0] - m_0$

$\sigma_0^2 = VAR[X_0]$ $\quad \sigma_1^2 = VAR[X_1] - \sigma_0^2$

DIM DEFINIAMO $f(t) = E[X_t] - E[X_0]$; IN TAL CASO:

$$f(t+s) = E[X_{t+s}] - E[X_0] = E[(X_{t+s} - X_t) + (X_t - X_0)] =$$
$$= E[X_{t+s} + X_t] + E[X_t - X_0] = f(s) + f(t)$$

SUPPONENDO ORA CHE f SIA DIFFERENZIABILE E DERIVANDO PRIMA RISPETTO A t POI RISPETTO AD s:

$$f'(t+s) = f'(t) = f'(s)$$

- SOSTITUENDO PER ESEMPIO CON $s = 1$

$f'(t+1) = f'(t) = f'(1)$

DA CUI $f'(t) = C \Rightarrow f(t) = Ct + d$

- DETERMINIAMO ORA d

PER $(t,s) = (0,0)$ SI OTTIENE:

$f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

DA CUI $d = 0$

PERTANTO $f(t) = C \cdot t = f(1) \cdot t$ E PERCIÒ

$E[X_t] - E[X_0] = \{E[X_1] - E[X_0]\} \cdot t$

PROCESSI DI MARKOV

DEF UN PROCESSO $\{X_n\}$ È DI MARKOV SE VALE:

$$P(X_m \in A \mid X_{m-1} = i_{m-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_m \in A \mid X_{m-1} = i_{m-1})$$

$\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall i_0 - i_{m-1}$, $\forall m$.

OPPURE NEL CASO CONTINUO $\rightarrow \mathcal{F}_s = \sigma(X_\tau, \tau \le s)$

$$P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A \mid X_s = x_s)$$

FILTRAZIONE

$s < t$

INTUITIVAMENTE: IL FUTURO DEL PROCESSO È INDIPENDENTE DAL PASSATO SE SI CONOSCE IL PRESENTE.

PROCESSI STAZIONARI

DEF UN PROCESSO È DETTO STRETTAMENTE STAZIONARIO SE LE FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DELLE FAMIGLIE DI V.A.

$(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_m+h})$ e $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$

COINCIDONO PER $\forall h > 0$, $\forall m$, $\forall t_1 - t_m$.

DEF UN PROCESSO SI DICE DEBOLMENTE STAZIONARIO SE AMMETTE MOMENTO SECONDO FINITO E TALE CHE $\mathrm{COV}(X_t, X_{t+h})$ DIPENDA SOLO DA h, $\forall t \in T$.

DEF 1) UN PROCESSO SI DICE DI RINNOVO SE È COSTITUITO DA VARIABILI ALEATORIE CHE MISURANO "TEMPO DEL n-ESIMO EVENTO" $\{T_i\}$ DOVE LE T_i SONO V.A. INDIPENDENTI

2) UN PROCESSO SI DICE DI CONTEGGIO DI RINNOVO SE CONTA GLI EVENTI DEL PROCESSO DI RINNOVO FINO AL TEMPO $t \in T$

3) UN PROCESSO SI DICE DI ARRESTO SE L'INSIEME INDICE T È UN EVENTO (CIOÈ $T \in \mathcal{A}$) ED È DISCRETO.

ESEMPIO UTILE:

SIA U V.A. UNIFORME SU $[0,1]$ E DEFINIAMO I SEGUENTI 2 PROCESSI STOCASTICI:

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{SE } t = U \\ 0 & \text{DIVERSAMENTE} \end{cases} \qquad Y_t = 0 \quad t \geq 0$$

ABBIAMO CHE

$$P(X_t < \tfrac{1}{2} \quad \forall t \in [0,1]) = 0$$

$$P(Y_t < \tfrac{1}{2} \quad \forall t \in [0,1]) = 1$$

CONSIDERIAMO ORA L'EVENTO:

$$A_m = \{X_{t_i} > 0 \qquad t_i = \frac{i}{2^m}, \; i = 0, 1, \dots, 2^m\}$$

DI PROBABILITÀ $P(A_m)$ E TALE PER CUI

$$P(X_t > 0, \; t \in [0,1]) = \lim_{m \to \infty} P(A_m) \quad (1)$$

POSSIAMO PERÒ ANCHE CONSIDERARE LA SUCCESSIONE

$$\hat{A}_m = \{X_{t_i} > 0, \; t_i = \frac{i}{3^m} \quad i = 0, 1, \dots 3^m\} \text{ DOVE}$$

$$P(X_t > 0, \; t \in [0,1]) = \lim_{m \to \infty} P(\hat{A}_m) \quad (2)$$

A PRIORI TUTTAVIA NON È ALCUN MOTIVO PER CUI I LIMITI SIANO COINCIDENTI: QUESTA È UNA DELLE QUESTIONI CHE INSORGE QUANDO SI PASSA DAL TEMPO DISCRETO AL TEMPO CONTINUO.

DEFINIAMO ORA IL CONCETTO DI PROCESSI STOCASTICI UGUALI:

DEF X_t e Y_t SONO UGUALI SE E SOLO SE:

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega) \qquad \forall t \geq 0, \; \forall \omega \in \Omega$$

QUESTA È UNA DEFINIZIONE MOLTO FORTE, LIMITANTE DAL PUNTO DI VISTA DELLA "CASALINGA" DEI PROCESSI IN QUESTIONE.

INTRODUCIAMO UNA DEFINIZIONE MENO RESTRITTIVA:

DEF X_t È UNA MODIFICAZIONE (VERSIONE) DI Y_t SE: $P(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \geq 0$

↓ UGUAGLIANZA A MENO DI INSIEMI DI VALORI A MISURA NULLA

DEF X_t e Y_t HANNO LE STESSE DISTRIBUZIONI FINITO DIMENSIONALI SE $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_m$, $\forall m$, $d = m+1$

$$P((X_{t_1}, \dots X_{t_m}) \in A) = P((Y_{t_1}, \dots Y_{t_m}) \in A)$$

DEF X_t e Y_t SONO INDISTINGUIBILI SE

$$P(X_t = Y_t \ , \forall t \in T) = 1$$

VEDIAMO UN ESEMPIO. SIA T UNA V.A. ASSOLUTAM. CONTINUA

$X_t = 0 \quad \forall t, \qquad Y_t = \begin{cases} 0 & t \neq T \\ 1 & t = T \end{cases}$

SI TRATTA DI UNA MODIFICAZIONE PERCHÉ:

$$P(X_t = Y_t) = P(t \neq T) = 1$$

NON SI TRATTA INVECE DI PROCESSI INDISTINGUIBILI, INFATTI:

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 0$$

MOTO BROWNIANO

DEF IL MOTO BROWNIANO, O PROCESSO DI WIENER, È UN PROCESSO STOCASTICO CHE VERIFICA:

1) $X(0) = 0$
2) GLI INCREMENTI $X(t+s) - X(t)$ SONO DISTRIBUITI NORMALMENTE CON MEDIA NULLA E VARIANZA $\sigma^2 s$
3) $\forall (t_1, t_2], [t_3, t_4] \quad t_1 < t_2 < t_3 < t_4$
   GLI INCREMENTI $X(t_4) - X(t_3)$ e $X(t_2) - X(t_1)$ SONO INDIPENDENTI

- IL MOTO BROWNIANO È UN PROCESSO DI MARKOV
- SE $\sigma = 1$ DENOTIAMO IL MOTO BROWNIANO COME STANDARD. OGNI MB PUÒ ESSERE STANDARDIZZATO PONENDO $\tilde{X}(t) = \frac{X(t)}{\sigma}$
- SIANO $\cdot \ P(X(t) \leq x \mid X(t_0) = x_0) = P(X(t) - x_0 \leq x - x_0 \mid X(t_0) = 0)$

  $\cdot \ f(x_1 - x_m)\, d\underline{x} = p(x_1, t_1)\, p(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \cdot \dots \cdot p(x_m - x_{m-1}, t_m - t_{m-1})\, d\underline{x}$

DOVE: $p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2 t} \right\}$

- $X(t) = \underbrace{\tilde{X}(t)}_{\text{MB STANDARD}} + \mu t$ È DEF MB CON DRIFT

E IN TAL CASO GLI INCREMENTI HANNO MEDIA $\mu\delta$ E VARIANZA $\sigma^2\delta$
DI AMPIEZZA
$X(t+\delta) - X(t)$

STUDIAMO ORA LA CONNESSIONE TRA CAMMINO CASUALE E MOTO BROWNIANO: FELLER VOL I P. 354

CONSIDERIAMO UN CAMMINO CASUALE AVENTE INIZIO NELL'ORIGINE
t.c. $S_m = X_1 + \dots + X_m$ (↓ POSIZIONE ALL'm-ESIMO PASSO)

$$X_i = \begin{cases} +1 & p \\ -1 & (1-p) = q \end{cases} \quad \text{i.i.d.}$$

PERTANTO $E(S_m) = (p-q)m$ $\quad VAR(S_m) = 4pqm$
PER PASSARE DA QUESTO CAMMINO CASUALE AD UN'APPROSSIMAZIONE DI TALE CAMMINO NEL CONTINUO CONSIDEREREMO:

$$E(\delta S_m) = (p-q)\delta m \qquad VAR(\delta S_m) = 4pq\delta^2 m$$

DOVE δ RAPPRESENTA L'AMPIEZZA DI CIASCUNO SPOSTAMENTO.
(DOVUTO ALLE COLLISIONI TRA PARTICELLE NELL'INTERP. FISICA)

CI CHIEDIAMO SE IL MOTO BROWNIANO (MOVIMENTO DI PARTICELLE SOSPESE IN UN LIQUIDO) SIA COMPATIBILE CON TALE APPROSSIMAZIONE:

SIA **C** LO SPOSTAMENTO MEDIO OSSERVATO E
D LA VARIANZA PER UNITÀ DI TEMPO. } NOTI DALLE OSSERVAZ DI UN MB

ALLORA DEVE VALERE:

$$\begin{cases} (p-q)\delta r = C \\ 4pq\delta^2 r = D \end{cases}$$

DOVE r RAPPRESENTA IL NUMERO DI COLLISIONI PER UNITÀ DI TEMPO (r INCOGNITO)

PER RENDERE TALE APPROSSIMAZIONE PIÙ REALISTICA CONSIDEREREMO CASI IN CUI:

$\delta \ll$
$r \gg$
$(p-q) \ll$
$C, D > 0$ COSTANTI DATE

FORMULAZIONE ANALITICA PROBLEMA

STUDIAMO IL CASO IN CUI

$\delta \to 0$

$\pi \to \infty$ & $\begin{cases} (p-q)\delta\pi \to c \\ 4pq\,\delta^2\pi \to D \end{cases}$

$p \to \frac{1}{2}$

CI SONO DUE MODI PER APPROCCIARE IL PROBLEMA :

① UTILIZZANDO LE PROBABILITÀ NOTE E PASSANDO AL LIMITE = METODO + DIRETTO

② UTILIZZANDO LE EQ ALLE DIFFERENZE RELATIVE AL CAMMINO CASUALE PER OTTENERE TRAMITE LIMITE EQ. DIFFERENZIALI = METODO + GENERALE

① METODO DIRETTO

CONTINUIAMO A CONSIDERARE $\{S_m\}$ CC CON PASSI UNITARI E PONIAMO $V_{K,m} = P\{S_m = K\}$

NEL NOSTRO CC ACCELERATO IL PASSO m-ESIMO AVVIENE AL TEMPO $\frac{m}{\pi}$

E LA POSIZIONE RAGGIUNTA È $S_m\delta = K\delta$

VOGLIAMO OTTENERE LA PROB CHE UNA DATA PARTICELLA AL TEMPO t SI TROVI NELL' INTORNO DI UN DATO PUNTO x :

DOBBIAMO DUNQUE STUDIARE IL COMPORTAMENTO ASINTOTICO DI $V_{K,m}$

QUANDO $K \to \infty$, $m \to \infty$ (CLL) IN MODO T.C. $\frac{m}{\pi} \to t$, $K\delta \to x$

PER TROVARSI ALLA POSIZ K DOPO m PASSI DEVO FARE $\frac{m+K}{2}$ PASSI AVANTI E $\frac{m-K}{2}$ INDIETRO

$$V_{K,m} = P\{S_m = K\} = \binom{m}{\frac{m+K}{2}} p^{\frac{m+K}{2}} q^{m-\frac{m+K}{2}}$$

DOVE m e K SONO ENTRAMBI PARI O DISPARI

PER IL TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

$$V_{K,m} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{-\left[\frac{1}{2}(m+K) - mp\right]^2/(2mpq)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{-[K-m(p-q)]^2/8mpq} = \frac{2\delta}{\sqrt{2\pi\, 4\delta^2 pq \frac{m\pi}{\pi}}} \exp\left\{-\frac{[K-m(p-q)]^2}{8mpq}\cdot\frac{\delta^2}{\delta^2\frac{\pi}{\pi}}\right\}$$

$[\delta K - S_m(p-q)\delta]\frac{\pi}{\pi}$ → c^+ → x^+

$$\sim \frac{2\delta}{\sqrt{2\pi D t}}\, e^{-(x-ct)^2/2Dt}$$

$V_{K,m}$ È ORA LA PROBABILITÀ CHE $S_m\delta$ SI TROVI TRA $K\delta$ E $(K+2)\delta$;

DIVIDENDO $V_{K,m}/2\delta$ OTTENIAMO LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ $V(t,x)$

$$V(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D t}} e^{-\frac{1}{2}(x-ct)^2/Dt}$$

e $P\{\alpha < S_n\delta < \beta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D t}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{1}{2}(x-ct)^2/Dt} dx$ DISTRIBUZIONE NORMALE

② APPROCCIO TRAMITE EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE

$V_{K,m}$ SODDISFA L'EQUAZIONE ALLE DIFF:

$$V_{K,m+1} = p V_{K-1,m} + q V_{K+1,m}$$

MOLTIPLICANDO $V(x,t)$ PER 2δ RISULTA (DAL RIS PRECEDENTE) CHE IL LIMITE DI $V(x,t)$ È SOLUZIONE APPROSSIMATA PER L'EQ ALLE DIFFERENZE

$$V(t+\tfrac{1}{\tau}, x) = p\, v(t, x-\delta) + q\, v(t, x+\delta)$$

POICHÉ V HA DERIVATE CONTINUE ESPANDIAMO I TERMINI UTILIZZANDO TAYLOR. (PRIM'ORDINE PER PER 1° MEMBRO, SECOND'ORDINE 2° MEMBRO)

OTTENIAMO:

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = (q-p)\delta\tau \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\delta^2\tau \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + \dots$$

NEL PASSAGGIO AL LIMITE I TERMINI [...] TENDONO A 0 E OTTENIAMO L'EQUAZIONE

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -c \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$$

NOTA COME EQUAZIONE DI FOKKER-PLANCK PER DIFFUSIONI

TALE EQ. PUÒ ESSERE GENERALIZZATA PERMETTENDO AI COEFF (c e D) DI DIPENDERE DA x e t.

CATENE DI MARKOV

DEF UNA CATENA DI MARKOV È UN PROCESSO STOCASTICO A TEMPO DISCRETO, IL CUI INSIEME DEGLI STATI PUÒ ESSERE DI CARDINALITÀ FINITA O INFINITA-NUMERABILE, TALE PER CUI:

$$P(X_m = j \mid X_{m-1} = i_{m-1}, \dots X_0 = i_0) = P(X_m = j \mid X_{m-1} = i_{m-1}) := P_{ij}(m)$$

- SE È ANCHE TEMPORALMENTE OMOGENEA ALLORA:
  $P(X_m = j \mid X_{m-1} = i_{m-1}, \dots X_0 = i_0) = P(X_m = j \mid X_{m-1} = i_{m-1}) = P_{ij}$
  ← PROB. DI PASSARE DA UNO STATO ALL'ALTRO NON DIPENDE DAL TEMPO
- SI PUÒ DEFINIRE LA MATRICE DI TRANSIZIONE: $[P_{ij}]$

  $i = 0, 1, \dots$

  $j = 0, 1, \dots$

  DOVE P_{ij} = PROBABILITÀ DI PASSARE DALLO STATO i ALLO STATO j.

ES. CAMMINO CASUALE

$X_m = X_{m-1} + \varepsilon$ con $\varepsilon = \begin{cases} 1 & p_m \\ -1 & q_m \end{cases}$

IN QUESTO CASO $P_{i,i+1} = p$ $\quad P_{i,i-1} = q$

MATRICE DI TRANSIZIONE:

$$\begin{bmatrix} 0 & p & & \emptyset \\ q & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & p \\ \emptyset & & q & 0 \end{bmatrix}$$

$P_{i,i} = 0$: PROBAB DI RIMANERE NELLO STESSO STATO È NULLA

PROPRIETÀ:

- $P_{ij} \geq 0$
- $\sum_j P_{ij} = 1$
- $P(X_1 = x_1) = \sum_{i_0} \left[P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \right]$

→ SE VOGLIAMO STUDIARE L'EVOLUZIONE DEL PROCESSO DOPO m PASSI È SUFFICIENTE ELEVARE LA MATRICE AL NUMERO DI PASSI:

- $P(X_m = j \mid X_0 = i) = P_{ij}^{(m)}$
- $P^{(m)} = P^m$
- $P_{ij}^{(m)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(m-r)}$

AD ESEMPIO

$$P_{ij}^{(1)} = \sum_{k \in S} P_{ik} P_{kj}$$

- STATI DI UNA CATENA

DEF j È ACCESSIBILE DA i SE $\exists m>0$ t.c. $P_{ij}^{m} > 0$, SI SCRIVE $i \to j$

DEF SE $j \to i$, $i \to j$ ALLORA GLI STATI COMUNICANO

(E STATO COMUNICA CON TUTTI CHE HA

DEF UNA CATENA SI DICE IRRIDUCIBILE SE TUTTI I SUOI STATI COMUNICANO

DEF UNO STATO i SI DICE TRANSIENTE SE "PRIMA O POI VIENE ABBANDONATO"
CIOÈ SE $\exists m, j$ t.c. $P_{ij}^{(m)} > 0$

DEF UNO STATO i SI DICE PERIODICO DI PERIODO $d_i = d(i)$ SE

$d = MCD \{ m \in \mathbb{N} : P_{ij}^{(m)} > 0 \}$

DEF $f_{ii}^{(m)} = P(X_m = i, X_\nu \neq i, \nu = 1, \dots m-1 \mid X_0 = i)$

PROBABILITÀ DI PRIMO RITORNO ALLO STATO i AL TEMPO m

DEF TEMPO DI PRIMO RITORNO

$T = \inf \{ \tau \in \mathbb{N} : X_\tau = i, X_\nu \neq i, \nu = 1, \dots m-1 \mid X_0 = i \}$

PER CALCOLARE LA PROB DI TORNARE IN i DOPO m PASSI POSSO CONTARE I "CICLI" DI PRIMO RITORNO

$$P_{ii}^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(m-k)}$$

DOVE k È IL TEMPO DI PRIMO RITORNO (CASUALE!)
NEL CASO VISTO IN PRECEDENZA SPEZZAVAMO IL CAMMINO AD UN TEMPO DETERMINISTICO FISSATO.

DEF UNO STATO i SI DICE RICORRENTE SE $\exists m \in \mathbb{N}$ t.c.

$$f_{ii}^{(m)} = 1$$

- POSITIVO RICORRENTE: SE IL TEMPO MEDIO DI RITORNO È FINITO.
- NULLO RICORRENTI: SE IL TEMPO MEDIO DI RITORNO È INFINITO

PROPRIETÀ DI MARKOV FORTE

DEF TEMPO DI MARKOV (STOPPING TIME)

SIA ζ UNA V.A. NON NEGATIVA ASSOCIATA AD UN PROCESSO A TEMPO CONTINUO $\{X_t\}$, $0 \le t < \infty$

OVVERO ASSOCIAMO AD OGNI TRAIETTORIA X_t UN NUMERO NON NEGATIVO CHE DENOTIAMO $\zeta(X_t)$

LA V.A. ζ È UN TEMPO DI MARKOV RELATIVO A $\{X_t\}$ SE HA LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

SE X_t e Y_t SONO DUE TRAIETTORIE DEL PROCESSO t.c.

$X_\tau = Y_\tau$ PER $0 \le \tau < \delta$ E $\zeta(X_t) < \delta$ ALLORA:

$\zeta(X_t) = \zeta(Y_t)$

ESEMPIO TEMPO DI MARKOV = CONSIDERIAMO UNA CATENA DI MARKOV t.c. $X(0) = j_0$

SIA $\zeta(X_t) = \inf\{\tau \mid X_\tau = i^\circ\}$. "TEMPO DI PRIMA ENTRATA NELLO STATO i°"

DOVE i° STATO FISSATO e $\zeta(X_t) = +\infty$ SE $\nexists\, \tau$ t.c. $X_\tau = i^\circ$

$\zeta(X_t)$ È UN TEMPO DI MARKOV

SUPPONIAMO CHE PER UNA TRAIETTORIA FISSATA X_t, $\zeta(X_t) < \delta$.

QUESTO SIGNIFICA CHE $\exists\, t'$ t.c. $t' < \delta$ e $X_{t'} = i^\circ$.

SE $X_\tau = Y_\tau$ PER $0 \le \tau \le \delta$ ALLORA $Y_{t'} = i^\circ$

E $\zeta(Y_t) \le \zeta(X_t)$

PER SIMMETRIA $\zeta(Y_t) = \zeta(X_t)$

LA PROPRIETÀ DI MARKOV PER PROCESSI STAZIONARI AFFERMA CHE:

SE CONOSCIAMO I VALORI DI $X(s)$ PER $0 \le s_1 < s_2 < \dots < s_m = t_0$

LA DISTRIB DI PROBABILITÀ DI:

$X(t_0+t_1), X(t_0+t_2), \dots, X(t_0+t_k)$ con $0 < t_1 < \dots < t_k$ (*)

DIPENDE SOLO DA $X(t_0)$; OVVERO LA DISTR. DI PROBABILITÀ DI (*) COINCIDE CON QUELLA DI $X(t_1), X(t_2) - X(t_k)$ DATO $X(0) = 0$.

IN ALTRE PAROLE POSSIAMO CALCOLARE LA DISTR. DI PROB (*) TRASLANDO L'ORIGINE DEL TEMPO IN $t_0 = 0$.

POSSIAMO RIPETERE TALE RAGIONAMENTO SOSTITUENDO IL VALORE t_0 FISSATO CON UN TEMPO DI MARKOV ζ:

$X(\zeta + \tau)$ DATO $X(\zeta) = x$

ALLORA SE $\forall$ TEMPO DI MARKOV δ LA DISTRIB. DI PROBABILITÀ DI

$X(t_1+\delta), X(t_2+\delta), \dots, X(t_k+\delta) \qquad (t_1<t_2<\dots<t_k)$

CON $X(\delta)=x$

È IDENTICA ALLA DISTRIB DI PROBABILITÀ

$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k) \qquad$ CON $X(0)=x$

ALLORA DICIAMO CHE IL PROCESSO DI MARKOV POSSIEDE PROPRIETÀ FORTE DI MARKOV

- ESEMPIO:

SIA $\delta_{i,j}$ IL TEMPO A CUI LO STATO j È RAGGIUNTO PER LA PRIMA VOLTA PARTENDO DALLO STATO i = TEMPO DI MARKOV

ALL'ISTANTE $\delta_{i,j}$, QUANDO VIENE RAGGIUNTO LO STATO j, LA DISTRIB. DI PROB FUTURA DEL PROCESSO È LA STESSA SE TRASLIAMO IL TEMPO IN MODO TALE CHE $\delta_{i,j}=0$. IN QUESTO CASO LO STATO INIZIALE È j E LA CATENA DI MARKOV È OSSERVATA DALLA MATRICE DI TRANSIZIONE $P_{ke}(t)$ COME NEL MODO USUALE.

$\Rightarrow$ QUANTO DETTO VALE SOLO SE È VERIFICATA LA PROPRIETÀ DI MARKOV FORTE:

ALLORA LA FORMULA $P_{ij}(t) = \int_0^t P_{jj}(t-s)\, dF_{ij}(s)$ $\longrightarrow$ PROB CHE: $s \le \delta_{ij} \le s+ds$

(LEGGE PROB TOTALI)

$P_{jj}(t-s)$: PROB DI TRANSIZIONE $j \to j$ PARTENDO DA $\delta_{i,j}$

$dF_{ij}(s) = f_{ij}(s)\,ds$ SE ESISTE LA "FZ DENSITÀ"

DEF TEMPO DI MARKOV (TEORIA DELLA MISURA)

UNA V.A. T SI DICE TEMPO DI MARKOV SE $\{T<t\} \in \mathcal{F}_t$ ($\mathcal{F}_t$ MISURABILE)

DATO IL PROCESSO STOCASTICO $\{X_t, t\ge 0\}$

LA V.A. T È ASSOCIATA AL PROCESSO DATO X_t $\qquad \sigma(X_s, s<t)$

DEF PROPRIETÀ MARKOV FORTE

UN PROCESSO X_t GODE DELLA PROPRIETÀ DI MARKOV FORTE SE VALE

$$P((X_{t_1+\tau} - X_{t_m+\tau}) \in A) = P((X_{t_1+\tau} - X_{t_m+\tau}) \in A) \qquad \forall t_1,\dots,t_m \in T,\ \forall m,\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

DOVE τ È UN TEMPO DI MARKOV.

BOREL σ-ALGEBRA

σ-ALGEBRA GENERATA DAGLI APERTI DI $\mathbb{R}^n$

DEF UN PROCESSO STOCASTICO A TEMPO CONTINUO CHE SODDISFA LA PROPRIETÀ DI MARKOV FORTE E LE CUI TRAIETTORIE SIANO A.S. CONTINUE SI DICE PROCESSO DI DIFFUSIONE

Es: MOTO BROWNIANO È UNA DIFFUSIONE

DEF UN PROCESSO DI MARKOV CON FUNZIONE DI DENSITÀ DI TRANSIZIONE $p(s,x,t,A)$ (A: INTERVALLO SPAZIALE) SI DICE DI DIFFUSIONE SE SI VERIFICANO LE SEGUENTI PROPRIETÀ

1) $\forall \varepsilon, t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E[X(t+h) - X(t) \mid X(t)=x] = \mu(x,t)$

PARAMETRO DI DIFF o MEDIA INFINITESIMALE

NB: se $X(t)$ TEMPOMOM. OMOG. $\mu(x,t) = \mu(x)$, $\sigma^2(x,t) = \sigma(x)$

2) $\forall \varepsilon \geq 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E[(X(t+h) - X(t))^2 \mid X(t)=x] = \sigma^2(x,t)$

PARAMETRO DI DIFFUSIONE o VARIANZA INFINITESIMALE

KT2 158

$\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P\{|X(t+h) - x| > \varepsilon \mid X(t)=x\} = 0$ $\forall x \in I$

3) $\forall \varepsilon > 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} p(s,x,t,dy) = 0$ (?)

PUÒ ESSERE ANCHE UNBOUNDED DECRESCENTE $\leftarrow I = (e, r)$

DEF UN PROCESSO È REGOLARE SE DA OGNI PUNTO DELL'INTERVALLO DI DIFFUSIONE SI PUÒ RAGGIUNGERE OGNI ALTRO PUNTO DELL'INT DI DIFFUSIONE

DEF $T_z = \inf\{t \geq 0 : X_t = z \mid X_0 = x\}$ $e < x, z < r$

TEMPO MINIMO DI PASS. DALLO STATO x

IL PROCESSO È REGOLARE SE $P(T_z < \infty \mid X(0)=x) > 0$ $\forall e < x$ $\forall z < r$

VEDIAMO ORA 3 DEFINIZIONI DI CONTINUITÀ DI TRAIETTORIA

DEF (1) $X(t)$ È CONTINUO IN MEDIA QUADRATICA SE $\forall t \in T$

$\lim_{s \to t} E[|X(t) - X(s)|^2] = 0$

(2) $X(t)$ È CONTINUO IN PROBABILITÀ SE $\forall t \in T, \forall \varepsilon > 0$

$\lim_{s \to t} P(|X(t) - X(s)| > \varepsilon) = 0$

③ $X(t)$ È QUASI CERTAMENTE CONTINUA SE $\forall t \in T$

$$P\left(\lim_{s \to t} X(s) = X(t)\right) = 1 \qquad \forall t \geq 0 \qquad \left(\begin{matrix}1)\ \forall t \geq 0 \\ 2)\ \forall \omega \in \Omega\end{matrix}\right)$$

LE 3 DEFINIZIONI VISTE FINORA DI CONTINUITÀ NON IMPLICANO LA CONTINUITÀ DELLE TRAIETTORIE DEL PROCESSO; INTRODUCIAMO ORA UN TEOREMA CHE CI SERVIRÀ AD EVIDENZIARE TALE ASPETTO.

TEOREMA: PROCESSI CHE AMMETTONO MOMENTI SECONDI FINITI SONO CONTINUI IN MEDIA QUADRATICA $\iff$

- $m(t) = E[X(t)]$ È CONTINUA
- LA FZ DI COVARIANZA
$$\Gamma(s,t) = E\left[(X(t) - m(t))(X(s) - m(s))\right]$$
È CONTINUA PER $s = t$.

INFATTI $E\left[(X(s) - X(t))^2\right] = E\left[X^2(s) + X^2(t) - 2X(t)X(s)\right] =$

$= \Gamma(s,s) + m^2(s) + \Gamma(t,t) + m^2(t) - 2E[X(t)X(s)]$

$= \Gamma(s,s) + m^2(s) + \Gamma(t,t) + m^2(t) - 2\Gamma(s,t) - 2m(t)m(s)$

IL CUI LIMITE PER $s \to t$ È $= 0$.

POICHÈ LA CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA IMPLICA LA CONVERGENZA IN PROBABILITÀ

$$P(|X_t - X_s| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[(X_t - X_s)^2\right] \qquad \text{PER ČEBYČEV}$$

ANDIAMO ORA A STUDIARE IL PROCESSO DI POISSON

$m(t) = E(X_t) = \lambda t$

$\Gamma(s,t) = E[X_s X_t] - m(t)m(s) = E(X_s^2) - E\left[(X_t - X_s)X_s\right] - m(s)m(t) =$ (INCR INDIP.)

$= \lambda s + \lambda^2 s^2 + \lambda(t-s)\lambda s - \lambda t \lambda s = \lambda s$

$\text{VAR}(X) + E(X)^2 = E(X^2)$

RISULTA CHE MEDIA E FZ COVARIANZA SONO CONTINUE $\Rightarrow X_t$ È CONTINUO IN MQ $\Rightarrow X_t$ È CONTINUO IN PROBABILITÀ.

INOLTRE VALE CHE: $P\left\{\omega \in \Omega : \lim_{s \to t} X_s(\omega) \neq X_t(\omega)\right\} = P\{\omega \in \Omega : T(\omega) = t\} = 0$

↙ AFFERMARE CHE LA TRAIETTORIA $X(\omega)$ NON È CONTINUA IN t $=$ t È UN TEMPO DI SALTO

↓ V.A. TEMPO DI SALTO $T \sim EXP(\lambda)$

$\Rightarrow$ UN TEMPO DI SALTO È UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ!

ALLORA X_t È QUASI CERTAMENTE COSTANTE

POICHÈ $P\{\lim_{s\to t} X_s = X_t\} = 1 \quad \forall t \geq 0$

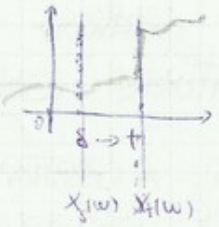
TUTTAVIA È IMPORTANTE OSSERVARE CHE QUESTA RELAZIONE NON IMPLICA CHE LE TRAIETTORIE DEL PROCESSO SIANO COSTANTI
(INFATTI LE TRAIETTORIE DEL PROCESSO DI POISSON NON SONO COSTANTI ~~~),

INFATTI: X_t QUASI CERTAMENTE COSTANTE SIGNIFICA:

$$P\{\omega \in \Omega : \underbrace{X_s(\omega)}_{\downarrow} \to X_t(\omega)\} = 1 \quad \forall t \geq 0$$

INSIEME DI TUTTI I POSSIBILI STATI AL VARIARE DI ω CON t FISSATO

(1) FISSO t, $\forall t$
(2) $\forall \omega$



POTREBBE ESISTERE UNA TRAIETTORIA $X_\omega(t)$ CON UN SALTO IN t !!

PER GARANTIRE CHE LE TRAIETTORIE DEL PROCESSO SIANO COSTANTI DOBBIAMO RICHIEDERE CHE

$$P\{\omega \in \Omega : \lim_{s\to t} X_s(\omega) = X_t(\omega) \quad \forall t \geq 0\} = 1$$

(1) FISSO ω, $\forall \omega$
(2) $\forall t$

OVVERO: DEF

UN PROCESSO (DEFINITO DALLE SUE DISTRIB. FINITO DIMENSIONALI) X_t HA TRAIETTORIE P-QUASI CERTAMENTE COSTANTI SE ∃ UNA SUA VERSIONE COSTANTE, OVVERO:

SE $\exists\, Y_t$ T.C. $P(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \geq 0$

(MODIFICAZIONE) → $\lim_{s\to t} Y_s(\omega) = Y_t(\omega) \quad \forall t \geq 0$.

DEF DIFFUSIONE

① $\underset{h\to 0^+}{\text{am}} \frac{1}{h} P(|X_h - X_0| \geq \varepsilon \mid X_0 = x) = 0$ → AGGIUNGIAMO TALE CONDIZIONE PER EVITARE CHE SI AMMETTANO SALTI COME IN POISS.

② $\underset{h\to 0^+}{\text{am}} \frac{1}{h} E[X_h - X_0 \mid X_0 = x] = \mu(x,t)$

$\underset{h\downarrow 0}{\text{am}} \frac{1}{h} P(|X_h - X_0| > \varepsilon \mid X(0) = x) = \lambda(t,x) > 0$

③ $\underset{h\to 0^+}{\text{am}} \frac{1}{h} E[(X_h - X_0)^2 \mid X_0 = x] = \sigma^2(x,t)$

DEF UN PROCESSO DI MARKOV CON PROPRIETÀ FORTE SI DICE STANDARD SE LE SUE TRAIETTORIE VERIFICANO

- X_t È CONTINUA A DESTRA $\forall s \geq 0$ $\underset{t\downarrow s}{\text{am}}$ $X(t) = X(s)$ $(t > s)$
- ESISTE IL LIMITE SINISTRO $\forall s > 0$ $\underset{t\uparrow s}{\text{am}}$ $X(t)$ ESISTE
- X_t È CONTINUA DA SINISTRA PER TEMPI DI MARKOV CHE CONVERGONO A T $\underset{n\to+\infty}{\text{am}}$ $X(T_n) = X(T)$

PROPRIETÀ

OGNI PROCESSO CON PROPRIETÀ DI MARKOV FORTE, CONTINUO IN PROBABILITÀ AMMETTE UNA VERSIONE (MODIFICAZIONE) STANDARD

TEOREMA DYNKIN: SIA $\{X(t), t \geq 0\}$ UN PROCESSO STANDARD: SE VALE LA CONDIZIONE DI DYNKIN

$$\underset{h\to 0^+}{\text{am}} \frac{1}{h} P(|X_h - X_0| \geq \varepsilon \mid X_0 = 0) = 0$$

UNIFORMEMENTE (CIOÈ $\forall x \in (\varrho, r)$, $\forall t \in [0,T]$) ALLORA IL PROCESSO (X_t) È UN PROCESSO DI DIFFUSIONE

LEMMA: SE PER UN PROCESSO STOCASTICO STANDARD SI HA:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E\left[|\Delta_h X(t)|^p \,\middle|\, X(t)=x \right] = 0$$

UNIFORMEMENTE IN x IN OGNI COMPATTO CONTENUTO IN (ℓ, r), E t IN OGNI INTERVALLO FINITO $[0,N]$
PER UN QUALCHE $p>2$ ALLORA VALE LA CONDIZIONE DI DYNKIN:

DIM

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P\left(|X(t+h) - X(t)| > \varepsilon \,\middle|\, X(t)=x \right) \le \lim_{h \downarrow 0} \frac{E\left[(\Delta_h X)^p \,|\, X(t)=x \right]}{h \varepsilon^p}$$

CARATTERIZZAZIONE STROOK - VARADHAN

SIA UN PROCESSO TEMPORALMENTE OMOGENEO, $\lambda > 0$.
CON DRIFT $\mu(x)$ E VARIANZA $\sigma^2(x)$ PER $\ell < x < r$.

CONSIDERIAMO IL PROCESSO STOCASTICO ($\forall \lambda$ REALE)

$$Y_\lambda(t) = \exp\left[\lambda X(t) - \lambda \int_0^t \mu(X(s))\,ds - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t \sigma^2(X(s))\,ds \right]$$

DEFINITA PER $t>0$. SOTTO CERTE PROPRIETA' DI REGOLARITA' E CONDIZIONI AL BORDO $\{Y_\lambda(t)\}$ COSTITUISCE UNA MARTINGALA RISPETTO ALLA FAMIGLIA DI $\mathcal{F}_t$ (σ ALGEBRA DETERMINATA DAL PROCESSO $X(\tau)$ FINO AL TEMPO t : $\{\mathcal{F}_t\} = \sigma(X_\tau, \tau \le t)$).

RICORDIAMO DEFINIZIONE DI MARTINGALA:

DATO LO SPAZIO DI PROBABILITA' $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ E UNA SUCCESSIONE DI σ-ALGEBRE $(\mathcal{F}_m)_{m \ge 0}$ T.C. $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_{m+1} \subset \mathcal{F}$ $\forall m \ge 0$

UNA SUCC. DI V.A. $(X_m)_{m \ge 0}$ È CHIAMATA MARTINGALA SE

1. $E\{|X_m|\} < \infty$ $\forall m$
2. X_m È $\mathcal{F}_m$-MISURABILE $\forall m$
3. $E\{X_m | \mathcal{F}_m\} = X_m$ A.S. $\forall m \le m$

V.A. $X_m : \Omega \to \mathbb{R}$
$X_m^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{F}$ PER DEF DI V.A., INOLTRE POICHÉ X_m $\mathcal{F}_m$ MISURABILE $X_m^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}$

E POSSIAMO DEF: $P|_{\mathcal{F}_m} : \mathcal{F}_m \to [0,1]$
↳ MISURA DI PROBABILITA'

PERTANTO PER VERIFICARE CHE $X(t)$ SIA UN PROCESSO DI DIFFUSIONE POSSO ANDARE A VERIFICARE CHE $Y_\lambda(t)$ SIA UNA MARTINGALA.

CARATTERIZZAZIONE DI TUTTE PROBABILITÀ DELLE DIFFUSIONI OMOGENEE/1

CONSIDERIAMO UN PROCESSO DI DIFFUSIONE CHE ABBIA COME SPAZIO DEGLI STATI IL SEGMENTO $(\rho, \pi) \in \mathbb{R}$.

ASSUMIAMO CHE IL PROCESSO SIA GOVERNATO DA UNA DENSITÀ DI TRANSIZIONE

AL TEMPO 0 $x(0)=x$, AL TEMPO t $x(t)=y$

$$p(t,x,y)\,dy \overset{DEF}{\sim} P\{y < X(t) \le y+dy \mid X(0)=x\}$$

$$p(t,x,y)=\frac{\partial}{\partial y} P(X(t)\le y \mid X(0)=x)$$

SCEGLIAMO 2π PUNTI ALL'INTERNO DELLO SPAZIO DEGLI STATI T.C. :

$$x_1 < x_2 < \dots < x_\pi \qquad y_1 < y_2 < \dots < y_\pi$$

E STUDIAMO IL DETERMINANTE

$$\det \|p(t,x_i,y_j)\| = \det \begin{Vmatrix} p(t,x_1,y_1) & p(t,x_1,y_2) & \cdots & p(t,x_1,y_\pi) \\ p(t,x_2,y_1) & p(t,x_2,y_2) & \cdots & p(t,x_2,y_\pi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(t,x_\pi,y_1) & \cdots & \cdots & p(t,x_\pi,y_\pi) \end{Vmatrix}$$

QUANDO $X(t)$ È UNA DIFFUSIONE MONO-DIMENSIONALE TALE QUANTITÀ (IL DET DELLA MATRICE $\|p(t,x_i,y_j)\|$) È SEMPRE (AL VARIARE DI π) POSITIVA.

CARATTERIZZAZIONE ATTRAVERSO EQUAZIONI DIFFERENZIALI STOCASTICHE

POSSIAMO DESCRIVERE L'INCREMENTO DI UN PROCESSO DI DIFFUSIONE (PENSIAMO AL MOTO DI PARTICELLE IN UN FLUIDO) NEL SEGUENTE MODO:

$$X(t+\Delta t) - X(t) \approx \underbrace{\mu(x,t)\Delta t}_{\text{PARTE DETERMINISTICA = NATURA FLUIDO}} + \underbrace{\sigma(x,t)\Delta B(t)}_{\text{VARIANZA ISTANT. ASSOCIATA ALLE COLLISIONI}}$$

$\mu(x,t)$: VELOCITÀ ISTANTANEA FLUIDO TEMPO t, POSIZIONE x

$\Delta B(t)$: PARTE ALEATORIA = COLLISIONI TRA PARTICELLE CASUALI BEN DESCRITTA DAL MOTO BROWNIANO $B(t)$

↓

FACENDO LIMITE $\Delta t \to 0$ DI TALE RELAZIONE OTTENIAMO

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu(x,t) + \sigma(x,t)\frac{dB(t)}{dt}$$

↓

ATTENZIONE A TALE SCRITTURA PERCHÉ IL MB BENCHÉ A.S. CONTINUO NON È DIFFERENZIABILE PER ALCUN t.

IL PROCESSO $\frac{dB(t)}{dt}$ È COMUNEMENTE CHIAMATO RUMORE BIANCO

ANDIAMO A STUDIARE LA CORRELAZIONE TRA GLI INCREMENTI SPAZIALI $\Delta_h B(t) = B(t+h) - B(t)$ e $\Delta_k B(s) = B(s+k) - B(s)$ SUI DI TEMPO DISGIUNTI

$(t, t+h)$, $(s, s+k)$ con $t+h \le s$, $h, k > 0$

$$E\left[\frac{\Delta_h B(t)}{h} \cdot \frac{\Delta_k B(t)}{k}\right] = 0$$ → INCREM DISGIUNTI = INDIPENDENTI DI MEDIA NULLA.

MENTRE

$$E\left[\left(\frac{\Delta_h B(t)}{h}\right)^2\right] = \frac{1}{h}$$ → $\mathrm{VAR}[\Delta_h B(t)] \overset{\text{def}}{=} \sigma^2 h$ (1 SE MB STANDARD)

QUINDI PASSANDO AL CONTINUO ($h \to 0$) OTTENIAMO

$$E\left[\frac{dB(t)}{dt} \cdot \frac{dB(s)}{ds}\right] = \begin{cases} 1/dt = \infty & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

CHE SIGNIFICA CHE IL PROCESSO A TEMPO CONTINUO $\frac{dB(t)}{dt}$ È COSTITUITO DA V.A. NEL CONTINUO, CIASCUNA ASSOCIATA AD UN PARAMETRO DI TEMPO t, CHE SONO TUTTE SCORRELATE.

ESEMPI DI DIFFUSIONI

MOTO BROWNIANO

SIA I L'INTERVALLO DI DIFFUSIONE. PROVIAMO CHE:

$\mu(x) = 0$

$\sigma^2(x) = \sigma^2$

$$E[\Delta_h X(t) \mid X(0) = x] \overset{\text{def}}{=} 0 \quad , \quad E[(\Delta_h X(t))^2 \mid X(0) = x] \overset{\text{def}}{=} \sigma^2 h$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E[\Delta_h X(t) \mid X(0) = 0] = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E[(\Delta_h X(t))^2 \mid X(0) = 0] = \frac{\sigma^2 h}{h} = \sigma^2$$

VERIFICHIAMO ORA CHE VALGA LA CONDIZIONE DI LYNDEBERG:

$$E[(\Delta_h x)^4 \mid X(0) = x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h}} \int_{-\infty}^{+\infty} v^4 \exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2 h}\right\} dv = \frac{\sigma^2 h}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h}} \int v^3 e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2 h}} \frac{v\,dv}{\sigma^2 h}$$

SIA $\frac{v^2}{2\sigma^2 h} = y$

$dy = \frac{2v}{2\sigma^2 h} dv$

$dv = \frac{\sigma^2 h}{v} dy = \frac{\sigma^2 h}{\sqrt{y 2\sigma^2 h}} dy = \sqrt{\frac{\sigma^2 h}{2y}} dy$

$$= \frac{2^4 \sigma^4 h^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{\sqrt{y}} e^{-y} dy = 3h^2\sigma^4$$

$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E\left[(\Delta_h X)^4 \mid X(0) = x \right] = 0$, VALE COND 2 DYNKIN

IL MB È UNA DIFFUSIONE.

ALTRI ESEMPI DI PROCESSI DI DIFFUSIONE

PROCESSO ORNSTEIN - UHLENBECK

$\mu(x) = -\alpha x$ $\qquad I = \mathbb{R}$ INTERVALLO DI DIFFUSIONE

$\sigma^2(x) = \sigma^2$ COSTANTE

$$dX_t = -\alpha X_t + \sigma^2 dB_t$$

PROCESSO DI FELLER

$\mu(x) = px + q$

$\sigma^2(x) = 2\pi x \qquad (\pi > 0)$

TEOREMA =

SE $\{X_t\}$ È UN PROCESSO DI DIFFUSIONE REGOLARE, SU $I_x = (e, \pi)$, SE g È UNA FUNZIONE CONTINUA, MONOTONA CON DERIVATA I e II CONTINUA $\forall x \in I \Rightarrow$ $g \in C^2(I_x)$

$Y_t = g(X(t))$ È UN PROCESSO DI DIFFUSIONE SU $(g(e), g(\pi))$ CON

$$\mu_Y(y) = \left. \frac{1}{2} \sigma^2(x) g''(x) + \mu(x) g'(x) \right|_{y = g(x)}$$

$$\sigma_Y^2(y) = \left. \sigma^2(x) g'(x)^2 \right|_{y = g(x)}$$

DIM:

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta x\, g'(x) + \frac{1}{2} g''(x) (\Delta x)^2 + \frac{1}{2}\left[g''(\xi) - g''(x) \right] (\Delta x)^2$$

(AGGIUNGO) (TOLGO)

SVILUPPO DI TAYLOR 1° ORDINE

$X_t = x$, $\Delta X_t = X_{t+h} - X_t$

$$g(X_{t+h}) = g(X_t) + g'(X_t) \Delta X_t + \frac{1}{2} g''(X_t) (\Delta X_t)^2 + \frac{1}{2}\left[\cdots \right] (\Delta X_t)^2$$

CONSIDERANDO IL VAL. MEDIO DI $g(X_{t+h}) - g(X_t)$, DIVIDENDO PER h E PASSANDO AL LIMITE $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} E\left[Y_{t+h} - Y_t \,\middle|\, Y_t = y\right] = \mu_x(x) g'(x)\Big|_{y=g(x)} + \frac{1}{2}\sigma_x^2(x) g''(x)\Big|_{y=g(x)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} E\left[\left(g''(\xi) - g''(X_t)\right)(\Delta X_t)^2 \,\middle|\, X_t = x\right]$$

$$\Rightarrow \mu_Y(y) = \mu_x(x) g'(x) + \frac{1}{2}\sigma_x^2(x) g''(x)\Big|_{y=g(x)}$$

ANALOGO PROCEDIMENTO PER $\sigma_Y^2(y)$.

MOTO BROWNIANO GEOMETRICO (MODELLI FINANZIARI - CRESCITA POPOLAZIONI)

SIA $\{X(t), t \geq 0\}$ UN MOTO BROWNIANO CON DRIFT μ E DIFFUSIONE σ^2
IL PROCESSO DEFINITO DA $Y(t) = e^{X(t)}$ È CHIAMATO MOTO BROWNIANO GEOMETRICO.

$I = (0, +\infty)$, SE CONSIDERIAMO I TEMPI $t_1 < t_2 \dots < t_m$

I TASSI: $\frac{Y(t_1)}{Y(t_0)} = e^{X_{t_1} - X_{t_0}}$, $\frac{Y(t_2)}{Y(t_1)} = e^{X_{t_2} - X_{t_1}}$, $\dots$, $\frac{Y(t_m)}{Y(t_{m-1})}$ SONO V.A. INDIPENDENTI

PERCHÉ "LE VARIAZIONI RELATIVE" SU INTERVALLI DISGIUNTI SONO INDIPENDENTI

SIA $y = g(x) = e^x$ ALLORA $g'(x) = g''(x) = y$ E QUINDI I PARAMETRI INFINITESIMALI PER IL MB GEOMETRICO SONO:

$$\mu_Y(y) = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) y$$
$$\sigma_Y^2(y) = \sigma^2 y^2$$

PROCESSO DI BESSEL

$$Y(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + \dots + X_m(t)^2}$$

TALE PROCESSO È DEFINITO COME LA DISTANZA EUCLIDEA DALL'ORIGINE DI UN MB m-DIMENSIONALE $X_t = (X_1(t), \dots, X_m(t))$

$$Z(t) = X_1(t)^2 + \dots + X_m(t)^2$$

DOVE $\{X_i(t), t \geq 0\}$ SONO MB STANDARD INDIPENDENTI

SIANO $X_i(t) = x_i$ $\quad i = 1, \dots, m$, SCRIVIAMO ALLORA:

$$X_i(t + \Delta t) = x_i + \Delta X_i \qquad Z(t + \Delta t) = z + \Delta Z$$

DOVE $z = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$

$$\Delta Z = Z(t+\Delta t) - Z = [X_1(t+\Delta t)^2] - X_1^2 + [X_2(t+\Delta t)^2] - X_2^2 + \dots + [X_m(t+\Delta t)^m] - X_m^2 =$$

$$= 2(X_1\Delta X_1 + \dots + X_m \Delta X_m) + \Delta X_1^2 + \dots + \Delta X_m^2 .$$

POICHÈ $\Delta X_1 - \Delta X_m$ SONO INDIPENDENTI E NORMALMENTE DISTRIBUITI CON MEDIA 0 E VARIANZA Δt, SEGUE CHE:

$$E[\Delta Z \mid Z(t)=z] = m\Delta t$$

$$E[(\Delta Z)^2 \mid Z(t)=z] = 4(X_1^2 + \dots X_m^2)\Delta t + \underbrace{o(\Delta t)}_{\text{SOMMA DEI TERMINI DELLA FORMA } (\Delta X_i)^4 \text{ O DI ORDINE SUPERIORE (DERIVA DA PROPR. DISTR NORMALE)}}$$
$$= 4Z\Delta t + o(\Delta t)$$

INOLTRE $E[(\Delta(Z))^4 \mid Z(t)=z] = O((\Delta t)^2)$

QUINDI È VERIFICATA LA CONDIZIONE DI LINDEBERG.

$\Rightarrow Z(t)$ È UN PROCESSO DI DIFFUSIONE DI PARAMETRI INFINITESIMALI

$$\mu(z) = m$$
$$\sigma^2(z) = 4z$$

ORA OTTENGO I COEFFICIENTI INFINITESIMALI DEL PROCESSO DI BESSEL

$$Y(t) = g(Z(t)) = \sqrt{Z(t)}$$

$$g'(z) = +\frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2y}$$

$$g''(z) = -\frac{1}{4} z^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4y^3}$$

APPLICANDO IL TEOREMA 1.11

$$\mu_Y(y) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\, g''(x) + \mu(x) g'(x)\Big|_{y=g(x)}$$
$$\sigma_Y^2(y) = \sigma^2(x)[g'(x)]^2\Big|_{y=g(x)}$$

OTTENIAMO
$$\begin{cases} \mu_Y(y) = \frac{1}{2}(4z)\left(-\frac{1}{4}z^{-\frac{3}{2}}\right) + m\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{z}} + m\frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{m-1}{2y} \\ \sigma_Y^2(y) = 4z\frac{1}{4z} = 1 \end{cases}$$

SE $m=1$ IL PROCESSO DI BESSEL CON $\mu_Y(y)=0$ E $\sigma_Y^2(y)=1$ PUÒ ESSERE IDENTIFICATO CON IL MB RIFLESSO.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ASSOCIATE A FUNZIONALI

ASSUMIAMO CHE $\{X(t),\ t\geq 0\}$ SIA UN PROCESSO DI DIFFUSIONE A TEMPO OMOGENEO CHE SODDISFI SEGUENTI CONDIZIONI:

(1) LO SPAZIO DEGLI STATI SIA UN INTERVALLO I DELLA FORMA
$[e,\tau]$, $(e,\tau]$, $[e,\tau)$, (e,τ) CON $-\infty \leq e < \tau \leq \infty$

(2) IL PROCESSO È REGOLARE ALL'INTERNO DI I, OVVERO
$$P\{T(y) < \infty \mid X(0)=x\} > 0 \qquad e<x,y<\tau$$
DOVE $T(y)$ È IL TEMPO DI PRIMO PASSAGGIO DEL PROCESSO NELLO STATO y.

(3) I PARAMETRI INFINITESIMALI DEL PROCESSO
$$\mu(x) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} E[(\Delta X) \mid X(0)=x] \qquad \text{DOVE } \Delta X = X(h)-X(0)$$
$$\sigma^2(x) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} E[(\Delta X)^2 \mid X(0)=x]$$
SONO FUNZIONI CONTINUE IN x E $\sigma^2(x)>0$, $e<x<\tau$.

SIANO a e b FISSATI T.C. $e<a<b<\tau$ E SIA
$T(y)=T_y$ IL TEMPO DI PRIMO PASSAGGIO IN y:

DEFINIAMO $T^* = T_{a,b} = \min\{T(a),T(b)\} = T(a)\wedge T(b)$
IL TEMPO DI PRIMO PASSAGGIO DEL PROCESSO IN a o b

ANDREMO A STUDIARE (3) PROBLEMI:

(A) CALCOLARE
$$u(x) = P\{T(b) < T(a) \mid X(0)=x\} \qquad a<x<b$$
OVVERO LA PROBABILITÀ CHE IL PROCESSO RAGGIUNGA PRIMA b DI a.

(B) CALCOLARE
$$v(x) = E[T^* \mid X(0)=x] \qquad a<x<b$$
OVVERO IL TEMPO MEDIO DI RAGGIUNGIMENTO DI a o b.

(C) DATA UNA FUNZIONE LIMITATA E CONTINUA g CALCOLARE
$$w(x) = E\left[\int_0^{T^*} g(X(s))\,ds \mid X(0)=x\right] \qquad a<x<b.$$

POICHÈ LE TRAIETTORIE DI UN PROCESSO DI DIFFUSIONE SONO CONTINUE L'INTEGRALE $A = \int_0^{T^*} g(X(s))\,ds$ È DEFINITO.

SE AD ESEMPIO $g(x)$ RAPPRESENTASSE "L'INTERESSE", "COSTO AGGIUNTIVO" CHE SI PRENDENTA QUANDO IL PROCESSO È NELLO STATO x, ALLORA A RAPPRESENTEREBBE L'INTERESSE TOTALE OTTENUTO FINCHÈ NON SI RAGGIUNGE LA BARRIERA a o b.
NOTIAMO CHE SE $g(x)=1 \ \forall x \to \int_0^{T^*} ds = T^*$

PERCIÒ IL PROBLEMA (2) È UN SOTTOCASO DEL PROBLEMA (3).

SOTTO LE CONDIZIONI 1-3 VISTE IN PRECEDENZA SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:
$V(x)$ e $W(x)$ SONO FINITE
$u(x)$, $V(x)$ e $W(x)$ HANNO DERIVATE PRIME E SECONDE FINITE:

TALI FZ SODDISFANO LE SEGUENTI EQUAZIONI DIFFERENZIALI:

(A) $$0 = \mu(x)\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2u}{dx^2} \qquad a<x<b, \quad u(a)=0, \ u(b)=1.$$

(B) $$-1 = \mu(x)\frac{dV}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2V}{dx^2} \qquad a<x<b, \quad V(a)=V(b)=0;$$

(C) $$-g(x) = \mu(x)\frac{dw}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2w}{dx^2}$$

CONSIDERIAMO IL PROBLEMA (A):
LE CONDIZIONI AL BORDO $u(a)=0$, $u(b)=1$ SONO OVVIE POICHÈ $u(x)$ È LA PROBABILITÀ DI RAGGIUNGERE b PRIMA DI a PARTENDO DA x.
ORA DATO $a<x<b$ CONSIDERIAMO UN INT DI TEMPO h SUFF. PICCOLO AFFINCHÈ LA PROB DI RAGGIUNGERE a o b IN UN TEMPO $<h$ SIA TRASCURABILE.
AL TEMPO h LA PROB DI RAGGIUNGERE b PRIMA DI a È $u(X(h))$.

$$u(x) = E\left[u(X(h)) \mid X(0)=x\right] + o(h)$$

↓ PROBABILITÀ TOTALI, CONDIZIONATO SULLA POSIZIONE DI PARTENZA. $X(0)=x$

$$\Delta X = X(h) - X(0) = X(h) - x$$

$u(X(h)) = u(x+\Delta X)$ ESPANDIAMO IN SERIE DI TAYLOR

$$= u(x) + \Delta X\, u'(x) + \frac{1}{2}(\Delta X)^2 u''(x) + o((\Delta X)^2)$$

POICHÈ $E[\Delta X \mid X(0)=x] = \mu(x)h + o(h)$

$E[(\Delta X)^2 \mid X(0)=x] = \beta^2(x)h + o(h)$

ABBIAMO

$$u(x) = E[u(X(h)) \mid X(0)=x] + o(h) =$$

$$= E[u(x+\Delta X) \mid X(0)=x] + o(h) =$$

$$= u(x) + E[\Delta X \mid X(0)=x] u'(x) + \frac{1}{2} E[(\Delta X)^2 \mid X(0)=x] u''(x) + o(h)$$

$$= u(x) + \mu(x)h u'(x) + \frac{1}{2}\beta^2(x)h u''(x) + o(h)$$

SOTTRAIAMO $u(x)$ DA CIASCUN MEMBRO E DIVIDIAMO PER h, POI $\lim h \to 0$

$$\boxed{0 = \mu(x)u'(x) + \frac{1}{2}\beta^2(x)u''(x)} \qquad a < x < b$$

CHE È L'EQ DIFF OTTENUTA AL PTO A.

CONSIDERIAMO ORA IL PROBLEMA (C).

LE CONDIZIONI AL CONTORNO $u(a) = u(b) = 0$ SONO CHIARE;

SCEGLIAMO UN INTERVALLO TEMPORALE h PICCOLO T.C. IL PROCESSO NON POSSA RAGGIUNGERE NÈ a NÈ b IN TALE INTERVALLO.

RICORDIAMO CHE $w(x) = E\left[\int_0^{T^*} g(X(s))\,ds \mid X(0)=x\right]$ — Controllo

POSSIAMO ESPRIMERE $w(x)$ COME SOMMA DI DUE CONTRIBUTI:

$$w(x) = E\left[\int_0^h g(X(s))\,ds \mid X(0)=x\right] + E\left[E\left[\int_h^{T^*} g(X(s))\,ds \mid X(h)=z\right] \middle| X(0)=x\right]$$

PROB TOTALI SU x

POICHÈ $X(t)$ È UNA DIFFUSIONE VALE PROPR. MARKOV, POICHÈ È TEMPOR OMOGENEO È SODDISFATTO.

AL VARIARE DI $a<x<b$

$$w(x) = E\left[\int_0^h g(X(s))\,ds \mid X(0)=x\right] + E\left[E\left[\int_0^{T^*} g(X(s))\,ds \mid X(0)=z\right] \middle| X(0)=x\right]$$

ANDIAMO MEGLIO

$$= E\left[\int_0^h g(X(s))\,ds \mid X(0)=x\right] + E\left[w(X(h)) \mid X(0)=x\right]$$

POICHÈ g CONTINUA E TRAIETT $X(s)$ CONTINUE

$$= g(x)h + o(h) + E[w(x+\Delta x) \mid X(0)=x]$$

?

$$w(x) = g(x)h + o(h) + w(x) + \mu(x)w'(x)h + \frac{1}{2}\sigma^2(x)w''(x)h + o(h)$$

SOTTRAGGO $w(x)$ DA ENTRAMBI I MEMBRI, DIVIDO PER h, e m $h \to 0$:

$$\boxed{0 = g(x) + \mu(x)w'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)w''(x)}$$

OTTENENDO COSÌ L'EQ DIFF. DEL PROBLEMA C

RIPORTIAMO ORA SULLE SOLUZIONI DEI 3 PROBLEMI :

ACCORDIAMO CHE $\sigma^2(x) > 0$, $e < x < \pi$

DEF $$s(x) = \exp\left\{-\int \frac{2\mu(\xi)}{\sigma^2(\xi)}\, d\xi\right\} \qquad e < x < \pi$$

DEF FUNZIONE DI SCALA DEL PROCESSO

$$\boxed{S(x) = \int s(\eta)\, d\eta = \int \exp\left\{-\int \frac{2\mu(\xi)}{\sigma^2(\xi)}\, d\xi\right\} d\eta} \qquad e < x < \pi$$

DENSITÀ DI VELOCITÀ

$$m(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)s(x)} \qquad e < x < \pi$$

MISURA DI VELOCITÀ

$$M(x) = \int m(\eta)\, d\eta \qquad e < x$$

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI A-C CONVOLGONO TUTTE L'OPERATORE DIFFERENZIALE L

DEF $$Lf(x) = \mu(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)$$ PER FZ $f(x) \in C^2((a,b))$

UN APPROCCIO PER RISOLVERE LE EQ. A-C È QUELLO DI ESPRIMERE L'OPERATORE L IN FUNZIONE DI SCALA E DI VELOCITÀ :

OSS CHE VALE LA RELAZIONE $\frac{s'(x)}{S(x)} = -\frac{2\mu(x)}{\sigma^2(x)}$

$$Lf(x) = \frac{\sigma^2(x)s(x)}{2}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{s(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{\sigma^2(x)s(x)}{2}\left(-\frac{s'(x)}{s(x)^2}\right)f'(x) + \frac{2\mu(x)}{\sigma^2(x)} + \frac{\sigma^2(x)s(x)}{2}\,\frac{1}{s(x)}\,f''(x)$$

SCRIVIAMO $S(x) = \frac{dS(x)}{dx}$

E $dM(x) = m(x)dx$

$$Lf(x) = \frac{d}{2m(x)dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\frac{dx}{dS(x)}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dM}\left(\frac{df(x)}{dS}\right)$$

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dm}\left(\frac{df(x)}{ds}\right)$$

RAPPRESENTAZIONE CANONICA DELL'OPERATORE DIFFERENZIALE INFINITESIMALE ASSOCIATO AL PROCESSO DI DIFFUSIONE

SOLUZIONE PROBLEMA A

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dm}\left(\frac{du(x)}{ds}\right) = 0 \qquad a < x < b \qquad u(a)=0,\ u(b)=1$$

$$\int \frac{d}{dm}\left(\frac{du(x)}{ds}\right) dm = 0$$

$$\frac{du(x)}{ds} = \beta \rightarrow \text{COST INTEGRAZIONE}$$

$$\int \frac{du(x)}{ds} ds = \int \beta\, ds$$

$$u(x) = \beta S(x) + \alpha \rightarrow \text{COST INTEGRAZIONE}$$

$$\begin{cases} u(a) = 0 = \beta S(a) + \alpha \\ u(b) = 1 = \beta S(b) + \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\beta S(a) \\ 1 = \beta S(b) - \beta S(a) = \beta(S(b)-S(a)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{S(a)}{S(b)-S(a)} = \dfrac{S(a)}{S(a)-S(b)} \\ \beta = \dfrac{1}{S(b)-S(a)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x) = \frac{S(x)}{S(b)-S(a)} + \frac{S(a)}{S(a)-S(b)} = \frac{S(x)-S(a)}{S(b)-S(a)}}$$

SOLUZIONE PROBLEMA A

OSS = P. 185 $S^*(x) = \alpha + \beta S(x) \rightarrow u(x)$ INVARIATO

POSSIAMO SCRIVERE $S(x)$ A MENO DI UNA FINALE MA NON DIPENDE DA ESSERE UNA DI INTEGRAZIONE (?)

OSS LA FZ DI SCALA PUÒ ESSERE UTILIZZATA PER RISCALARE LO SPAZIO DEGLI STATI (e, τ) IN BASE ALLA PROB DI ASSORBIMENTO NEGLI STATI

FISSIAMO x_0 COME PUNTO DI ORIGINE E DETERMINIAMO LA FZ DI SCALA ATTRAVERSO UNA TRASFORMAZIONE

COSTRUIAMO $Y(t) = S(X(t))$ SU $I = (S(r), S(e))$

POICHÉ S È STRETTAMENTE MONOTONA E $\in C^2$ (?) SU UNA INT $(0, +\infty)$?

ALLORA I PARAMETRI INFINITESIMALI DEL PROCESSO DIVENTANO

$$\mu_Y(y) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\underbrace{S''(x)}_{\left(-\frac{2\mu(x)}{\sigma^2(x)}\right)\exp[\,]} + \mu(x)\underbrace{S'(x)}_{\exp[\,]} = 0$$

$$\sigma^2_Y(y) = \sigma^2(x)\underbrace{[S'(x)]^2}_{\exp[\,]^2 = s^2(x)} = \sigma^2(x)s^2(x)$$

$S_y(y) = y$ o $S_y(y) = \alpha + \beta y$ $\alpha, \beta \neq 0$

UN PROCESSO $\{Y(t)\}$ LA CUI F2 DI SCALA È LINEARE È DETTO IN SCALA NATURALE O CANONICA

POICHÉ LA PROBABILITÀ =

$1 - P(T_b(y) < T_a(y) \mid Y(0) = y) =$

$1 - \left(\frac{y-a}{b-a}\right) = \frac{b-y}{b-a}$

$$P\{T_a(y) < T_b(y) \mid Y(0) = y\} = (b-y)/(b-a) \qquad a < y < b$$

È UNIFORME. (PROPORZIONALE ALL'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO ?)

PROCEDIAMO A RISOLVERE IL PROBLEMA C (IL PROBLEMA B È UN CASO PARTICOLARE DEL PROBLEMA C)

EQUAZIONE C : $-g(x) = \mu(x)\frac{dw}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2w}{dx^2}$ PER $a < x < b$

$w(a) = w(b) = 0$

PUÒ ESSERE RISCRITTA COME :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dM}\left(\frac{dw(x)}{dS(x)}\right) = -g(x) \qquad \text{PER } a < x < b, \quad w(a) = w(b) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dw(\eta)}{dS} = -2\int_a^\eta g(\xi)\,dM(\xi) + \beta = -2\int_a^\eta g(\xi)\,m(\xi)\,d\xi + \beta$$

$$\downarrow$$

$$w(x) = -2\int_a^x \left[\int_a^\eta g(\xi)m(\xi)d\xi\right] dS(\eta) + \beta[S(x) - S(a)] + \alpha$$

$w(a) = w(b) = 0$ IMPLICA CHE $w(a) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$w(b) = 0$

$$\beta = 2\int_a^b \left[\int_a^\eta g(\xi)m(\xi)d\xi\right] dS(\eta) \cdot \frac{1}{S(b) - S(a)}$$

UTILIZZANDO : $w(x) = 2\left\{\mu(x)\int_a^b \left[\int_a^\eta g(\xi)m(\xi)d\xi\right] dS(\eta) + \right.$

$t(x) = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}$

$$\left. - \int_a^x \left[\int_a^\eta g(\xi)m(\xi)d\xi\right] dS(\eta)\right\}$$

INFINE RUNGHEGGIANDO

$$w(x) = 2\left\{\mu(x)\int_a^b [--]\,dS(\eta) - (1 + \mu(x) - \mu(x))\int_a^x [--]\,dS(\eta)\right. =$$

$$2\left\{\mu(x)\int_x^b [--]\,dS(\eta) - (1 - \mu(x))\int_a^x [--]\,dS(\eta)\right. =$$

SOLUZIONE C

$$W(x) = 2\left\{ u(x) \int_x^b [S(b)-S(\xi)]\, m(\xi) g(\xi)\, d\xi + [1-u(x)] \int_a^x [S(\xi)-S(a)]\, m(\xi) g(\xi)\, d\xi \right\}$$

DA TALE SOLUZIONE RICAVIAMO LA SOLUZIONE DELL'EQ B PONENDO $g(\xi) = 1$

SOLUZIONE B

$$W(x) = 2\left\{ u(x) \int_x^b [S(b)-S(\xi)]\, m(\xi)\, d\xi + [1-u(x)] \int_a^x [S(\xi)-S(a)]\, m(\xi)\, d\xi \right\}$$

OSS: CONSIDERIAMO PER UN MOMENTO UN PROCESSO IN SCALA NATURALE $S(x)=x$, $S(x) = S'(x) = 1$

CALCOLIAMO IL TEMPO MEDIO DI USCITA DALL'INTERVALLO $(x-\xi, x+\xi)$ PARTENDO DA x.

INSERENDO I VALORI $a = x-K$, $b = x+K$, $u(x) = \frac{1}{2}$, $S(x) = x$ ALL'INTERNO DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA B OTTENIAMO

$$E\left[T_{x-K,x+K} \mid X(0) = x \right] = \int_x^{x+K} (x+K-\xi)\, m(\xi)\, d\xi + \int_{x-K}^{x} (\xi - x + K)\, m(\xi)\, d\xi$$

QUINDI

$$\lim_{K \downarrow 0} \frac{1}{K^2} E\left[T_{x-K,x+K} \mid X(0) = K \right] = \lim_{K \downarrow 0} \frac{1}{K^2} \int_x^{x+K} (x+K-\xi)\, m(\xi)\, d\xi + \lim_{K \downarrow 0} \frac{1}{K^2} \int_{x-K}^{x} (\xi - x + K)\, m(\xi)\, d\xi = m(x)$$

PERCHÉ LA DENSITÀ DI VELOCITÀ $m(x)$ PUÒ ESSERE INTERPRETATA COME LA VELOCITÀ DEL PROCESSO QUANDO PASSA ATTRAVERSO LO STATO x

EQUIVALENTEMENTE SE CONSIDERIAMO UN MB STANDARD CON SCALA NATURALE ALLORA LA QUANTITÀ $m(x) K^2$ RAPPRESENTA IL TEMPO MEDIO CHE IL PROCESSO SPENDE NELL'INT $(x-K, x+K)$ DATO $X(0) = x$

ESEMPI:

MOTO BROWNIANO STANDARD

$\{X(t), t \geq 0\}$ MB STANDARD

$\mu(x) = 0$
$\sigma^2(x) = 1$ PARAMETRI INFINITESIMALI

FA $S(x)$: $S(x) = \exp\left\{-2\int^x [\mu(\xi)/\sigma^2(\xi)]\, d\xi\right\} = 1$

FA MISURA DI SCALA $S(x) = x$

ALLORA $M(x)$ = PROB DI RAGGIUNGERE LO STATO b PRIMA DELLO STATO a PARTENDO DA x È

$M(x) = \frac{x-a}{b-a}$ $\qquad a \leq x \leq b$

LA DENSITÀ DI VELOCITÀ $m(\xi) = \frac{1}{S(\xi)} = 1$

$$V(x) = E\left[T_{a,b} \mid X(0)=x\right] = 2\left\{M(x)\int_x^b [S(b)-S(\xi)]\, m(\xi)\, d\xi + (1-M(x))\int_a^x S(\xi)-S(a)\, m(\xi)\right.$$

$$= 2\left\{\frac{x-a}{b-a}\int_x^b (\xi-a)\, d\xi + \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (\xi-a)\, d\xi\right\} =$$

$$= (x-a)(b-x)$$

MOTO BROWNIANO CON DRIFT

$\{X(t), t \geq 0\}$ MB CON DRIFT $\mu(x) = \mu$ e VARIANZA σ^2

$S(x) = \exp\{-2\mu x/\sigma^2\}$

$S(x) = A \exp\{-2\mu x/\sigma^2\} + B$ CON A e B COSTANTI

$$M(x) = \frac{e^{-2\mu x/\sigma^2} - e^{-2\mu a/\sigma^2}}{e^{-2\mu b/\sigma^2} - e^{-2\mu a/\sigma^2}}$$

SIA $\{X(t), t \geq 0\}$ PROCESSO DI DIFFUSIONE REGOLARE, A TEMPO OMOGENEO, SULL'INTERVALLO APERTO $I = (\rho, \tau)$

DEF $P(t,x,y) = P\{X(t) \leq y \mid X(0) = x\}$ FA DISTRIBUZIONE DI TRANSIZIONE DI $X(t)$

↓ SOGGETTA ALLA DISTRIBUZIONE INIZIALE

$$P(0,x,y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \leq y \\ 0 & \text{SE } x > y \end{cases}$$ → MASSA DI PROBABILITÀ CONCENTRATA IN x

ASSUMIAMO D'ORA IN POI CHE $P(t,x,y)$ DERIVI DA UNA DENSITÀ CONTINUA SU (ρ,τ) $\quad \frac{dP(t,x,y)}{dy} = p(t,x,y) \quad t > 0$

EQUAZIONE BACKWARD DI KOLMOGOROV

OBIETTIVO: DERIVARE EQ DIFF. PARZIALE PER LA FUNZIONE

$$u(t,x) = E[g(X(t)) \mid X(0) = x]$$ CON $g(x)$ LIMITATA E CONTINUA SU I

SOTTO CERTE CONDIZIONI LA FZ $u(t,x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE ALLE DERIVATE PARZIALI

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial u}{\partial x}} \quad (1)$$

CON LA CONDIZIONE INIZIALE $u(0+,x) = g(x)$ DOVE

$$u(0+,x) = \lim_{h \to 0} u(h,x)$$

L'ULTERIORE CONDIZIONE $\begin{cases} g(\eta) = 1 & \eta \leq y \\ g(\eta) = 0 & \eta > y \end{cases}$ $\quad E[g(X(t)) \mid X(0) = x] = P(X(t) \leq y \mid X(0))$

IMPLICA CHE LA FZ DISTRIBUZIONE DI TRANSIZIONE SIA $u(t,x) = P(t,x,y)$

IN QUESTO CASO L'EQUAZIONE (1) DETTA EQUAZIONE BACKWARD DI KOLMOGOROV DIVENTA

$$\frac{\partial P(t,x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 P(t,x,y)}{\partial^2 x} + \mu(x)\frac{\partial P(t,x,y)}{\partial x} \quad (2)$$

$t > 0$
$\rho < x < \tau$

CON CONDIZIONE INIZIALE $P(0+, x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \le y \\ 0 & \text{se } x > y \end{cases}$

ANCHE LA DENSITÀ DI TRANSIZIONE $p(t,x,y)$ SODDISFA L'EQ BACKWARD DI KOLMOGOROV

$$\frac{\partial p}{\partial t} = +\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \begin{matrix} t>0 \\ e\,x<r \end{matrix} \qquad (3)$$

DIMOSTRAZIONE CHE $u(t,x)$ SODDISFA $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial u}{\partial x}$

P. 215 KT 2

DIMOSTRIAMO ORA LA VALIDITÀ DELL'EQUAZIONE (3) RICCARDI P. 31-36

INTRODUCENDO LA NOTAZIONE:

$$f(y,t \mid x,t_0) = p(t-t_0, x, y)$$

POSSIAMO ESPRIMERE $f(x,t \mid x_0,t_0) = \int_I f(z,\tau \mid x_0,t_0)\, f(x,t \mid z,\tau)\, dz$

CON L'EQUAZIONE DETTA DI SMULOKOVSKY:

CONSIDERIAMO ORA:

- $f(x,t \mid x_0, t_0-\Delta t) = \int f(z,t_0 \mid x_0, t_0-\Delta t)\, f(x,t \mid z,t_0)\, dz$
- $f(x,t \mid x_0,t_0) = \int f(z,t_0 \mid x_0, t_0-\Delta t)\, f(x,t \mid x_0,t_0)\, dz$
- $f(x,t \mid x_0,t_0-\Delta t) - f(x,t \mid x_0,t_0) = \int f(z,t_0 \mid x_0,t-\Delta t)\left[f(x,t \mid z,t_0) - f(x,t \mid x_0,t_0)\right] dz$

↓ ESPANDO IN SERIE TAYLOR

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^m f(x,t \mid x_0,t_0)}{\partial x_0^m}\frac{1}{m!}\int f(z,t_0 \mid x_0, t_0-\Delta t)\,(y-x_0)^m dz$$

DIVIDENDO ENTRAMBI I MEMBRI PER $(-\Delta t)$ E PONENDO IL LIMITE $\Delta t \to 0$

$$\frac{\partial f(x,t \mid x_0,t_0)}{\partial t_0} = \ominus \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{A_m(x_0,t_0)}{m!}\,\frac{\partial^m f(x,t \mid x_0,t_0)}{\partial x_0^m}$$

EQUAZIONE BACKWARD

DOVE $A_m(x_0,t_0)$, $m=1,2\ldots$ SONO I MOMENTI INFINITESIMALI

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} = \ominus\mu(x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0} \ominus \frac{\sigma^2(x_0)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$$

EQUAZIONE BACKWARD CASO TEMPORALMENTE OMOGENEO

TALE EQUAZIONE PRENDE IL NOME DI BACKWARD POICHÈ DESCRIVE LO SVILUPPO DEL PROCESSO CHE PORTA AL RAGGIUNGIMENTO DI UNA POSIZIONE PREFISSATA NEL PRESENTE.

DIMOSTRIAMO LA VALIDITÀ DELL'EQUAZIONE FORWARD (FOKKER PLANK)

COME NEL CASO PRECEDENTE SCRIVIAMO, CON $t \to t+\Delta t$ Δt PICCOLO $\tau \to t$

$$f(x,t+\Delta t \mid x_0,t_0) - f(x,t \mid x_0,t_0) = \int f(x,t+\Delta t \mid y,t)\, f(y,t \mid x_0,t_0) - f(x,t \mid x_0,t_0)$$

CONSIDERIAMO ORA UNA FZ $R(x)$ TALE CHE $R(x) \to 0$ ($x \to e$, $x \to \tau$) $\quad \frac{d^n R}{dx^n} \to 0$

MOLTIPLICHIAMO L'EQ PRECEDENTE PER $\frac{R(x)}{\Delta t}$ E INTEGRIAMO SULLO SPAZIO DEGLI STATI I:

$$\int_I \frac{R(x)\, f(x,t+\Delta t \mid x_0,t_0) - f(x,t \mid x_0,t_0)}{\Delta t}\, dx = \frac{1}{\Delta t} \int \underbrace{R(x)dx} \int f(x,t+\Delta t \mid y,t) f(y,t \mid x_0,t_0)\, dy$$

$$- \frac{1}{\Delta t} \int R(x) f(x,t \mid x_0,t_0)\, dx$$

SOSTITUIAMO $R(x) = R(y) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^m R(y)}{dy^m} \frac{(x-y)^m}{m!}$

E FACCIAMO $\Delta t \to 0$:

$$\int_I R(x) \frac{\partial f}{\partial t}\, dx = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int R(y) f(y,t \mid x_0,t_0) dy \int f(x,t+\Delta t \mid y,t)\, dx +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \left[\frac{d^m R(y)}{dy^m} f(y,t \mid x_0,t_0) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x-y)^m f(x,t+\Delta t \mid y,t) dx \right] dy$$

$$- \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int R(x) f(x,t \mid x_0,t_0)\, dx$$

$$\to \int R(x) \frac{\partial f}{\partial t}\, dx = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \int \frac{d^m R(x)}{dx^m} f(x,t \mid x_0,t_0) A_m(x,t)\, dx \quad (*)$$

AVENDO UTILIZZATO LA CONDIZIONE DI NORMALIZZAZIONE $\int f(x,t+\Delta t \mid y,t)\, dx =$ E AVENDO POSTO

$$A_m(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int (y-x)^m f(y,t+\Delta t \mid x,t)\, dy \qquad m = 1,2,\dots$$

IL SECONDO MEMBRO DI $(*)$ INTEGRANDO PER PARTI DIVENTA:

$$\int \frac{d^m R(x)}{dx^m} f(x,t \mid x_0,t_0) A_m(x,t) dx = (-1)^m \int R(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left[A_m(x,t) f(x,t \mid x_0,t_0) \right] dx$$

OTTENIAMO DUNQUE :

$$\int R(x)dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} [A_m(x,t) f(x,t|x_0,t_0)] \right\} = 0$$

CONSIDERANDO L'ARBITRARIETA' DELLA FΣ $R(x)$ I TERMINI TRA PARENTESI $\{\}$ DEVONO ESSERE IDENTICAMENTE $= 0$

$$\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} [A_m(x,t) f(x,t|x_0,t_0)]$$

LE FΣ $A_m(x,t)$ SONO STATE DEFINITE IN PRECEDENZA E CORRISPONDONO AI MOMENTI INFINITESIMI.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x,t) f(x,t|x_0,t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} [\beta^2(x,t) f(x,t|x_0,t_0)]$$

ESEMPI:

MOTO BROWNIANO

SIA $\beta^2 = 2$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\qquad t > 0$

$-\infty < x < +\infty$

$f(x,t|x_0,t_0) \xrightarrow{t \to t_0} \delta(x - x_0)$

INTRODUCIAMO LE TRASFORMATE DI FOURIER

$$\varphi(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x,t) dx$$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \varphi(\lambda,t) d\lambda$$

CALCOLIAMO

$$\frac{\partial \varphi(\lambda,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \frac{\partial f}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx = e^{i\lambda x} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{+\infty}^{-\infty} - i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \frac{\partial f}{\partial x} dx = -\lambda^2 \varphi(\lambda,t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\lambda^2 \varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = -\lambda^2 dt$$

$\hookrightarrow \ln \varphi(\lambda,t) = -\lambda^2 t + H(\lambda)$

$\varphi(\lambda,t) = \Psi(\lambda) e^{-\lambda^2 t}$

APPLICHIAMO ORA LA TRASFORMATA ANCHE ALLA COND. INIZIALE:

$$\lim_{t\to t_0} \varphi(\lambda,t) = \lim_{t\to t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x,t|x_0,t_0)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\delta(x-x_0)\,dx = e^{i\lambda x_0}$$

$$\varphi(\lambda,t_0) = e^{i\lambda t_0} = \Psi(\lambda)\, e^{-\lambda^2 t_0} \Rightarrow \Psi(\lambda) = e^{i\lambda x_0 + \lambda^2 t_0}$$

$$\varphi(\lambda,t) = e^{i\lambda x_0 + \lambda^2 t_0 - \lambda^2 t} = e^{i\lambda x_0} e^{-\lambda^2(t-t_0)} \rightarrow \text{SE FACCIO L'ANTITRASF DOVRÒ OTTENERE } f(x,t|x_0,t_0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{8(t-t_0)}\right\}$$

MOTO BROWNIANO CON DRIFT

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f(x,t|x_0,t_0) \overset{t\to t_0}{\to} \delta(x-x_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} = \mu\frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$$

- CONSIDERIAMO ORA LE SEGUENTI TRASFORMAZIONI

$$\begin{cases} x_0' = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x-\mu t_0) \\ t_0' = t_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x-\mu t) \\ t' = t \end{cases}$$

IN QUESTO MODO SI CONSERVA LA MASSA PROBABILISTICA

$$f'(x',t'|x_0',t_0')\,dx = f(x,t|x_0,t_0)\,dx$$

E SI SEMPLIFICA L'EQUAZIONE

$$\frac{\partial f'}{\partial t_0'} = \frac{\partial^2 f'}{\partial x_0'^2}$$

CON $\lim_{t'\to t_0'} f'(x',t'|x_0',t_0') = \delta(x'-x_0')$

$$f(x,t|x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{[x-x_0-\mu(t-t_0)]^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right\}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x,t|x_0,t_0)\,dx = \begin{cases} 0 & \mu>0 \\ 1/2 & \mu=0 \\ 1 & \mu<0 \end{cases}$$

?

PROCESSO DI ORNSTEIN - UHLENBECK

$$\begin{cases} \mu(x) = -\frac{x}{\Theta} \\ \sigma^2(x) = \sigma^2 \end{cases}$$

$$dX(t) = -\frac{X(t)}{\Theta}dt + \sigma\, dW(t)$$

SE $\sigma = 0$ $\qquad \frac{dX(t)}{dt} = -\frac{X(t)}{\Theta}$

$$f(x_1,t|x_0,t_0) = \frac{\partial P(X(t)<x \mid X(t_0)=x_0)}{\partial x}$$

EQ FOKKER - PLANCK (FORWARD) ASSOCIATA AL PROCESSO

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\Theta} f\right) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \lim_{t\to t_0} f(x,t|x_0,t_0) = \delta(x-x_0) \end{cases}$$

USO TRASFORMATA DI FOURIER

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\Theta} f\right) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] e^{-i\lambda x}$$

$$\varphi(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\, e^{-i\lambda x} dx$$

$$\frac{\partial \varphi(\lambda,t)}{\partial t} = [\text{--}] \underset{\text{CALCOLI}}{=} -\frac{\lambda}{\Theta}\frac{\partial \varphi(\lambda,t)}{\partial \lambda} - \lambda^2\frac{\sigma^2}{2}\varphi(\lambda,t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\lambda}{\Theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = -\underbrace{\lambda^2\frac{\sigma^2}{2}\varphi}$$

USO METODO CARATTERISTICHE PER RISOLVERE TALE EQ. DIFF.

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\lambda}{\frac{\lambda}{\Theta}} = \frac{d\varphi}{-\lambda^2\frac{\sigma^2}{2}\varphi}$$

COEFF DI $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ $\qquad$ COEFF $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$

$$\begin{cases} dt = \frac{\Theta}{\lambda} d\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = k e^{t/\Theta} \quad \Rightarrow \quad k = \lambda e^{-t/\Theta} \\ \frac{\Theta}{\lambda} d\lambda = \frac{d\varphi}{\lambda^2 \varphi \sigma^2}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \lambda\, d\lambda = -\frac{2}{\Theta\sigma^2}\frac{d\varphi}{\varphi} \Rightarrow \log\varphi = -\frac{\lambda^2\Theta\sigma^2}{4} + H \\ \Rightarrow \varphi = \tilde{H} e^{-\frac{\lambda^2\Theta\sigma^2}{4}} \end{cases}$$

$\tilde{H} = \varphi\, e^{\frac{\lambda^2 \Theta \beta^2}{4}}$ PER IL METODO DELLE COSTANTI ARBITRARIE

$\tilde{H} = H(K)$?

$\varphi\, e^{\frac{\beta^2 \Theta \lambda^2}{4}} = H(\lambda e^{-t/\Theta})$

$\varphi(\lambda,t) = e^{-\frac{\beta^2 \Theta \lambda^2}{4}} H(\lambda e^{-t/\Theta})$

IMPONIAMO ORA LA CONDIZIONE INIZIALE

$$\varphi(\lambda,t_0) = \lim_{t\to t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x,t|x_0,0)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\,\delta(x-x_0)\,dx = e^{-i\lambda x_0}$$

IN DEFINITIVA RISULTA DUNQUE

$\varphi(\lambda,t) = e^{-\frac{\beta^2}{4}\Theta\lambda^2}\, e^{-i\lambda x_0}$

E ANTITRASFORMANDO

$$f(x,t|x_0,0) = \frac{1}{\sqrt{\pi\beta^2\Theta(1-e^{-t/\Theta})}} \exp\left\{-\frac{(x-x_0\,e^{-t/\Theta})^2}{\beta^2\Theta(1-e^{-2t/\Theta})}\right\}$$

UN ALTRO METODO CHE PUÒ ESSERE SEGUITO È QUELLO DI TRASFORMARE IL PROCESSO DI ORNSTEIN-UHLENBECK NEL PROCESSO DI WIENER OPERANDO I CAMBIAMENTI DI VARIABILE

$$\begin{cases} x_0' = \psi(x_0,t_0) = \sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t+t_0/\Theta}\, x_0 \\ t_0' = \varphi(t_0) = \frac{\Theta}{2}\, e^{2t_0/\Theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \psi(x,t) \\ t' = \varphi(t) \end{cases}$$

$f(x,t|x_0,t_0)\,dx = f'(x,t|x_0,t_0)\,dx'$

$f(x,t|x_0,t_0) = f'(x,t|x_0,t_0)\sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t/\Theta}$

$\frac{\partial f}{\partial t_0} = -\frac{x_0}{\Theta}\frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \overset{\psi,\varphi}{\Longrightarrow} \frac{\partial f'}{\partial t_0'} = \frac{\partial^2 f'}{\partial x_0'^2}$

$\frac{\partial f}{\partial t_0} = \sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t/\Theta}\frac{\partial f'}{\partial t_0} = \sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t/\Theta}\left[\frac{\partial f'}{\partial x_0'}\frac{\partial x_0'}{\partial t_0'} + \frac{\partial f'}{\partial t_0'}\frac{\partial t_0'}{\partial t_0'}\right]$

$= \sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t/\Theta}\left[\frac{\partial f'}{\partial x_0'}\frac{x_0'}{\Theta} + \frac{\partial f'}{\partial t_0'}\frac{2t_0'}{\Theta}\right]$

$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t/\Theta}\frac{\partial f'}{\partial x_0'}\frac{\partial x_0'}{\partial x_0} = \sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t/\Theta}\frac{\partial f'}{\partial x_0}\sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t_0/\Theta} = \sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t/\Theta}\frac{\partial f'}{\partial x_0}\frac{x_0'}{x_0}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = \sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t/\Theta}\sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t_0/\Theta}\frac{\partial^2 f'}{\partial x_0'^2}\sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t_0/\Theta}$

$= \sqrt{\frac{2}{\beta^2}}\, e^{t/\Theta}\frac{\partial^2 f'}{\partial x_0'^2}\frac{2}{\beta^2}\, e^{2t_0/\Theta}$

$$\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\, e^{t/\sigma}\left\{\frac{\partial f'}{\partial x_0'}\frac{x_0'}{\sigma} + \frac{\partial f'}{\partial t_0'}\frac{2t_0'}{\sigma} - \frac{x_0'}{\sigma}\frac{\partial f'}{\partial x_0'} + \frac{2t_0'}{\sigma}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_0^2}\right\} = 0$$

$$\frac{\partial f'}{\partial t_0'} = \frac{\partial^2 f'}{\partial x_0'}$$

TEOREMA = (ARTICOLO RICCIARDI) P. 186-188

SIANO $c_1(t)$ e $c_2(t)$ FZ ARBITRARIE, DIPENDENTI SOLO DAL TEMPO.
IL PROCESSO LA CUI DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE f

$$f(x,t|x_0,t_0) = \frac{\partial}{\partial x} P(X(t) \le x \mid X(t_0)=x_0)$$

È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI KOLMOGOROV (BACKWARD):

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + b(x_0,t_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_0} + a(x_0,t_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0$$

DOVE $$a(t,x) = \frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0} E[(\Delta X)^2 \mid X(t_0)=x_0] = \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)$$

$$b(t,x) = \lim_{\Delta t\to 0} E[\Delta x \mid X(t_0)=x_0] = \mu(t,x)$$

$$b(t,x) = \frac{a'(t,x)}{2} + \frac{[a(t,x)]^{1/2}}{2}\left\{c_1(t) + \int_z^x \frac{c_2(t)a(t,y) + a_t'(t,y)}{[a(t,y)]^{3/2}}\,dy\right\}$$

IN TAL CASO

$$\psi(x_0,t_0) = (k_1)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} c_2(\tau)d\tau\right\}\int_z^x \frac{1}{[a(t,y)]^{1/2}}\,dy - \frac{(k_1)^{1/2}}{2}\int_{t_2}^{t} c_1(\tau)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\tau} c_2(\sigma)d\sigma\right\}d\tau + k$$

$$= \psi(t_0) = k_1\int_{t_1}^{t}\exp\left[-\int_{t_0}^{\tau} c_2(\sigma)d\sigma\right]d\tau + k_3.$$

DOVE $z\in I$, $t_i\in[0,\infty)$, k_i° COSTANTI ARBITRARIE CON $k_1>0$.

DISTRIBUZIONI STAZIONARIE

$$W(y) = \int W(z)\, f(y,s|z)\,dz \qquad \forall s>0 \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} f(x,t|x_0,t_0) = W(x)$$

$W(y)$ SODDISFA: SI DIM P. 219-220 VOL 2

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(y)W(y)] - \frac{\partial}{\partial y}[\mu(y)W(y)] = 0 \quad (*)$$

STRUTTURA $f(y,s|z)$ DOVE EQ BACKWARD OTTENUTO (*)

INTEGRIAMO L'EQ PRECEDENTE

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}\left[\beta^2(y)W(y)\right] - \frac{d}{dy}\left[\mu(y)W(y)\right] = 0$$

E OTTENIAMO:

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{\beta^2(y)}{2}W(y)\right] - \mu(y)W(y) = \frac{1}{2}C_1 \qquad C_1 \text{ costante} \qquad (*)$$

MOLTIPLICHIAMO ORA PER IL FATTORE INTEGRANTE ENTRAMBI I MEMBRI:

$$\lambda(y) = \exp\left\{-\left[\int^y \frac{2\mu(\xi)}{\beta^2(\xi)}\,d\xi\right]\right\}$$

POSSIAMO RISCRIVERE L'EQ (*) NELLA FORMA COMPATTA:

$$\frac{d}{dy}\left[\lambda(y)\beta^2(y)\psi(y)\right] = C_1\lambda(y) \qquad \text{RIVEDERE}$$

INTEGRIAMO DI NUOVO E OTTENIAMO $\left(S(x) = \int^x \lambda(y)\,dy\right)$

$$\psi(x) = C_1\frac{S(x)}{\lambda(x)\beta^2(x)} + C_2\frac{1}{\lambda(x)\beta^2(x)} = m(x)\left[C_1 S(x) + C_2\right]$$

LE COSTANTI C_1 e C_2 DEVONO ESSERE TALI DA GARANTIRE LE CONDIZIONI:

1) $\int_e^r \psi(\xi)\,d\xi = 1$

2) $\psi(x) \geq 0$.

SE CIÒ È POSSIBILE ALLORA ESISTE UNA DENSITÀ STAZIONARIA, ALTRIMENTI NO.

ESEMPIO: NEL CASO DI ORNSTEIN-UHLENBECK

$$\beta^2(x) = \beta^2$$
$$\lambda(x) = e^{\frac{\gamma}{\beta^2}x^2} \qquad \gamma = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

ALLORA

$$\psi(x) = C_1\left(\int_0^x e^{\gamma\xi^2}\,d\xi\right)e^{-\gamma x^2} + C_2 e^{-\gamma x^2}$$

PERCHÉ?

AFFINCHÉ $\psi(x)$ SIA POSITIVA PER $|x| >> $ STABILIAMO $C_1 = 0$

SEGUE CHE LA DENSITÀ DEL PROCESSO DI O-U È $\psi(x) = Ce^{-\gamma x^2}$

STAZIONARIA E NORMALE.

KT2 p 226

BARRIERE (PROCESSI DIFFUSIONE REGOLARI)

SIA $\{X(t), t \geq 0\}$ UN PROCESSO DI DIFFUSIONE REGOLARE SU UN INTERVALLO $I = (e, \tau)$, CON $\mu(x)$ e $\sigma^2(x) > 0$ e CONTINUI (MOMENTI INFINITESIMALI)

CI CONCENTREREMO SULL'ESTREMO SINISTRO e (ESSENDO IDENTICO IL RAGIONAMENTO PER L'ESTREMO DESTRO)

L'APPROCCIO È QUELLO DI FAR CRESCERE IL VALORE DI a AL VALORE DI e NELLE QUANTITÀ:

$$\mu(x) = \mu_{a,b}(x) = P\{T_b < T_a \mid X(0) = x\} \qquad e < a < x < b < \tau$$

e

$$v(x) = v_{a,b}(x) = E\left[T_{a,b} \mid X(0) = x\right] \qquad e < a < x < b < \tau$$

DOVE T_a È IL TEMPO DI PRIMO PASSAGGIO DALLO STATO x E

$T_{a,b} = T_a \wedge T_b = \min\{T_a, T_b\}$.

RICHIAMIAMO LA F.D. SCALA $S(x)$ CON LA SUA ESPRESSIONE ESPLICITA

$$S(x) = \int_{x_0}^{x} s(\xi)\, d\xi \qquad s(\xi) = \exp\left\{-\int_{\xi_0}^{\xi} 2\frac{\mu(\eta)}{\sigma^2(\eta)}\, d\eta\right\}$$

CON x_0 e ξ_0 PTI ARBITRARI FISSATI $\in (e, \tau)$, LA SCELTA DI TALI PTI È IRRILEVANTE.

INTRODUCIAMO LA F.D. "MISURA DI SCALA" S PER SEMPLIFICARE L'ESPOSIZIONE:

$S[J]$ DI UN INTERVALLO CHIUSO $J = [c, d] \subset (e, \tau)$

$$S[J] = S[c, d] = S(d) - S(c)$$

PROPRIETÀ MISURA DI SCALA:

$$dS(x) = S[dx] = S[x, x+dx] = S(x+dx) - S(x) = dS(x) = s(x)dx$$

$$0 < S[c, d] < \infty$$

$$S[c, d] = S[c, x] + S[x, d] \qquad e < c < x < d < \tau$$

INTRODUCIAMO ANCHE LA FZ M "MISURA DI VELOCITÀ" INDOTTA DALLA DENSITÀ DI VELOCITÀ $m(x) = 1/\beta^2(x)\lambda(x)$ DOVE

$$M[J] = M[c,d] = \int_c^d m(x)\,dx \qquad J=[c,d] \subset (e,\tau)$$

$M[J]$ È POSITIVA e FINITA SU J.

RISCRIVIAMO ORA $u(x)$ e $v(x)$ IN TERMINI DI MISURA DI SCALA e VELOCITÀ:

SOL A

$$u(x) = u_{a,b}(x) = \frac{S[a,x]}{S[a,b]} \qquad e<a<x<b<\tau$$

VEDERE APPUNTI MIEI p. 14

$$v(x) = v_{a,b}(x) = 2\left\{u(x)\int_x^b S[\eta,b]\,dM(\eta) + [1-u(x)]\int_a^x S[a,\eta]\,dM(\eta)\right\}$$

SEGUE DALLA NON-NEGATIVITÀ DELLA MISURA S CHE $S[a,b]$ SIA MONOTONA IN a PER b FISSATO E CHE POSSIAMO DEFINIRE $S(e,b] \le \infty$ COME

$$S(e,b] = \lim_{a \downarrow e} S[a,b] \le \infty \qquad e<b<\tau$$

SE $[a,b] \subset (e,\tau)$ ALLORA $0 \le S[a,b] < \infty$; COME COROLLARIO DI CIÒ:

$S(e,b] = \infty$ PER QUALCHE b IN (e,τ) SE E SOLO SE

$S(e,b] = \infty \quad \forall b \in (e,\tau)$

IL VALORE DI $S(e,b]$ DIPENDE SOLO DAI PARAMETRI DEL PROCESSO ALL'INTERNO DELLO SPAZIO DEGLI STATI.

TORNIAMO AL TEMPO DI PRIMO PASSAGGIO ATTRAVERSO LO STATO e:
PER OGNI TRAIETTORIA $X(t)$ t.c. $X(0)=x$ IN $I=(a,b)$



IL TEMPO DI PRIMO PASSAGGIO T_a È UNA FZ NON DECRESCENTE IN a

POSSIAMO DEFINIRE

$$T_{e+} = \lim_{a \downarrow e} T_a \le \infty$$

SI DIMOSTRA CHE $T_{e+} = T_e \le \infty$. DIM p. 228

LEMMA (6.1)

I) SUPPONIAMO $S(\ell, x_0] < \infty$ PER QUALCHE $x_0 \in (\ell, r)$ ALLORA =
$P\{T_{e+} \le T_b \mid X(0) = x\} > 0 \quad \forall \quad \ell < x < b < r$

I) SUPPONIAMO $S(\ell, x_0] = \infty$ PER QUALCHE $x_0 \in (\ell, r)$ ALLORA =
$P\{T_{e+} < T_b \mid X(0) = x\} = 0 \quad \forall \quad \ell < x < b < r$

DEF (6.1)
UNA BARRIERA SI DICE ATTRATTIVA SE $S(\ell, x]$ È FINITO.

ESEMPIO = MOTO BROWNIANO STANDARD
$e = -\infty$ È NON ATTRATTIVA PERCHÉ
$S[a, x] = x - a$ e $S(-\infty, x] = \infty$

SE INVECE IL PROCESSO HA DRIFT $\mu = -\alpha < 0$ ALLORA
$S[a, x] = e^{2\alpha x} - e^{2\alpha a} \to e^{2\alpha x} < \infty$
QUANDO $a \to -\infty$
QUINDI $e = -\infty$ È UNA BARRIERA ATTRATTIVA PER UN MOTO BROWNIANO CON DRIFT NEGATIVO.

NB = UNA BARRIERA ATTRATTIVA NON DEVE PER FORZA APPARTENERE ALLO SPAZIO DEGLI STATI.
UNA BARRIERA ATTRATTIVA PUÒ NON ESSERE RAGGIUNTA IN TEMPO FINITO.

DEF: UNA BARRIERA SI DICE RAGGIUNGIBILE o ACCESSIBILE SE IL TEMPO MEDIO PER RAGGIUNGERLA È FINITO

QUANDO UNA BARRIERA È RAGGIUNGIBILE IN TEMPO MEDIO FINITO?

CONSIDERIAMO UNA BARRIERA ATTRATTIVA e T.C. $S(\ell, x] < \infty \ \forall x \in (\ell, r)$
PER IL LEMMA 6.1 LA BARRIERA e PUÒ ESSERE RAGGIUNTA PRIMA DI RAGGIUNGERE UNO STATO ARBITRARIO PARTENDO DA UNO STATO x INTERNO $(x < b)$ ALL'INTERVALLO (ℓ, r) CON PROBABILITÀ POSITIVA, NON NECESSARIAMENTE IN TEMPO FINITO.

ANDREMO A STUDIARE LA QUANTITÀ' CON b FISSATO $< r$
$\lim_{a \to e} E[T_a \wedge T_b \mid X(0) = x] = \lim_{a \to e} V_{a,b}(x)$
$x < b < r$

TALE QUANTITÀ RAPPRESENTA IL TEMPO DI PRIMO PASSAGGIO ATTESO PER IL RAGGIUNGIMENTO DELLA BARRIERA e O DELLO STATO b COMINCIANDO DALLO STATO x.

$$\underset{a\downarrow e}{\text{em}}\ v_{a,b}(x) = \underset{a\downarrow e}{\text{em}}\ 2\frac{S[a,x]}{S[a,b]}\int_x^b S[\xi,b]\,dM(\xi) + \underset{a\downarrow e}{\text{em}}\ 2\frac{S[x,b]}{S[a,b]}\int_a^x S[a,\xi]\,dM(\xi).$$

POICHÈ LA BARRIERA e È ATTRATTIVA RISULTA CHE $\underset{a\downarrow e}{\text{em}}\ \frac{S[a,x]}{S[a,b]}$ FINITO E POSITIVO COSÌ COME $\underset{a\downarrow e}{\text{em}}\ \frac{S[x,b]}{S[a,b]}$

SEGUE CHE

$$\underset{a\downarrow e}{\text{em}}\ E[T_a \wedge T_b \mid X(0)=x] = \underset{a\downarrow e}{\text{em}}\ v_{a,b}(x) < \infty$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underset{a\downarrow e}{\text{em}}\int_a^x S[a,\xi]\,dM(\xi) < \infty$$

DEFINIAMO ORA

$$\Sigma(e) = \underset{a\downarrow e}{\text{em}}\int_a^x S[a,\xi]\,dM(\xi) = \int_e^x S(e,\xi]\,dM(\xi) = \int_e^x \left(\int_e^{\xi} s(\eta)\,d\eta\right) m(\xi)\,d\xi$$

$$\Sigma(x,e)$$

$$= \int_e^x \left(\int_\eta^x m(\xi)\,d\xi\right) s(\eta)\,d\eta = \int_e^x M[\eta,x]\,ds(\eta)$$

DUNQUE IN TERMINI DI $\Sigma(e)$ POSSIAMO AFFERMARE CHE:

DEF LA BARRIERA e È:

I) RAGGIUNGIBILE SE $\Sigma(e) < \infty$

II) NON RAGGIUNGIBILE SE $\Sigma(e) = \infty$

NB = SE UNA BARRIERA È RAGGIUNGIBILE ALLORA È ATTRATTIVA
SE UNA BARRIERA È IRRAGGIUNGIBILE ALLORA PUÒ ESSERE ATTRATTIVA e/o/ NON ATTRATTIVA.

NB DRIFT $\Rightarrow$ $e = -\infty$ BARRIERA ATTRATTIVA NON RAGGIUNGIBILE: $\Sigma(e) = +\infty$.

LEMMA:

SIA e UNA BARRIERA ATTRATTIVA E SUPPONIAMO $e < x < b < r$

ALLORA LE SEGUENTI AFFERMAZIONI SONO EQUIVALENTI:

1. $P\{T_e < \infty \mid X(0) = x\} > 0$;
2. $E[T_e \wedge T_b \mid X(0) = x] < \infty$
3. $\Sigma(e) = \int_e^x S(e,h]\, dM(h) < \infty$



DEF: INTUITIVAMENTE IL SIGNIFICATO DI $\Sigma(e)$ È UNA MISURA DEL TEMPO CHE IL PROCESSO IMPIEGA A RAGGIUNGERE LA BARRIERA e O UNO STATO b ALTERNATIVO ALL'INTERNO PARTENDO DA $x < b$

INTRODUCIAMO ORA LE QUANTITÀ:

- $M(e,x] = \operatorname{lim}_{a \downarrow e} M[a,x]$
- $N(e) = \int_e^x S[h,x]\, dM(h) = \int_e^x M[e,\xi]\, dS(\xi)$

→ $M(e,x]$ MISURA LA VELOCITÀ DEL PROCESSO VICINO A e E

→ $N(e)$ MISURA IL TEMPO PER RAGGIUNGERE UN PTO INTERNO $x \in (e,r)$ PARTENDO DAL BORDO e

LEMMA 6.3

VALGONO LE SEGUENTI RELAZIONI TRA $S(e,x]$, $\Sigma(e)$, $N(e)$, $M(e,x]$.

1. $S(e,x] = \infty \Rightarrow \Sigma(e) = \infty$
2. $\Sigma(e) < \infty \Rightarrow S(e,x] < \infty$
3. $M(e,x] = \infty \Rightarrow N(e) = \infty$
4. $N(e) < \infty \Rightarrow M(e,x] < \infty$
5. $\Sigma(e) + N(e) = S(e,x]\, M(e,x]$

SOLO POSSIBILI 16 COMBINAZIONI PER I VALORI FINITI O INFINITI DELLE 4 QUANTITÀ $S(e,x]$, $\Sigma(e)$, $N(e)$, $M(e,x]$

MA SOLO 6 VERIFICANO LE CONDIZIONI DEL LEMMA 6.3 :

$S(e,x]$	$M(e,x]$	$\Sigma(e)$	$N(e)$	FELLER		RUSSI	
$< \infty^*$	$< \infty^*$	$< \infty$	$< \infty$	REG		ATT	RAGG
$< \infty$	$= \infty^*$	$< \infty^*$	$= \infty$	USCITA			
$< \infty^*$	$= \infty^*$	$= \infty^*$	$= \infty$	N	ATT NONRAGG		
$= \infty^*$	$< \infty^*$	$= \infty$	$= \infty^*$		N	NONATT	NONRAGG
$= \infty^*$	$= \infty^*$	$= \infty$	$= \infty$				
$= \infty^*$	$< \infty$	$= \infty$	$< \infty^*$	E			

LEGENDA: { REG = REGOLARE, ATT = ATTRATTIVA, N = NATURALE, E = ENTRATA, RAGG = RAGGIUNGIBILE, U = USCITA.

SIGNIFICATO BARRIERE =

- BARRIERA REGOLARE

UN PROCESSO DI DIFFUSIONE PUÒ SIA ENTRARE CHE USCIRE DA UNA BARRIERA REGOLARE.

PER CARATTERIZZARE IL PROCESSO BISOGNA STUDIARE IL COMPORTAMENTO DELLA BARRIERA ASSEGNANDO UNA VELOCITÀ' $M\{e\}$ ALLA BARRIERA e;

IL COMPORTAMENTO PUÒ VARIARE DA : ASSORBIMENTO $= M\{e\} = \infty$

A : RIFLESSIONE $= M\{e\} = 0$

SE $0 < M\{e\} < \infty$: "STICKY BARRIER", OVVERO UNA BARRIERA SU CUI IL PROCESSO SPENDE UNA QUANTITÀ DI TEMPO POSITIVA:

TALE QUANTITÀ NON È UN INTERVALLO E NON È DESCRIVIBILE IN MANIERA ELEMENTARE

PER STABILIRE CHE UNA BARRIERA È REGOLARE CONTROLLIAMO :

$S(e,x] < \infty$ e $M(e,x] < \infty$

BARRIERA D'USCITA

IN UNA BARRIERA D'USCITA DOBBIAMO AVERE

$$\lim_{b \downarrow e} \lim_{x \downarrow e} P\{T_b < t \mid X(0) = x\} = 0 \quad \forall t > 0$$

PERCHÉ PARTENDO DA e (DA x CHE TENDE A e) È IMPOSSIBILE RAGGIUNGERE ALCUN STATO b ALL'INTERNO, PER QUANTO b SIA VICINO AD e.

PER STABILIRE CHE UNA BARRIERA È D'USCITA VERIFICHIAMO CHE $\Sigma(e) < \infty$ e $M(e,x] = \infty$.

BARRIERE D'ENTRATA

UNA BARRIERA D'ENTRATA NON PUO' ESSERE RAGGIUNTA DA ALCUNO STATO ALL'INTERNO DELLO SPAZIO DEGLI STATI, MA È POSSIBILE CONSIDERARE IL PROCESSO AVENTE ORIGINE DA TALE BARRIERA.

PER DIM CHE LA BARRIERA È D'ENTRATA VERIFICARE CHE: $S(\rho, x] = \infty$
$N(\rho) < \infty$

BARRIERA NATURALE (FELLER)

UNA TALE BARRIERA NON PUO' NÉ ESSERE RAGGIUNTA IN TEMPO MEDIO FINITO NÉ DARE ORIGINE AD UN PROCESSO = LA BARRIERA NATURALE È OMESSA DALLO SPAZIO DEGLI STATI CHE QUINDI AVRÀ FORMA (ρ, r) o $(\rho, r]$.

PER DIM CHE LA BARRIERA È NATURALE VERIFICARE CHE $\Sigma(\rho) = \infty$, $N(\rho) = \infty$.

CRITERI PER BARRIERA SUPERIORE rC p. 236 KT2.

Ej MB STANDARD.

SCHEMA UTILE PER STUDIARE BARRIERE: (SIROVICH)

