STATISTICA DEI PROCESSI STOCASTICI – (3.1)

- <u>Def 3.1</u> Un processo stocastico $\{X(t)\}$ è una famiglia di v.a. indicizzate dal simbolo t, dove t appartiene ad un dato insieme di indici T.
- <u>Def 3.2</u>
  - $\{X(t)\}$ è continuo se t assume valori in un intervallo
  - $\{X(t)\}$ è discreto " discreti.
- <u>Par 3.1.1</u> Se ad ogni evento $\omega \in \Omega$ corrisponde una realizzazione, allora essa può essere denotata come $X(t,\omega)$. La ω viene però usualmente omessa, così come si scrive $X(\omega)$ anzichè X.
- <u>Par 3.1.2</u> Fissato t, $X(t)$ possiede una distribuzione di probabilità, che può essere discreta o continua, <u>indipendentemente</u> dal fatto che X sia discreto o continuo come processo stocastico. Nel secondo caso, sotto opportune ipotesi, esisterà una funzione densità di probabilità $f_t(x)$.
  - Volendo studiare il processo nella sua interezza, ci servirà osservare la variazione congiunta dei valori in diversi punti temporali, ovvero la distribuzione congiunta $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$. Essa però non può essere ricavata facendo unicamente uso delle distribuzioni marginali.
  - Ancora più in generale, per studiare il processo in tutti i valori temporali, servono un numero infinito di v.a., a meno che t sia discreto e finito
  - Si cercherà pertanto di restringere l'attenzione ad un numero finito di punti temporali, considerando che sotto opportune condizioni generali è sufficiente per specificare le proprietà probabilistiche di tutto il processo.
- <u>Th 3.1</u> Per ogni n, sia $t_1, \dots, t_n$ un insieme di valori temporali. Allora sotto condizioni generali la struttura probabilistica di $\{X(t)\}$ è completamente specificata data la distribuzione congiunta delle $\{X(t_i)\}$ per ogni valore di n ed ogni scelta di $t_1, \dots, t_n$.

(3.2) - PROCESSI STAZIONARI

- Se le proprietà statistiche non cambiano nel tempo, ~~ovvero~~ ~~$X(t_1) \sim X(t_2) \quad \forall\, t_1, t_2 \in T$~~, il processo si dice stazionario.
- In tal caso:
  - $X(t_1) \sim X(t_2) \qquad \forall\, t_1, t_2 \in T$
  - $\{X(t_1), X(t_1+k)\} \sim \{X(t_2), X(t_2+k)\} \qquad \forall\, t_1, t_2, k \in T$

(Def 3.2.1) - $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\} \sim \{X(t_1+k), \dots, X(t_n+k)\} \qquad \forall\, t_1, \dots, t_n, k \in T$

ovvero $F_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X(t_1+k), \dots, X(t_n+k)}(x_1, \dots, x_n)$

- Si parla anche di stazionarietà completa.
  Questo poiché solitamente si tratta di una condizione molto forte, nel momento in cui invece può essere spesso utile considerarne una meno restrittiva.
- Def 3.2.2 $\{X(t)\}$ è stazionario fino all'ordine m se:

$$E[\{X(t_1)\}^{m_1} \cdot \dots \cdot \{X(t_n)\}^{m_n}] = E[\{X(t_1+k)\}^{m_1} \cdot \dots \cdot \{X(t_n+k)\}^{m_n}]$$

per ogni $t_1, \dots, t_n$, ogni k, e ogni $m_1 + \dots + m_n \leq m$, supposto naturalmente che i momenti in questione esistano.

- Casi particolari: $m_2 = \dots = m_n = 0 \qquad E[\{X(t)\}^{m_1}] = E[\{X(0)\}^{m_1}] = c$

  $m_3 = \dots = m_n = 0 \qquad E[\{X(t)\}^{m_1} \cdot \{X(s)\}^{m_2}] = E[\{X(0)\}^{m_1} \cdot \{X(s-t)\}^{m_2}] = f(s-t)$
- Ordini: $m = 1 \qquad E[X(t)] = \mu$, costante indipendente da t.

  $m = 2$ (i) $E[X(t)] = \mu \qquad (m_1 = 1, \ m_2 = 0)$

  (ii) $E[X^2(t)] = \mu_2' \qquad (m_1 = 2, \ m_2 = 0)$

  $Var\{X(t)\} = \mu_2' - \mu = \sigma^2$

  indipendenti da t

  (iii) $E[X(t)\,X(s)] = f(t-s) \qquad (m_1 = 1, \ m_2 = 1)$

  $Cov\{X(t), X(s)\} = E[X(t)\,X(s)] - \mu^2 = g(t-s)$

Dunque possiede
- stessa media ad ogni t;
- " varianza " ;
- la covarianza tra i tempi s e t dipende solo dalla loro differenza e non dalla posizione assoluta dei due.

(3.3) - AUTOCOVARIANZA E AUTOCORRELAZIONE

Sia $\{X(t)\}$ processo stazionario di ordine 2. Definiamo:

- autocovarianza : $R(\tau) := cov\{X(t), X(t+\tau)\} = E[\{X(t)-\mu\}\{X(t+\tau)-\mu\}]$
- autocorrelazione : $\rho(\tau) := R(\tau) / R(0)$

ben definite in funzione delle proprietà derivanti dalla 2-stazionarietà. Queste due quantità rappresentano rispettivamente la covarianza e il coefficiente di correlazione tra coppie di valori di $\{X(t)\}$ separate da un intervallo di lunghezza τ.

Proprietà (3.3.1):

- $R(0) = \sigma^2$
- $|R(\tau)| \leq R(0)$
- $R(-\tau) = R(\tau)$

- $\rho(0) = 1$
- $|\rho(\tau)| \leq 1$
- $\rho(-\tau) = \rho(\tau)$

Proprietà (3.3.2) - semipositività:

<u>Th 3.2.2</u> $R(\tau)$ è semidefinita positiva, ovvero per ogni insieme t_i di tempi e z_i di reali vale:

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} R(t_r - t_s)\, z_r z_s \geq 0$$

Infatti si tratta della varianza di $W := \sum_{r=1}^{n} z_r \cdot X(t_r)$

Analogamente, $\rho(\tau)$ lo è, poiché $R(0) > 0$.

(3.4) - PROCESSI STAZIONARI ED EVOLUZIONARI

Dividiamo i processi stocastici in:

(a) processi stazionari almeno fino all'ordine 2; sono detti debolmente stazionari o anche stazionari, pure se va evitata confusione con la stazionarietà completa; in ogni caso, d'ora in poi come stazionari verranno indicati tali processi. Comprendono i processi stazionari fino agli ordini superiori a 2, e quelli completamente stazionari, a patto che gli opportuni momenti congiunti esistano. Descrivono sistemi stabili nel tempo.

(b) altri processi, che descrivono sistemi in evoluzione.

Un processo gaussiano, ovvero per cui la congiunta di ogni insieme $\{X(t_i)\}_i$ è normale multivariata, è tale per cui stazionarietà implica s. completa, poiché completamente determinato dai primi due momenti.

(3.5) - MODELLI A PARAMETRO DISCRETO

- Processo puramente casuale o rumore bianco:
  - $\{X_t\}$ è tale se, $\forall s \neq t$, $cov\{X_s, X_t\} = 0$
  - È stazionario se $E[X_t] = \mu$, $E[(X_t - \mu)^2] = \sigma^2$, $\forall t$, μ, σ^2 ind. da t.
  - $R(s) = \sigma^2 \cdot \delta_{0,s}$ $\quad$ • $\rho(s) = \delta_{0,s}$
  - Viene indicato con ε_t; in seguito, ci si riferirà a p.p.c. stazionari quando si parlerà semplicemente di p.p.c.
- Processo AR(k)
  - $\{X_t\}$ è tale se $X_t + a_1 \cdot X_{t-1} + \dots + a_k \cdot X_{t-k} = \varepsilon_t$
  - Definito B come $BX_t := X_{t-1}$, possiamo scrivere $\alpha(B)X_t = \varepsilon_t$, dove $\alpha(z) = 1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_k z^k$
  - Soluzione di tali condizioni è $X_t = f(t) + \alpha^{-1}(B) \cdot \varepsilon_t$, dove $f(t)$ è soluzione dell'omogenea associata $\alpha(B) \cdot X_t = 0$
  - Non si ha stazionarietà, ma se $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$, si può parlare di stazionarietà asintotica, ovvero tendenza per t grande.
  - Poiché $f(t) = A_1 \mu_1^t + A_2 \mu_2^t + \dots + A_k \mu_k^t = \sum_{i=1}^{k} A_i \mu_i^t$, dove le $\{\mu_i\}$ sono le radici di $g(z) = z^k + a_1 \cdot z^{k-1} + \dots + a_k$ si ha stazionarietà asintotica se e soltanto se $|\mu_j| < 1$, ovvero se le radici di $\alpha(z)$, λ_j, sono tali per cui $|\lambda_j| > 1$, in quanto ordinate opportunamente $\lambda_j = \frac{1}{\mu_j}$ per ogni j.
  - Ricordando che $\alpha(B) = \prod_{i=1}^{k} (1 - \mu_i B)$, sotto l'ipotesi di radici distinte possiamo scrivere $X_t = \alpha^{-1}(B) \cdot \varepsilon_k = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{k_i}{1 - \mu_i B} \right) \varepsilon_t$.
  - In caso di stazionarietà (si intende asintotica), ogni termine di Σ è funzione di $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots$; $X_t = \sum_{s=0}^{+\infty} k_s \cdot \varepsilon_{t-s}$
  - Se inoltre $E[\varepsilon_t] = 0$, allora $\sum_{h=0}^{k} a_h \cdot \rho(m-h) = 0$ per $m \geq k$. Questa eq. è detta di Yule - Walker e permette noti i valori di $\rho(l)$, $l = 0:k-1$, di calcolarseli tutti.
  - Se $g(z)$ ha radici distinte, $\rho(r) = \sum_{i=1}^{k} B_i \mu_i^{|r|}$, $B_i = \phi_i(\{\rho(l)\}_l)$
  - μ_i reali $\Rightarrow$ $\rho(r) \to 0$ esponenzialmente
  - $\exists\, \mu_i$ complesse $\Rightarrow$ " con andamenti oscillanti
  - Casi di non stazionarietà:
    - $\forall i$, $|\mu_i| > 1$: $X_t = \sum_{s=0}^{\infty} k_s \cdot \varepsilon_{t+s}$
    - $\exists\, i \,/\, |\mu_i| > 1$, $\exists\, j \,/\, |\mu_j| < 1$: $X_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} k_s \cdot \varepsilon_{t+s}$
    - $\exists\, i \,/\, |\mu_i| = 1$: non esiste espansione

(3.5) - MODELLI A PARAMETRO DISCRETO - 2

- Casi particolari
  - Processo AR(1)
    - $\{X_t\}$ soddisfa $X_t = a \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$; $a_1 = -a$, $a_2 = \dots = a_k = 0$
    - $\alpha(z) = 1 + a_1 z = 1 - az$
    - $f(t) = A \cdot a^t$
    - $\alpha^{-1}(B) \cdot \varepsilon_t = (1-aB)^{-1} \cdot \varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} a^s B^s \cdot \varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} a^s \cdot \varepsilon_{t-s}$
    - $X_t = f(t) + \alpha^{-1}(B) \cdot \varepsilon_t = A \cdot a^t + \sum_{s=0}^{\infty} a^s \cdot \varepsilon_{t-s}$
    - Stazionarietà asintotica: $\lambda_1 = \frac{1}{a}$; $|\lambda_1| > 1 \iff |a| < 1$

      In tal caso $X_t = \sum_{s=0}^{\infty} a^s \cdot \varepsilon_{t-s}$ lo descrive completamente
    - A si determina con la condizione iniziale su X_0 ;

      se per esempio $X_0 = 0 = A \cdot a^0 + \sum_{s=0}^{\infty} a_s \cdot \varepsilon_{-s}$, allora

      $A = -\sum_{s=0}^{\infty} a_s \cdot \varepsilon_{-s}$
  - Processo AR(2)
    - $\{X_t\}$ soddisfa $X_t + a_1 \cdot X_{t-1} + a_2 \cdot X_{t-2} = \varepsilon_t$; $a_3 = \dots = a_k = 0$
    - $\alpha(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2$
    - $f(t) = A_1 \cdot \mu_1^t + A_2 \cdot \mu_2^t \qquad \mu_1 \neq \mu_2$
    - $\alpha^{-1}(B) \cdot \varepsilon_t = \frac{1}{(1-\mu_1 B)(1-\mu_2 B)} \varepsilon_t = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{1-\mu_1 B} - \frac{\mu_2}{1-\mu_2 B} \right) \varepsilon_t$

      $= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\sum_{s=0}^{\infty} (\mu_1^{s+1} - \mu_2^{s+1}) B^s \right) \varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mu_1^{s+1} - \mu_2^{s+1}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \varepsilon_{t-s}$
    - $X_t = A_1 \cdot \mu_1^t + A_2 \cdot \mu_2^t + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mu_1^{s+1} - \mu_2^{s+1}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \varepsilon_{t-s}$
    - Stazionarietà asintotica per $|\mu_1| < 1$, $|\mu_2| < 1$,

      osservando che in questo caso $g(z) = z^2 + a_1 z + a_2$

      In tal caso la sol. particolare vista prima è stazionaria.
    - Affinché tali condizioni siano verificate, distinguiamo:
      - $a_2 \geq \frac{1}{4} a_1^2$ (radici complesse o coincidenti)

        In tal caso $|\mu_1| = |\mu_2| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_1^2 - (a_1^2 - 4a_2)} = \sqrt{a_2}$

        Dunque condizione sufficiente e necessaria è che $a_2 < 1$.
      - $a_2 < \frac{1}{4} a_1^2$ (radici reali distinte)

        Poiché $f(z)$ è minimo quando $z = -a_1/2$, deve essere:
        - $-1 < -\frac{a_1}{2} < 1 \implies |a_1| < 2$
        - $f(1) > 0 \implies 1 + a_1 + a_2 = 0 \implies a_1 + a_2 > -1$
        - $f(-1) > 0 \implies 1 - a_1 + a_2 = 0 \implies a_1 - a_2 < 1$

- Studio di varianza, autocovarianza, autocorrelazione

Operiamo nelle ipotesi di stazionarietà asintotica.

- $X_{t-r} = \varepsilon_{t-r}$ + f. lineare di $\{\varepsilon_{t-s}\,;\, s > r\}$ della sol. particolare di X_t
- $E[X_{t-r} \cdot \varepsilon_t] = 0$, $r \geq 1$, poiché $\{\varepsilon_t\}$ sequenza di incorrelate a media 0.
- $E[X_t \cdot \varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2$ $(r=0)$ "
- Dalla definizione di AR(2) si moltiplica per X_{t-r} e si prendono le attese:

$$E[X_t \cdot X_{t-r}] + a_1 \cdot E[X_{t-1} \cdot X_{t-r}] + a_2 \cdot E[X_{t-2} \cdot X_{t-r}] = E[\varepsilon_t \cdot X_{t-r}]$$

- Passando alle autocovarianze, sostituendo in r, e in virtù di quanto prima:

$$R(r) + a_1 \cdot R(|r-1|) + a_2 \cdot R(|r-2|) = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \delta_{0,r} \qquad r \geq 0$$

- Dividendo per $R(0) = \sigma_x^2$, separando in r:

$$\sigma_x^2 \cdot \{\rho(0) + a_1 \cdot \rho(1) + a_2 \cdot \rho(2)\} = \sigma_\varepsilon^2 \qquad r = 0$$

$$\rho(r) + a_1 \cdot \rho(|r-1|) + a_2 \cdot \rho(|r-2|) = 0 \qquad r \geq 1$$

- di cui sono particolarmente significativi i casi $r=1$, $r=2$:

$$\rho(1) + a_1 \cdot \rho(0) + a_2 \cdot \rho(1) = 0$$

$$\rho(2) + a_1 \cdot \rho(1) + a_2 \cdot \rho(0) = 0$$

- Poiché $\rho(0) = 1$, da essi si ricavano $\rho(1), \rho(2), \sigma_x^2$.

Non si tratta altro che delle eq. di Yule-Walker per $k = 2$; la dimostrazione del caso generale segue questa falsariga.

- $\rho(r) = B_1 \cdot \mu_1^r + B_2 \cdot \mu_2^r = \dfrac{(1-\mu_2^2)\mu_1^{r+1} - (1-\mu_1^2)\mu_2^{r+1}}{(\mu_1 - \mu_2)(1+\mu_1\mu_2)} \qquad r \geq 0$

determinando B_1, B_2 attraverso $\rho(0), \rho(1)$.

- A seconda dei valori di a_1, a_2, si ha un dato comportamento:
  - radici reali: $a_2 \leq \frac{a_1^2}{4}$
    - $a_1 < 0$, $a_2 > 0 \Rightarrow \mu_1 > 0, \mu_2 > 0 \Rightarrow \rho(r)$ decade lentamente
    - $a_1 > 0$, $a_2 > 0 \Rightarrow \mu_1 < 0, \mu_2 < 0$
    - $a_2 < 0 \Rightarrow \mu_1 \mu_2 < 0$

    $\Rightarrow \rho(r)$ decade alternandosi
  - radici complesse: $a_2 > \frac{a_1^2}{4}$
    - $\mu_1 = \sqrt{a_2} \cdot \exp(i\delta)$ $\qquad \mu_2 = \sqrt{a_2} \cdot \exp(-i\delta)$

      con $\cos\delta = -\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_2}}$
    - $\rho(r) = a_2^{r/2} \cdot \dfrac{\sin(r\delta + \psi)}{\sin\psi}$

      con $\tan\psi = \dfrac{1+a_2}{1-a_2} \tan\delta$

      si ha decadenza exp a 0 con "periodicità" $\dfrac{2\pi}{\delta}$

- Processo MA(ℓ)
  - $\{X_t\}$ è tale se $X_t = b_0 \cdot \varepsilon_t + b_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \dots + b_\ell \cdot \varepsilon_{t-\ell} = \sum_{k=0}^{\ell} b_i \cdot \varepsilon_{t-i}$
  - Si scrive $X_t = \beta(B) \cdot \varepsilon_t$, dove $\beta(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_\ell z^\ell = \sum_{i=0}^{\ell} b_i \cdot z^i$
  - Senza perdita di generalità si può supporre $b_0 = 1$, oppure $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ (non entrambe), operando nel caso su uno tra:
    - $\varepsilon_t^* = b_0 \cdot \varepsilon_t$
    - $\varepsilon_t^{**} = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_\varepsilon}$
  - Valgono i seguenti risultati sulle statistiche.
    - (i) $\sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2 (b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_\ell^2) = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{i=0}^{\ell} b_i^2$
    - (ii) nell'ipotesi in cui $E[\varepsilon_t] = 0$ (che implica $E[X_t] = 0$)

$$\rho(r) = \frac{E[X_t \cdot X_{t-r}]}{\sigma_X^2} = \begin{cases} (\sigma_\varepsilon^2 / \sigma_X^2)(b_r b_0 + b_{r+1} b_1 + \dots + b_\ell b_{\ell-r}) & 0 \le r \le \ell \\ 0 & r > \ell \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{s=r}^{\ell} b_s b_{s-r} \Big/ \sum_{s=0}^{\ell} b_s^2 & 0 \le r \le \ell \\ 0 & r > \ell \end{cases}$$

- Come ordine, si prende usualmente il più grande che abbia ρ fuori dall'intervallo di confidenza.
- Caso particolare è quello in cui $b_0 = \dots = b_\ell = \frac{1}{\ell+1}$
  In tal caso $\sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\ell+1}$, $\rho(r) = \begin{cases} 1 - \frac{|r|}{\ell+1} & |r| \le \ell \\ 0 & |r| > \ell \end{cases}$

- Osserviamo la differenza tra AR e MA:
  - AR = $\alpha(B) \cdot X_t = \varepsilon_t$
    - X_t è c.l. di ε_t e dei valori passati di $\{X_t\}$
    - ε_t influenza X_t e tutti i valori futuri
  - MA = $X_t = \beta(B) \cdot \varepsilon_t$
    - X_t è c.l. di ε_t e dei suoi valori passati
    - ε_t influenza X_t e un numero finito di valori futuri, precisamente $X_{t+1}, \dots, X_{t+\ell}$ se il modello è MA(ℓ)

- Considerazioni complementari su AR(1)
  - Procedendo in maniera simile a quanto visto con AR(2), assumiamo che $\{X_t\}$ sia stazionario. Valgono ancora:
    - $X_{t-r} = \varepsilon_{t-r} + f.$ lineare di $\{\varepsilon_{t-s};\ s > r\}$
    - $E[X_{t-r} \cdot \varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \delta_{0,r}$
    - Dalla definizione di AR(1) si moltiplica per X_{t-r} e si prendono le attese
      $$E[X_t \cdot X_{t-r}] = a \cdot E[X_{t-1} \cdot X_{t-r}] + E[\varepsilon_t \cdot X_{t-r}]$$
    - Passando alle autocovarianze, sostituendo in r:
      $$R(r) = a \cdot R(|r-1|) + \sigma_\varepsilon^2 \cdot \delta_{0,r}$$
      $$= a \cdot R(r-1) \quad \text{per } r \geq 1$$
    - da cui dividendo per $R(0)$ si giunge alle autocorrelazioni:
      $$\rho(r) = a \cdot \rho(r-1) = a^2 \cdot \rho(r-2) = \dots = a^r \cdot \rho(0) = a^r \quad r \geq 0$$
      $$= a^{|r|} \quad r \text{ qualunque}$$
    - Per $r = 0$ invece si ottiene:
      $$R(0) = a \cdot R(1) + \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 / (1-a^2)$$
  - Per dimostrare invece la regione di stazionarietà ($X_0 = 0$):
    - $X_t = \varepsilon_t + a \cdot X_{t-1} = \varepsilon_t + a \cdot (\varepsilon_{t-1} + a \cdot X_{t-2}) = \dots = \varepsilon_t + a \cdot \varepsilon_{t-1} + \dots + a^{t-1} \cdot \varepsilon_1$
    - Se, $\forall t$, $E[\varepsilon_t] = \mu_\varepsilon$:
      $$E[X_t] = \mu_\varepsilon (1 + a + a^2 + \dots + a^{t-1}) = \begin{cases} \mu_\varepsilon \left(\frac{1-a^t}{1-a}\right) & a \neq 1 \\ \mu_\varepsilon t & a = 1 \end{cases}$$
      dove, se $|a| < 1$, $E[X_t] \sim \mu_\varepsilon / (1-a)$ per t grande.
      Ciò prova la stazionarietà asintotica di ordine 1.
    - Assumiamo ora $\mu_\varepsilon = 0$, e diamo varianza e covarianza
      - $var(\varepsilon_t) = E[\varepsilon_t^2] = \sigma_\varepsilon^2$ $\quad$ - $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0 \quad s \neq t$

      Allora
      $$\sigma_X^2 = var\{X_t\} = E[\varepsilon_t + a \cdot \varepsilon_{t-1} + \dots + a^{t-1} \cdot \varepsilon_1]^2$$
      $$= \sigma_\varepsilon^2 (1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2t-2})$$
      $$= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{1-a^{2t}}{1-a^2}\right) & |a| \neq 1 \xrightarrow{t \to \infty} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-a^2} \quad |a| < 1 \\ \sigma_\varepsilon^2 \cdot t & |a| = 1 \end{cases}$$
      $$E[X_t \cdot X_{t+r}] = E[\{\varepsilon_t + a \cdot \varepsilon_{t-1} + \dots + a^{t-1} \cdot \varepsilon_1\}\{\varepsilon_{t+r} + a \cdot \varepsilon_{t+r-1} + \dots + a^{t+r-1} \cdot \varepsilon_1\}]$$
      $$= \sigma_\varepsilon^2 (a^r + a^{r+2} + \dots + a^{r+2(t-1)})$$
      $$= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \cdot a^r \cdot \left(\frac{1-a^{2t}}{1-a^2}\right) & |a| \neq 1 \xrightarrow{t \to \infty} \frac{\sigma_\varepsilon^2 \cdot a^r}{1-a^2} \quad |a| < 1 \\ \sigma_\varepsilon^2 \cdot t & |a| = 1 \end{cases}$$

      che prova la stazionarietà asintotica di ordine 2.

6) MODELLI MISTI: AUTOREGRESSIVI A MEDIA MOBILE

<u>Def.</u> $\{X_t\}$ è detto modello autoregressivo a media mobile di ordine (k, ℓ): ARMA (k,ℓ) se:

$$X_t + a_1 \cdot X_{t-1} + \dots + a_k \cdot X_{t-k} = b_0 \cdot \varepsilon_t + \dots + b_\ell \cdot \varepsilon_{t-\ell}$$

dove $\{\varepsilon_t\}$ è un processo puramente casuale, e $(a_1, \dots, a_k ; b_0, \dots, b_\ell)$ sono costanti.

- Possiamo, senza perdita di generalità, $b_0 = 1$ imporre.
- Con l'operatore B, possiamo scrivere: $\alpha(B) \cdot X_t = \beta(B) \cdot \varepsilon_t$
- Ponendo $z_t = \beta(B) \cdot \varepsilon_t$, si può interpretare il modello ARMA (k,ℓ) come un modello AR(k); analogo ragionamento può essere svolto per interpretarlo come modello MA(ℓ). Si noti inoltre che ARMA$(k,0) =$ AR(k) e ARMA$(0,\ell) =$ MA(ℓ) senza necessità di sostituire alcunché.
- Se i coefficienti $(a_1, \dots, a_k ; b_1, \dots, b_\ell)$ soddisfano le condizioni di stazionarietà, la soluzione stazionaria è:

$$X_t = \alpha^{-1}(B) \cdot \beta(B) \cdot \varepsilon_t$$

- Equazione alle differenze per $\rho(r)$

$$\rho(m) + a_1 \cdot \rho(m-1) + \dots + a_k \cdot \rho(m-k) = 0 \qquad m \geq \max(k, \ell+1) = p$$

La differenza dal caso AR sta nei valori iniziali:

AR(k): $\rho(0), \rho(1), \dots, \rho(k-1)$

~~ARMA(k,l): $\rho(p), \rho(p+1), \dots, \rho(p+k-1)$~~

ARMA(k,ℓ): $\rho(p-k), \rho(p-k+1), \dots, \rho(p-1)$

- Se supponiamo di usare AR su di un ARMA(k,ℓ) senza sostituzioni, con $k, \ell \geq 1$, otteniamo:

$$\beta^{-1}(B)\, \alpha(B)\, X_t = \varepsilon_t \implies \text{AR}(\infty)$$

Si ottiene dunque un modello di ordine infinito; stesso discorso nel caso MA.

7) PROCESSI LINEARI GENERALI

In questo caso il numero di parametri non è necessariamente finito; sono meno utili nel caso pratico in quanto la stima di un numero infinito di parametri può non essere un procedimento agevole

<u>Def.</u> $\{X_t\}$ è processo generale lineare se può essere espresso come:

$$X_t = \sum_{v=0}^{\infty} g_v \varepsilon_{t-v}$$

dove
- $\{\varepsilon_t\}$ processo puramente casuale
- $\{g_v\}$ costanti tali per cui $\sum_{v=0}^{\infty} g_v^2 < \infty$

Varranno:

- $\sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{v=0}^{\infty} g_v^2 < \infty$
- Autocorrelazione:

$$X_t = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} g_v \varepsilon_{t-v} \qquad g_v = 0 \quad v < 0$$

$$E[\varepsilon_t] = 0 \Rightarrow E[X_t] = 0$$

$$R(r) = E[X_t X_{t-r}] = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{v=-\infty}^{+\infty} g_v g_{v-r}$$

$$\rho(r) = \frac{\sum g_v g_{v-r}}{\sum g_v^2}$$

- Condizione di stazionarietà:

$$\sum g_v^2 < \infty \Rightarrow \sigma_X^2 < \infty$$

$$|Cov(X_t, X_{t+r})| \leq \sqrt{\underbrace{V(X_t)}_{\sigma_X^2} \cdot \underbrace{V(X_{t-r})}_{\sigma_X^2}} = \sigma_X^2 < \infty$$

$$\Rightarrow R(r) < \infty$$

Il processo lineare generale è stazionario se e solo se $\sum_{v=0}^{\infty} g_v^2 < \infty$

- Consideriamo $G(z) = \sum_{v=0}^{\infty} g_v z^v$

Allora $\sum_{v=0}^{\infty} g_v^2 < \infty \Rightarrow G(v)$ è fz. analitica per $|z| < 1$.

$\Rightarrow X(t) = G(B) \cdot \varepsilon_t$ è stazionario se $G(z) < \infty \quad |z| < 1$

LEGAME TRA MGL E AR. MA

MGL $\Rightarrow$ MA(∞), ma contiene anche i modelli AR.

- Se $g_u = a^u \nabla u \Rightarrow X_t = \sum_{u=0}^{\infty} a^u \varepsilon_{t-u}$ AR(1)
- Se $g_u = \frac{u_1^{u+1} - u_2^{u+2}}{u_1 - u_2} \Rightarrow$ AR(2)
- Se $g_u = \begin{cases} b_u & u \le \ell \\ 0 & u > \ell \end{cases} \Rightarrow$ MA(ℓ)

Abbiamo già visto che MA(ℓ) $\equiv$ AR(∞) ; AR(k) $\equiv$ MA(∞).

Consideriamo MA(ℓ) : $X_t = \beta(B) \cdot \varepsilon_t$; $\beta(z)$ è polinomio di ordine ℓ

$\beta^{-1}(B) X_t = \varepsilon_t$ esp. β^{-1} ha ordine ∞.

CONDIZIONI DI INVERTIBILITÀ

Il ~~processo~~ modello MA non è univocamente definito. ~~Possiamo~~

Possiamo pertanto prendere, per comodità, quello invertibile.

$X_t = G(B) \varepsilon_t$

$G^{-1}(B) X_t = \varepsilon_t$ X_t ha rappresentazione di tipo AR.

se $G^{-1}(z) = \sum_{u=0}^{\infty} h_u z^u$ con $\sum_{u=0}^{\infty} |h_u| < \infty$, cioè se

$G^{-1}(z)$ è analitico nel cerchio unitario.

Il modello $X_t = G(B) \cdot \varepsilon_t$ è pertanto invertibile se $G^{-1}(z) < \infty$, $|z| < 1$.

<u>Oss.</u> MA(ℓ) $G(z) = \beta(z)$

$X_t = \beta(B) \cdot \varepsilon_t$

<u>Es.</u> MA(1)

$X_t = \varepsilon_t + b \cdot \varepsilon_{t-1}$

$X_t = \varepsilon_t + \frac{1}{b} \cdot \varepsilon_{t-1}$

$\rho(r) = \begin{cases} \frac{b}{1+b^2} & r = 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}$

Si sceglie il modello invertibile, che ipotizzando $|b| < 1$, è quello con coefficiente b.

In generale si fattorizza $\beta(z) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i z)$.

Ogni operatore di MA del tipo $\prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i B)$ dà luogo alla stessa autocovarianza.

CONDIZIONI DI STAZIONARIETÀ.

AR(k) : $G(z) \equiv \alpha^{-1}(z)$

$G(z) < \infty$ $|z| < 1$ $\Big\} \Rightarrow$ radici di $\alpha(z)$ fuori dal cerchio unitario

MA(k) : $G(z) \equiv \beta(z)$

$G(z) < \infty$ $|z| < 1$ sempre verificata poiché polinomio

ARMA(k, ℓ) : $G(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$

$G(z) < \infty$ $|z| < 1$ radici di $\alpha(z)$ fuori dal cerchio unitario

Per invertire il modello $G^{-1}(z) < \infty$ $|z| < 1$,

ovvero le radici di $\beta(z)$ cadono fuori dal cerchio unitario

8) PROCESSO ARMONICO

<u>Def.</u> $\{X_t\}$ è detto processo armonico se:

$$X_t = \sum_{i=1}^{k} A_i \cdot \cos(w_i t + \phi_i)$$

dove $\{A_i\}$, k, $\{w_i\}$ sono costanti

e $\{\phi_i\}$ sono v.a. indip $\sim U[-\pi, \pi]$

$$X_t = \sum_{i=1}^{k} A_i' \cdot \cos(w_i t) + B_i' \cdot \sin(w_i t)$$

$$A_i' = A_i \cdot \cos \vartheta$$

$$B_i' = A_i \cdot \sin \vartheta$$

Sotto le ipotesi su ϕ_i, X_t è stazionario.

<u>Dim.</u> $E[X_t] = 0$

$$R(r) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{A_i^2}{2}\right) \cdot \cos(w_i r)$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{A^2}{2}$$

$$\rho(r) = \frac{\sum A_i^2 \cdot \cos(w_i r)}{\sum A_i^2}$$

<u>Es.</u> $k = 1$

$X_t = A \cdot \cos(wt + \phi)$ $\quad \phi \sim U[-\pi, \pi]$ $\quad E[X_t] = 0$

$R(r) = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(wr) \Rightarrow \rho(r) = \cos(wr)$

MODELLI A PARAMETRO CONTINUO

1) <u>Processo puramente casuale</u> (rumore bianco)

Proviamo a definirlo come estensione del processo discreto.

$\{\varepsilon(t)\}$ sarebbe un processo tale che $\forall$ sottoinsieme di tempi $t_1, t_2, \dots, t_n$ $\forall n \in [0,\infty)$,

$\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2), \dots, \varepsilon(t_n)$ sono v.a. scorrelate.

Supponiamo che $E[\varepsilon(t)] = 0$, $V[\varepsilon(t)] = \sigma_\varepsilon^2$ $\forall t$

$$R_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \rho(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases}$$

Dunque, $\forall \Delta t$, t e $t+\Delta t$ sono scorrelate

$\{\varepsilon(t)\}$ si trova ad essere un processo altamente degenere.

<u>Es.</u> U = v.a. c. lineare di valori di $\{\varepsilon(t)\}$

$$U = \int_a^b g(t)\, \varepsilon(t)\, dt$$

$$E[U] = 0$$

$$V(U) = \int_a^b \int_a^b g(u) \cdot g(v) \cdot \underbrace{Cov(\varepsilon(u), \varepsilon(v))}_{= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & u = v \\ 0 & u \neq v \end{cases}} du\, dv$$

$$\overset{\shortparallel}{E[U^2]} = E[(\int\ )^2] = E[\int \dots du \int \dots dv]$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \iint g(u) g(v) \underbrace{\rho(u,v)}_{\begin{cases} 1 & u = v \\ 0 & u \neq v \end{cases}} du\, dv$$

$$= 0 \quad \text{se} \quad \sigma_\varepsilon^2 < \infty$$

Se $\sigma_\varepsilon^2 < \infty$, $\{\varepsilon(t)\}$ assume sempre il valore 0 con prob. 1

Non si riescono a costruire modelli tipo AR a meno che $\sigma_\varepsilon^2 \not< \infty$

Se $\sigma_\varepsilon^2 = \infty$, $R(\tau) = \delta(\tau)$

2) Modello AR(1)

Discreto — Continuo

$X_t - a \cdot X_{t-1} = \varepsilon_t$ equazione alle differenze $\Longrightarrow$ equazione differenziale

$X_n - a \cdot X_{n-1} = Y_n$ $\{Y_n\}$ processo puramente casuale di varianza σ_Y^2

$X_n(1-a) + a(X_n - X_{n-1}) = Y_n$

$\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$

$\Delta X_n + \frac{1-a}{a} X_n = \frac{Y_n}{a}$

Si cerchino di far tendere a 0 gli intervalli di tempo tra le osservazioni successive, per poi arrivare alla formulazione continua.

Δt = tempo tra osservazioni successive

$t = n \cdot \Delta t$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta X_n}{\Delta t} + \frac{1-a}{a \cdot \Delta t} X_n = \frac{Y_n}{a \cdot \Delta t} \qquad (*)$$

Poniamo $\alpha = \frac{1-a}{a \cdot \Delta t}$, $\varepsilon(t) = \frac{Y_n}{a \cdot \Delta t}$ $\Delta t \to 0$

(*) diventa : $\dot{X}(t) + \alpha \cdot X(t) = \varepsilon(t)$

che costituisce il modello autoregressivo di ordine 1 continuo.

In alternativa si scrive $dX(t) + \alpha \cdot X(t)\, dt = \varepsilon(t)\, dt$
$= dW(t)$

$$X(t) = X(t_0) - \int_{t_0}^{t} \alpha \cdot X(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} dW(s)$$
$$= X(t_0) - \int_{t_0}^{t} \alpha \cdot X(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)\, ds$$

Condizioni di stazionarietà:

$\dot{X}(t) + \alpha \cdot X(t) = \varepsilon(t)$

soluzione particolare:

$e^{\alpha t} \dot{X}(t) + e^{\alpha t} \cdot \alpha \cdot X(t) = e^{\alpha t} \cdot \varepsilon(t)$

$\frac{d}{dt}\left[e^{\alpha t} \cdot X(t)\right] = e^{\alpha t} \cdot \varepsilon(t)$

$$X(t) = e^{-\alpha t} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha u} \varepsilon(u)\, du$$
$$= \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-u)} \varepsilon(u)\, du$$

soluzione dell' omogenea associata:

$(D+\alpha)\, X(t) = 0$

$X(t) = A \cdot e^{-\alpha t}$

$$\Longrightarrow X(t) = A \cdot e^{-\alpha t} + \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-u)} \varepsilon(u)\, du$$

$X(t)$ è asintoticamente stazionario se $\alpha > 0$ e la soluzione

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-u)} \varepsilon(u)\, du = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-u)}\, dW(u)$$

- Funzione di autocorrelazione:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\rho}(\tau) + \alpha \cdot \rho(\tau) = 0 \\ &\rho(\tau) = B_\rho \cdot e^{-\alpha\tau} \\ &\rho(0) = 1 \Longrightarrow B = 1 \end{aligned}\right] \text{per } \tau > 0$$

Per $\tau < 0$ si riflette, dunque $\rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$

- Il moto browniano è un AR(1) continuo

3) Modello AR(2)

- Utilizzando le differenze di ordine 1 e 2:

$$\Delta X_n = X_n - X_{n-1} \qquad \Delta^2 X_n = X_n - 2\cdot X_{n-1} + X_{n-2}$$

possiamo scrivere:

$$\frac{\Delta^2 X_n}{(\Delta t)^2} - \underbrace{\frac{(a_1+2a_2)}{a_2\cdot\Delta t}}_{\alpha_1}\cdot\frac{\Delta X_n}{\Delta t} + \underbrace{\frac{(1+a_1+a_2)}{a_2\cdot(\Delta t)^2}}_{\alpha_2} X_n = \underbrace{\frac{Y_n}{a_2\cdot(\Delta t)^2}}_{\varepsilon(t)}$$

da cui: $\ddot{X}(t) + \alpha_1\cdot\dot{X}(t) + \alpha_2\cdot X(t) = \varepsilon(t)$

- Le condizioni su $\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon(t)$, possono essere riscritte:

$$a_1 = -2a_2 - \alpha_1\cdot a_2\cdot\Delta t$$

$$1-a_2 = \alpha_1\cdot a_2\cdot\Delta t + \alpha_2\cdot a_2\cdot\Delta t$$

$\Rightarrow$ Richieste: $a_1 \longrightarrow -2$; $a_2 \longrightarrow 1$

- Varianza di $X(t)$

Caso discreto:

$$\sigma_X^2 = \frac{(1+a_2)\cdot\sigma_Y^2}{(1-a_2)(1+a_1+a_2)(1-a_1+a_2)} \underset{\substack{\Delta t \text{ piccolo} \\ a_1\to -2 \\ a_2 \to 1}}{\sim} \frac{2\cdot\sigma_Y^2}{\alpha_1(\Delta t)+\alpha_2(\Delta t)^2\cdot 4} = \frac{\sigma_Y^2}{2\alpha_1\alpha_2(\Delta t)^3}$$

$\Longrightarrow$ La varianza è finita $\sigma_X^2 < \infty$ se $\sigma_Y^2 \sim O\left(\frac{1}{(\Delta t)^3}\right)$

$\Longrightarrow$ $V[\varepsilon(t)] = \frac{\sigma_Y^2}{a_2^2\cdot(\Delta t)^4} = O\left(\frac{1}{\Delta t}\right) \longrightarrow \infty$

$W(t) = \int_0^t \varepsilon(u)\,du$ si dimostra che è un processo di Wiener

- Condizioni per la stazionarietà

Soluzione del processo

$$X(t) = f(t) + (D^2+\alpha_1 D+\alpha_2)^{-1}\varepsilon(t)$$

dove $f(t)$ è la soluzione dell'omogenea associata:

$$D^2(X(t)) + \alpha_1 D(X(t)) + \alpha_2 X(t) = 0$$

che risulta essere:

$$f(t) = A_1\cdot e^{c_1 t} + A_2\cdot e^{c_2 t}$$

dove A_1, A_2 sono costanti, mentre c_1, c_2 le soluzioni di $g(z) = z^2+\alpha_1 z+\alpha_2$.

Affinché $X(t)$ sia stazionario $\Rightarrow$ $f(t)\to 0$ per $t\to\infty$, dovrà essere $Re(c_1)<0$, $Re(c_2)<0$ $\Rightarrow$ $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$

La soluzione stazionaria è data dunque da:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{c_1(t-u)} - e^{c_2(t-u)}}{c_1-c_2}\, \underbrace{dW(u)}_{\varepsilon(u)du}$$

- Funzione di autocorrelazione

$$\ddot{\rho}(\tau) + \alpha_1\cdot\dot{\rho}(\tau) + \alpha_2\cdot\rho(\tau) = 0$$

$$\rho(\tau) = B_0\cdot e^{c_1\tau} + B_1\cdot e^{c_2\tau} \qquad \tau>0$$

Per trovare i valori iniziali, partiamo dal caso discreto:

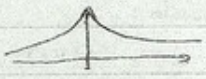
$$\rho(0) = 1 \qquad \rho(1) = -\frac{a_1}{1+a_2} \qquad \rho(0)-\rho(1) = \frac{1+a_1+a_2}{1+a_2} \sim \frac{1}{2}a_2(\Delta t)^2$$

$$\frac{\rho(0)-\rho(1)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho}(0) = 0$$

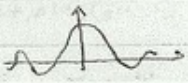
Abbiamo dunque $\rho(0) = 1$, $\dot{\rho}(0) = 0$, da cui:

$$\rho(\tau) = \frac{c_2\cdot e^{c_1|\tau|} - c_1\cdot e^{c_2|\tau|}}{c_2-c_1}$$

a) radici reali $\alpha_2 \le \frac{\alpha_1^2}{4}$



b) radici complesse $\alpha_2 > \frac{\alpha_1^2}{4}$



4) <u>Modello AR(k)</u>

- $X^{(k)}(t) + \alpha_1 \cdot X^{(k-1)}(t) + \dots + \alpha_k \cdot X(t) = \varepsilon(t)$

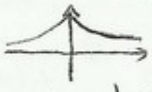
  o, equivalentemente, $\alpha(D) \cdot X(t) = \varepsilon(t)$

  dove $\alpha(z) = z^k + \alpha_1 \cdot z^{k-1} + \dots + \alpha_k$

- Stazionarietà asintotica se tutte le radici di $\alpha(z)$ cadono nel semipiano negativo, ovvero se $Re(z_i) < 0 \quad \forall i$.

- Autocorrelazione: $\alpha(D) \cdot \rho(\tau) = 0 \qquad \tau > 0$

  $\rho(\tau) = \sum_{i=1}^{k} B_i \cdot e^{c_i|\tau|} \qquad \forall \tau$

  - radici reali: 
  - coppie di radici complesse introducono termini oscillanti

5) <u>Modello MA(l)</u>

$(X_t = b_0 \cdot \varepsilon_t + b_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \dots + b_l \cdot \varepsilon_{t-l})$

<u>Def.</u> $\{X(t)\}$ è modello MA(l) se:

$$X(t) = \int_0^l b(u)\, \varepsilon(t-u)\, du$$

dove $b(u)$ = funzione assegnata

$\{\varepsilon(t)\}$ derivata del processo di Wiener

$$X(t) = \int_0^l b(u)\, \varepsilon(t-u)\, du = \int_{t-l}^{t} b(t-u)\, \varepsilon(u)\, du = \int_{t-l}^{t} b(t-u)\, dW(u)$$

- $B^u \equiv e^{-uD}$

<u>Dim.</u> $\forall$ funz. $x(t)$ che ammette sviluppo di Taylor:

$$B^u(x(t)) = x(t-u) = x(t) - \frac{u}{1!} x'(t) + \frac{u^2}{2!} x''(t) - \dots$$

$$= \left(1 - \frac{uD}{1!} + \frac{u^2 D^2}{2!} - \dots\right) x(t) = e^{-uD} x(t)$$

$$X(t) = \int_0^l b(u) \cdot \varepsilon(t-u)\, du = \int_0^l b(u) \cdot e^{-uD}\, \varepsilon(t)\, du$$

$$= \left(\int_0^l b(u)\, e^{-uD}\, du\right) \varepsilon(t)$$

$$X(t) = B(D) \cdot \varepsilon(t)$$

dove $B(z) = \int_0^l b(u) \cdot e^{-uz}\, du$

6) Modello ARMA (k, ℓ)

Def. $\{X(t)\}$ è modello ARMA (k,ℓ) se:

$$X^{(k)}(t) + \alpha_1 \cdot X^{(k-1)}(t) + \dots + \alpha_k X(t) = \int_0^{\ell} b(u)\, \varepsilon(t-u)\, du$$

- $\alpha(D)\, X(t) = B(D) \cdot \varepsilon(t)$

- Soluzione stazionaria (se esiste)

$$X(t) = H(D)\, \varepsilon(t)$$

dove $H(z) = \dfrac{\beta(z)}{\alpha(z)}$

Nel caso discreto:

sol. stazionaria : $X_t = k(B) \cdot Y_t$ dove $k(z) = \dfrac{\beta(z)}{\alpha(z)}$

Oss. β e α polinomi di ordine finito $\Rightarrow$ k è funzione razionale

Nel caso continuo invece, B non è un polinomio, e dunque H non è funzione razionale. Ciò comporta alcuni problemi al lato pratico, come nell'approccio in frequenza. È conveniente dunque costruire un modello razionale ARMA continuo.

Sostituisco $B(z)$ con $B_0(z) = \beta_0 z^{\ell} + \beta_1 z^{\ell-1} + \dots + \beta_\ell$

da cui $\Rightarrow$ $X(t) = \dfrac{B_0(D)}{\alpha(D)}\, \varepsilon(t)$

- Come condizione di stazionarietà asintotica abbiamo dunque che le radici di $\alpha(z)$ ~~[illegible]~~ abbiano parte reale < 0.

7) Processi generali lineari

Def.: $\{X(t)\}$ è processo generale lineare se:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} g(u)\, \varepsilon(t-u)\, du$$

dove $g(u)$ è funzione assegnata

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-u)\, \varepsilon(u)\, du = \int_{-\infty}^{t} g(t-u)\, dW(u)$$

- $X(t) = G(D) \cdot \varepsilon(t)$

dove $G(z) = \int_0^{\infty} e^{-uz}\, g(u)\, du$

Possiamo definire $g(u) = 0 \quad \forall u < 0$ da cui:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \cdot \varepsilon(t-u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\, dW(u)$$

- Varianza di $X(t)$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\, g(t-v)\, E[dW(u) \cdot dW(v)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (g(t-u))^2\, \sigma_W^2\, dv = \sigma_W^2 \cdot \int_0^{+\infty} g^2(u)\, du$$

$\sigma_X^2 < \infty$ se $\int_0^{\infty} g^2(u)\, du < \infty$

Si dimostra che è anche la condizione di stazionarietà.

$$\rho(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, g(u+\tau)\, du}{\int_0^{\infty} g^2(u)\, du}$$

$$g(u) = \begin{cases} b(u) & 0 \le u \le \ell \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \Rightarrow MA(\ell)$$

$$g(u) = e^{-\alpha u} \Rightarrow AR(1)$$

$$g(u) = \frac{e^{-c_1 u} - e^{-c_2 u}}{c_1 - c_2} \Rightarrow AR(2)$$

(4.2, 184-188)

ANALISI SPETTRALE

Consiste nella decomposizione di una quantità che varia nel tempo in somma/integrale di seni e coseni

Serie di Fourier per funzioni di periodo 2π

$\cos t$, $\sin t$, $\cos 2t$, $\sin 2t$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt))$$

con $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ costanti tali che la serie converga a $f(t)$ $\forall t$.

⊖ Consideriamo $x(t)$ deterministica e periodica di periodo 2π.

Vogliamo rappresentarla come serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt))$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt)) \quad (*)$$

Svolgiamo alcune considerazioni:

- $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ coefficienti di Fourier
- $n = 0$ notazione: $\frac{a_0}{2}$
- il termine per $n = 1$ si dice fondamentale
- " " $n = 2$ " prima armonica
- " " $n \geq 2$ " $(n-1)$-esima armonica

⊖ $$\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(mt)\, dt = \frac{1}{2} a_0 \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt\, dt}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt}_{=0 \text{ se } m \neq n} + b_n \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt\, dt}_{=0\ \forall m,n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cdot \cos mt \cdot dt = a_m \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt\, dt = \pi \cdot a_m$$

Svolgendo calcoli analoghi per b_m giungiamo a:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cdot \cos mt\, dt \qquad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cdot \sin mt\, dt \qquad m = 1, 2, \dots$$

dette formule di Eulero-Fourier.

Ci chiediamo ora se:

- a_m, b_m sono finiti?
- la serie converge?
- se converge, lo fa a $x(t)$?

(4.2, 133)

Dobbiamo dunque imporre che:

a) $x(t)$ sia assolutamente integrabile in $(-\pi, \pi)$, ovvero:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|\, dt < \infty$$

b) e c)

Consideriamo il test di Jordan.

Se $x(t)$ è a variazione limitata nell'intorno di $t = t_0$, allora la sua serie di Fourier converge a:

$$\frac{1}{2}\left[X(t_0 - 0) + X(t_0 + 0)\right]$$

Se la funzione è non necessariamente periodica di periodo 2π, ma ha più generalmente periodo $2T$, procediamo nel seguente modo: (4.3, 194)

$x(t)$ ha periodo $2T$

$y(t) = x\left(\frac{tT}{\pi}\right)$ ha periodo 2π

$$\Longrightarrow \quad y(s) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(ns) + b_n \cdot \sin(ns)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} y(s) \cos ns \, ds = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T}^{T} x(t) \cdot \cos\left(\frac{nt\pi}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} y(s) \sin ns \, ds = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T}^{T} x(t) \cdot \sin\left(\frac{nt\pi}{T}\right) dt$$

Analisi spettrale di funzioni periodiche (4.4, 194 - 195)

Consideriamo $x(t)$ funzione periodica di periodo 2π che ammette (*).

Energia totale in $(-\pi, \pi) = \int_{-\pi}^{\pi} x^2(t)\, dt$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2(t)\, dt = \left(\frac{1}{4} \cdot a_0^2 \cdot 2\pi\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^2 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt)\, dt + b_n^2 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\, dt\right]$$

$$= \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\right]$$

detta relazione di Parseval.

Rinominando i coefficienti come: $\begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \\ c_n = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)} \end{cases}$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

possiamo scrivere l'energia totale in $(-\pi, \pi)$ come $2\pi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$, e la potenza totale come $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$, poiché l'unità di tempo è 2π.

(4.4, 196 - 197)

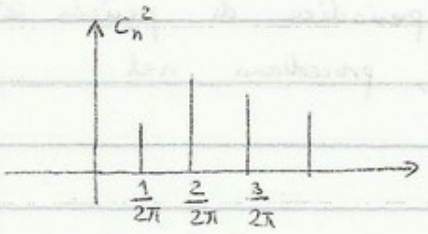
Se consideriamo $x(t) = a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt)$, allora l'energia totale su $(-\pi, \pi)$ è c_n^2.

Oss.

$(a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt))$ ha frequenza $\frac{n}{2\pi}$ cicli al secondo.

$n = 2\pi f$, dove n è la frequenza angolare e f la frequenza.

c_n^2 = contributo all'energia totale del termine della serie di Fourier di $x(t)$ di frequenza $\frac{n}{2\pi}$ c.p.s. o di frequenza angolare in radianti per secondo.

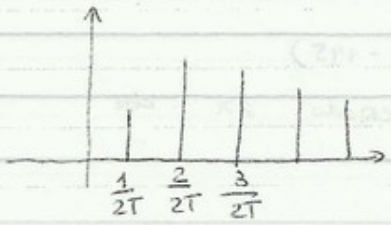


spettro di potenza discreto

Funzioni di periodo $2T$ con sviluppo in serie di Fourier (4.4.1, 197-198)

Energia totale su $(-T, T)$ $= \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt = 2T \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$

Potenza totale $= \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$



Funzioni non periodiche e integrali di Fourier (4.5, 198-199)

$x(t)$ non periodica

$$x_T^*(t) = \begin{cases} x(t) & -T \le t \le T \\ x^*(t + 2pT) & p = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

si ripete a destra e a sinistra quanto accade nell'intervallo $[-T, T]$

$\Longrightarrow$ $x_T^*(t)$ è periodica di periodo $2T$

$$x_T^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot \cos(2\pi f_n t) + b_n \cdot \sin(2\pi f_n t)]$$

$f_n = \frac{n}{2T}$ $\quad b_0 = 0$

In forma esponenziale si può scrivere:

$$x_T^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{2\pi i f_n t}$$

dove $$A_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n \ge 1 \\ \frac{1}{2} a_0 & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{|n|} + ib_{|n|}) & n \le -1 \end{cases}$$

(4.5, 199 - 204)

$$\Rightarrow \quad A_n = \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} x_T^*(t) \cdot e^{-2\pi i f_n t}\, dt = \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} x(t) \cdot e^{-2\pi i f_n t}\, dt$$

Per $-T \le t \le T$:

$$x(t) \equiv x_T^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} x(t) \cdot e^{-2\pi i f_n t}\, dt \right) \cdot e^{2\pi i f_n t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T}^{T} x(t) \cdot e^{-2\pi i f_n t}\, dt \right) \cdot e^{2\pi i f_n t}\, \delta f_n$$

dove $\delta f_n = f_n - f_{n-1} = \frac{1}{2T}$

Per $T \to +\infty \Rightarrow \delta f_n \to 0$:

(1) $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(f) \cdot e^{2\pi i f t}\, df$ integrale di Fourier di $x(t)$

$p(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2\pi i f t}\, dt$ trasformata di Fourier di $x(t)$

Ancora una volta, $x(t)$ deve essere assolutamente integrabile in $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

Affinché l'integrabile converga a $x(t)$, $x(s)$ deve essere a variazione limitata in un intervallo che contiene s.

Riscriviamo ora (1) applicando la sostituzione $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \cdot e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

Si noti che $G(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot p\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

La relazione di Parseval diventa dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2\, d\omega$$

Notiamo anche che l'ipotesi di assoluta integrabilità di $x(t)$ si traduce in:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty \Longrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{-T} |x(t)|\, dt < \infty \\ \int_{T}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \\ \lim_{t \to -\infty} x(t) = 0 \end{cases}$$

se i limiti esistono, mentre se non esistono dovrà essere:

$\alpha_n(\varepsilon) = \{ t : |x(t)| > \varepsilon,\ n \le |t| < n+1 \}$

$\forall\, \varepsilon > 0$ la misura di $\alpha_n(\varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Se le funzioni non sono assolutamente integrabili, dobbiamo utilizzare funzioni generalizzate.

Esempio: $x(t) \equiv 1$, la trasformata è $\sqrt{2\pi} \cdot \delta(\omega)$

(4.7, 208 ; 4.8, 210 - 214)

RELAZIONE TRA DENSITÀ SPETTRALE, AUTOCOVARIANZA, E AUTOCORRELAZIO

$$h(\omega) = \lim_{T \to +\infty} E\left[\frac{|G_T(\omega)|^2}{2T}\right]$$, dove $|G_T(\omega)|^2$ è la trasformata di Fourier di $X_T(t)$

Se $F(\omega)$ è trasformata di Fourier di $f(t)$, allora $|F(\omega)|^2$ è trasformata di Fourier di $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) f(u-t)\, du$

Lemma

Siano $f(t)$ e $g(t)$ funzioni a valori reali con:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g(t)\, dt$$

Allora:

$$F(\omega)\, G^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} k(t)\, dt$$

dove $k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(u-t)\, du$

Corollario

Se $f(t) = g(t) \quad \forall t$

allora $|F(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$

dove $k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, f(u-t)\, du$

Teorema

Sia $\{X(t)\}$ un processo stocastico stazionario continuo a media nulla, densità spettrale di potenza $h(\omega)$ che esiste $\forall \omega$, funzione di autocovarianza $R(\tau)$. Allora:

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} R(\tau)\, d\tau$$

Dim.

Si applica il Corollario alla funzione $G_T(\omega)$.

La condizione di esistenza di $h(\omega)$ è che $R(\tau)$ deve ammettere trasformata di Fourier, il che si ha se e solo se $R(\tau)$ è assolutamente integrabile: $\int_{-\infty}^{+\infty} |R(\tau)|\, d\tau < \infty$.

- Se $R(\tau)$ è assolutamente integrabile e continua in 0:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} h(\omega)\, d\omega$$

- Se $\{X(t)\}$ è processo a valori reali:

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega\tau) \cdot R(\tau)\, d\tau$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega\tau) \cdot h(\omega)\, d\omega$$

(4.8, 215 – 219)

$H(\omega)$ = spettro integrato

$$H(\omega_2) - H(\omega_1) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} h(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}}{-it} R(t)\, dt$$

Se $\{X(t)\}$ a valori reali $\Longrightarrow$ $h(\omega)$ è pari, $H(0) = \frac{\sigma_x^2}{2}$

$$H(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{2} + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{t} R(t)\, dt$$

Ponendo $\tau = 0$:

$$\sigma_x^2 = R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega)\, d\omega = H(+\infty)$$ <u>potenza totale</u>

<u>Def.</u> Densità spettrale di potenza normalizzata

$$f(\omega) = \frac{h(\omega)}{\sigma_x^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \rho(\tau)\, d\tau$$

$h(\omega) \xrightarrow{TF} R(\tau)$

$f(\omega) \longrightarrow \rho(\tau)$

<u>Def.</u> Spettro integrato normalizzato

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} F(\theta)\, d\theta$$

$$f(\omega) = \frac{d}{d\omega} F(\omega)$$

- Proprietà di $f(\omega)$:
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\, d\omega = 1$
  - $f(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$
  - $(f(\omega) = f(-\omega) \ \forall \omega$ per processi a valori reali$)$
- Proprietà di $F(\omega)$
  - $0 \leq F(\omega) \leq 1$
  - $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$
  - $F(\omega)$ è non decrescente

<u>Teorema</u> di Wiener – Khinchin

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\rho(\tau)$ sia funzione di autocorrelazione di $\{X(t)\}$ processo stazionario stocasticamente continuo è che esista $F(\omega)$ che verifichi le proprietà di una distribuzione e tale che $\forall \tau$:

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau}\, dF(\omega) \qquad (*)$$

(4.8, 219 – 223)

<u>Dim.</u> del teorema di Wiener - Khinchin

- <u>Condizione necessaria</u>: $\rho(\tau)$ è semidefinita positiva e continua, si applica il teorema di Bochner (1936) e si giunge alla tesi
- <u>Condizione sufficiente</u>:

$\rho(\tau)$, $F(\omega)$ t.c. $(*)$ $\Longrightarrow$ costruiamo $X(t)$ di cui $\rho(t)$ è funzione di autocorrelazione.

U: v.a. con distribuzione $F(\omega)$

$\phi \sim U[-\pi, \pi]$ indipendente da U.

Consideriamo il processo $X(t) = e^{i(\phi + Ut)}$: oscillazioni a frequenza aleatoria.

Si ha che: $E[X(t)] = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{E[e^{i\phi}]} \cdot E[e^{iUt}] = 0$

$$\sigma_X^2 = E[X(t)^2] = 1 \quad \forall t$$

$$\rho_X(\tau) = E[X^*(t) \cdot X(t+\tau)] = E[e^{-i(\phi+Ut)} \cdot e^{i(\phi + U(t+\tau))}]$$

$$= E[e^{iU\tau}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iU\tau}\, dF(\omega) \overset{(*)}{=} \rho(\tau)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\omega}\, dH(\omega)$$

Nel caso di processo a parametro discreto, vale il:

<u>Teorema di Wold</u>: condizione necessaria e sufficiente affinché la successione $\{\rho(r),\ r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ sia funzione di autocorrelazione di un processo stazionario a parametro discreto $\{X_t,\ t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ è che esiste una funzione $F(\omega)$ che verifichi le proprietà di una funzione di distribuzione su $[-\pi, \pi]$ tale che $\rho(r) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir\omega}\, dF(\omega)$

<u>Dim.</u>

Costruiamo la versione continua di $\rho(r)$, denotandola con $\rho_c(r)$, collegando con una spezzata i punti del discreto:

$$\rho_c(\tau) = (s+1-\tau) \cdot \rho(s) + (\tau - s) \cdot \rho(s+1), \qquad s \le \tau < s+1$$

$$\rho_c(-\tau) = \rho_c(\tau)$$

Poiché $\rho_c(\tau)$ è continua, per il teorema di Priestley esiste un processo continuo che ha $\rho_c(\tau)$ come funzione di autocorrelazione, e dunque per Wiener - Khinchin esiste $G(\omega)$ tale che

(4.8, 223-224)

$$\rho_c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau}\, dG(\omega) \quad \text{vale } \forall \tau \Rightarrow \text{vale } \forall r$$

$$\rho_c(r) = \rho(r)$$

$$\rho(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega r}\, dG(\omega) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int_{(2s-1)\pi}^{(2s+1)\pi} e^{i\omega r}\, dG(\omega) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega+2s\pi)r}\, dG(\omega+2s\pi) =$$

poiché: $e^{i\omega r} \cdot e^{i\cdot 2s\cdot\pi\cdot r} = e^{i\omega r} \cdot e^{2i\pi\cdot rs} = e^{i\omega r}$

abbiamo ancora:

$$\rho(r) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega r}\, dG(\omega+2s\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega r} \cdot \sum dG(\omega+2s\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega r}\, dF(\omega)$$

<u>Osservazione</u>

Se s è intero, le quantità $e^{i\omega t}$ e $e^{i(\omega+2s\pi)t}$ non sono distinguibili. Dunque, se si considera un processo continuo $\{X(t)\}$, e lo si osserva in istanti discreti $\{X_t\}$, le componenti in $X(t)$ con frequenza $\omega \pm 2\pi$, $\omega \pm 4\pi$, sembrano avere tutte frequenza ω. Questo dà origine all'effetto di aliasing.

- DECOMPOSIZIONE DELLO SPETTRO INTEGRATO (4.9, 226-227)

<u>Teor.</u> Ogni spettro integrato normalizzato $F(\omega)$ può essere scritto nella forma:

$$F(\omega) = a_1 \cdot F_1(\omega) + a_2 \cdot F_2(\omega) + a_3 \cdot F_3(\omega)$$

dove: (i) $a_i \geq 0$, $\sum_i a_i = 1$

(ii) $F_1(\omega)$ è assolutamente continua con $D(F_1(\omega)) = f_1(\omega)$

$F_2(\omega)$ è una step function con gradini p_r nei valori ω_r tali per cui $\sum p_r = 1$.

$F_3(\omega)$ è una funzione singolare con derivata nulla quasi ovunque

Vediamo il caso particolare in cui $a_3 = 0$.

Allora $F(\omega) = a_1 \cdot F_1(\omega) + a_2 \cdot F_2(\omega)$; se $\rho(\tau)$ è funzione di autocorrelazione di processo con spettro $F(\omega)$, allora:

(Wiener - Khinchin) $\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau}\, dF(\omega)$

(Wold) $\rho(\tau) = \int_{\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau}\, dF(\omega)$

$\Rightarrow \rho(\tau) = a_1 \cdot \rho_1(\tau) + a_2 \cdot \rho_2(\tau)$, dove:

$$\rho_1(\tau) = \int e^{i\omega\tau}\, dF_1(\omega) = \int e^{i\omega\tau} f_1(\omega)\, d\omega$$

$$\rho_2(\tau) = \int e^{i\omega\tau}\, dF_2(\omega) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{i\omega_r\tau} p_r$$

Si noti che $\rho_1(\tau)$ per $\tau \to \pm\infty$ decresce a zero, mentre $\rho_2(\tau)$ ha componente pseudo periodica e non decade a zero.

Ancora più nello specifico, vediamo il caso in cui:

$a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$.

In questo contesto $F(\omega) = F_1(\omega)$, e vi rientrano tutti i modelli analizzati finora: il processo puramente casuale, AR(k), MA(l), ARMA(k, l), il modello lineare generale.

In questo caso esiste la densità spettrale.

<u>Esempi di spettro</u> (4.10, 233-243)

1a) processo puramente casuale / discreto

$$\rho(r) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega r} \rho(r) = \frac{1}{2\pi} \qquad -\pi < \omega < \pi$$

1b) processo puramente casuale / continuo

$$\left.\begin{aligned} \rho(\tau) &= \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases} \\ f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau) \cdot \cos \omega\tau \cdot d\tau = 0 \end{aligned}\right] \text{NO}$$

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cdot \cos \omega\tau \; d\tau = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_w^2 \, \delta(\tau) \cos \omega\tau \; d\tau = \frac{\sigma_w^2}{2\pi}$$

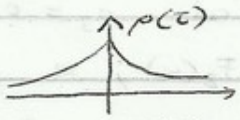
$$-\infty < \omega < +\infty$$

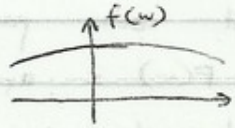
2a) AR(1) continuo

$$\rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \qquad \alpha > 0$$

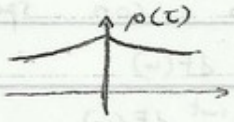
$$\Rightarrow \quad f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos \omega\tau \; d\tau = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right)$$

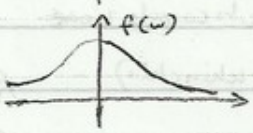
$\alpha \to +\infty$





$\alpha \to 0$

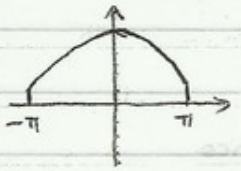




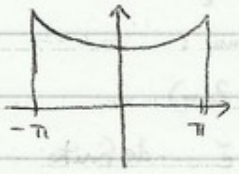
2b) AR(1) discreto

$$\rho(r) = a^{|r|} \qquad |a| < 1$$

$$f(\omega) = \frac{1-a^2}{2\pi(1-2a\cdot\cos\omega + a^2)} \qquad -\pi \le \omega \le \pi$$



$a > 0$



$a < 0$

3a) AR(2) continuo

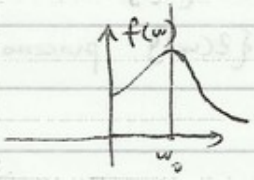
$$\rho(r) = \frac{c_2\cdot e^{c_1\cdot|\tau|} - c_1\cdot e^{c_2\cdot|\tau|}}{c_2 - c_1}$$

c_1, c_2 sono radici di $g(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2$

$$\Longrightarrow f(\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_2-\omega^2)^2 + \alpha_1^2\omega^2} \qquad \forall\omega$$

Se $\alpha_2 > \frac{1}{2}\alpha_1^2$ si ha un picco in:

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2}$$



$\Longrightarrow$ Comportamento "quasi periodico"
periodo $\frac{2\pi}{\omega_0}$

3b) AR(2) discreto

→ comportamento pseudo periodico

→ potenza concentrata per valori alti o bassi dello spettro

4) processo armonico

$$X(t) = \sum_{i=1}^{k} A_i\cdot\cos(\omega_i t + \phi_i)$$

$$\rho(\tau) = \frac{\sum A_i^2\cos\omega_i\tau}{\sum A_i^2}$$

Nel caso particolare in cui $k = 1$, $\rho(\tau) = \cos\omega\tau$, da cui:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega\tau\,\cos\omega_1\tau\,d\tau = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{+\infty}\cos\omega\tau\,\cos\omega_1\tau\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta(\omega-\omega_1) + \delta(\omega+\omega_1)\right]$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f(\vartheta)\,d\vartheta = \begin{cases} 0 & \omega \le -\omega_1 \\ \frac{1}{2} & -\omega_1 < \omega \le \omega_1 \\ 1 & \omega > \omega_1 \end{cases}$$

(4.11, 246)

RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE DI UN PROCESSO STAZIONARIO A PARAMETRO CONTINUO

Sia $\{X(t)\}$ un processo stazionario a parametro continuo, a media nulla e stocasticamente continuo. Allora $\exists$ un processo ortogonale $\{Z(\omega)\}$ tale che $\forall t$ $X(t)$ può essere scritto nella forma:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\omega}\, dZ(\omega)$$

dove l'integrale è definito in media quadratica.

Il processo $\{Z(\omega)\}$ ha le seguenti proprietà:

i) $E[dZ(\omega)] = 0 \quad \forall \omega$

ii) $E[|dZ(\omega)|^2] = dH(\omega) \quad \forall \omega$

dove $H(\omega)$ è lo spettro integrato non normalizzato di $X(t)$.

iii) $\forall\, \omega, \omega' \quad \omega \neq \omega'$

$$Cov(dZ(\omega)\ dZ(\omega')) = E[dZ(\omega)\ dZ(\omega')] = 0$$

(4.11, 250-251)

Nel caso di processo a parametro discreto, sia $\{X_t\}$ un tale processo a media nulla. Allora esiste $\{Z(\omega)\}$ processo ortogonale su $[-\pi, \pi]$ tale che $\forall t$:

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t}\, dZ(\omega)$$

con $Z(\omega)$ dotato delle stesse proprietà del caso continuo.

STIMA (capitoli 5 e 6 libro di testo) (5.2, 291-317)

Classico

dati, campione, osservazione, ripetizioni.

Basandosi sulla casualità, si ottengono v.a. i.i.d.

Obiettivo di questa parte del corso

Dato il campione casuale $(X_1 .. X_N)$ del quale sia nota la distribuzione congiunta $F(x_1, .., x_N ; \theta_1, .., \theta_p)$, ci occupiamo di stimare i parametri $\theta_1, ..., \theta_p$

Statistica
- stima
  - puntuale
  - intervallare
- Test d'ipotesi

$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$ media campionaria

Stimatore: è una statistica che assume valori che stimano i parametri incogniti. Si ricordi che una statistica è una v.a. che sia funzione del campione casuale e che non dipende da parametri incogniti.

Alcune proprietà degli stimatori sono:

- correttezza: $E(\hat{\Theta}) = \theta$ (in generale $E(\hat{\Theta}) = \theta + bias$, qui $bias = 0$)
- correttezza asintotica: $\lim_{N \to +\infty} E(\hat{\Theta}) = \theta$, ma non per N fissato.
- efficienza: $\hat{\Theta}_1$ è più efficiente di $\hat{\Theta}_2$ se $Var(\hat{\Theta}_1) < Var(\hat{\Theta}_2)$
- errore quadratico medio: $E[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$
- consistenza: $\hat{\Theta} \xrightarrow[N \to +\infty]{P} \theta$
- sufficienza: la distribuzione condizionata di $X_1, ..., X_N$, dato $\Theta = s$, non dipende più da θ.

Ricordiamo inoltre la funzione di verosimiglianza:

$f(x_1, ..., x_N ; \theta) = f(\theta)$

da cui, cercando analiticamente il massimo, si ottiene lo stimatore di massima verosimiglianza.

Altro tipo di stimatore è quello dei momenti:

$$\begin{cases} E(X) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \\ E(X^2) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \\ E(X^p) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^p \end{cases}$$

e altro ancora è quello dei minimi quadrati:

$Y = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + ... + \theta_p x_p + \varepsilon$ con $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

dove $\theta_1, ..., \theta_p$ sono parametri, e $x_1, ..., x_n$ sono note. Si ha che:

$E(Y) = \theta_1 x_1 + ... + \theta_p x_p$

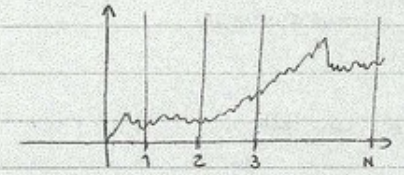
da cui il metodo:

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - E(Y_i))^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (\theta_1 x_1^i + ... + \theta_p x_p^i))$$

la cui minimizzazione porta allo stimatore.

STIMA DELLE FUNZIONI DI AUTOCOVARIANZA E AUTOCORRELAZIONE (5.3, 317-318)

Siano $X_1, \dots, X_N$ v.a. di un'unica osservazione di un processo stazionario:



$E(X_i) = \mu$; $Var(X_i) = \sigma^2$

$Cov(X_i, X_{i+r}) = R(r) = \sigma^2 \cdot \rho(r)$

autocovarianza — autocorrelazione

Vediamo come stimare μ. (5.3, 318-320)

L'uso di $\bar{X} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i$ porta alle seguenti considerazioni:

- $E(\bar{X}) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = \mu$ poiché la media è lineare
- $Var(\bar{X}) = \frac{1}{N^2} \cdot Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N^2} \cdot \left[E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2\right] - E^2\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]\right]$

$$= \frac{1}{N^2} \cdot \left[E\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j\right) - E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] \cdot E\left[\sum_{j=1}^{N} X_j\right]\right]$$

$$= \frac{1}{N^2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E(X_i X_j) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E(X_i)\, E(X_j)\right]$$

$$= \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Cov(X_i, X_j)$$

$$= \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} R(j-i)$$

$$= \frac{\sigma^2}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \rho(j-i)$$

$j - i = r$

$r = -(N-1), \dots, N-1$

$i = 1$ $\quad \rho(0), \rho(1), \dots, \rho(N-1)$

$i = 2$ $\quad \rho(-1), \rho(0), \dots, \rho(N-2)$

.....

$i = N$ $\quad \rho(1-N), \rho(2-N), \dots, \rho(0)$

dove ogni $\rho(r)$ compare esattamente $N - |r|$ volte.

Possiamo dunque scrivere:

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{N^2} \cdot \sum_{r=(-N-1)}^{N-1} (N - |r|)\, \rho(r)$$

$$= \frac{\sigma^2}{N} \cdot \sum_{r=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \rho(r)$$

Se la sommatoria converge, allora, per $N \to +\infty$, $Var(\bar{X}) \to 0$, dunque $\bar{X}$ risulterebbe essere consistente.

Vediamo il caso in cui (X_t) ha spettro puramente continuo.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \rho(r)\, e^{-i\omega r} \qquad -\pi \le \omega \le \pi$$

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{r=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \rho(r)$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \rho(r) = 2\pi f(0) \Rightarrow \bar{X} \text{ è consistente}$$

$$Var(\bar{X}) \sim \frac{\sigma^2}{N} 2\pi f(0)$$

Ricordiamo che nel caso i.i.d.:

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^{N} Var(X_i) = \frac{\sigma^2}{N}$$

Esempio:

AR(1) $\quad a \quad |a| < 1$

$$f(\omega) = \frac{1 - a^2}{2\pi(1 - 2a \cdot \cos\omega + a^2)}$$

$$f(0) = \frac{1 - a^2}{2\pi(1 - 2a + a^2)} = \frac{1 - a^2}{2\pi(1-a)^2} = \frac{(1-a)(1+a)}{2\pi(1-a)^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1+a}{1-a}$$

STIMA DI $R(r)$ (5.3, 321 - 323)

IID

$(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$ campione casuale

covarianza campionaria $M_{1,1} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$

Nel nostro caso, consideriamo successivamente le coppie:

$$\begin{bmatrix} (X_1, X_{r+1}) \\ (X_2, X_{r+2}) \\ \vdots \\ (X_{N-r}, X_N) \end{bmatrix}$$

$$\hat{R}(r) = \frac{1}{N-r} \cdot \sum_{i=1}^{N-r} (X_i - \bar{X})(X_{i+r} - \bar{X})$$

per processi reali:

$$\hat{R}(r) = \frac{1}{N-|r|} \cdot \sum_{i=1}^{N-|r|} (X_i - \bar{X})(X_{i+|r|} - \bar{X}) \qquad r = -N, \dots, N$$

Per calcolare $E(\hat{R}(r))$, supponiamo di conoscere μ.

$$E(\hat{R}(r)) = E\left[\frac{1}{N-|r|} \cdot \sum_{i=1}^{N-|r|} (X_i - \mu)(X_{i+|r|} - \mu)\right]$$

$$= \frac{1}{N-|r|} \cdot (N-|r|) \cdot R(r) = R(r) \quad \forall r$$

Non conosco μ

oss. $\sum_{i=1}^{N-|r|} (X_i - \mu)(X_{i+|r|} - \mu) = \sum_{i=1}^{N-|r|} (X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu)(X_{i+|r|} - \bar{X} + \bar{X} - \mu)$

$$= \sum_{i=1}^{N-|r|} (X_i - \bar{X})(X_{i+|r|} - \bar{X}) + \sum_{i=1}^{N-|r|} (\bar{X} - \mu)(X_{i+|r|} - \bar{X}) + \sum_{i=1}^{N-|r|} (X_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu) + \sum_{i=1}^{N-|r|} (\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N-|r|} (X_i - \bar{X})(X_{i+|r|} - \bar{X}) + \sum_{i=1}^{N-|r|} (\bar{X} - \mu)^2$$ supponendo N grande rispetto a $|r|$

$$E(\hat{R}(r)) = R(r) + \frac{N-|r|}{N-|r|} Var(\bar{X}) = R(r) - Var(\bar{X})$$

Per N grande e per processi a spettro continuo,

$Var(\bar{X}) \sim \frac{2\pi\sigma^2}{N} f(0)$, dunque per $N \to \infty$, $Var(\bar{X}) \to 0$,

e pertanto lo stimatore è asintoticamente corretto. (16.04.2010)

Alcuni autori definiscono uno stimatore leggermente differente:

$$\hat{R}_B(r) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N-|r|} (X_i - \bar{X})(X_{i+|r|} - \bar{X})$$

$$E(\hat{R}_B(r)) = \frac{1}{N} \cdot (N-|r|) \cdot R(r) = \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \cdot R(r) \quad \text{se } \mu \text{ è noto}$$

$$E(\hat{R}_B(r)) = E\left(\frac{N-|r|}{N} \cdot \hat{R}(r)\right) = \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \cdot E(\hat{R}(r)) = \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \cdot [R(r) - Var(\bar{X})]$$

$$= \left(1 - \frac{|r|}{N}\right)\left(R(r) - \frac{2\pi\sigma^2}{N} f(0)\right)$$

$$\sim R(r) - \frac{|r|}{N} R(r) + \frac{2\pi\sigma^2}{\frac{N^2}{(1-|r|)}} f(0)$$

Stima delle varianze (5.3, 324 - 328)

Dobbiamo introdurre alcune ipotesi aggiuntive:

- $(X_t)_t$ stazionario fino almeno all'ordine 4:

$$E(X_t X_{t+u} X_{t+v} X_{t+z}) = g(u,v,z)$$

- μ sia nota: in particolare, possiamo supporre che $\mu=0$, altrimenti si lavora sul processo shiftato $X_t - \mu$

Sotto queste ipotesi sarà:

$$\hat{R}(r) = \frac{1}{N-|r|} \cdot \sum_{i=1}^{N-|r|} X_i X_{i+|r|}$$

$$E(\hat{R}(r)) = R(r)$$

$$\hat{R}_B(r) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N-|r|} X_i X_{i+|r|}$$

$$E(\hat{R}_B(r)) = \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) R(r)$$

Possiamo ora scrivere:

$$\mathrm{Cov}(\hat{R}_B(r), \hat{R}_B(r+v)) = E[\hat{R}_B(r) \cdot \hat{R}_B(r+v)] - E[\hat{R}_B(r)] \cdot E[\hat{R}_B(r+v)]$$

$$= E\left[\frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^{N-|r|} X_i X_{i+|r|} \cdot \sum_{j=1}^{N-|r+v|} X_j X_{j+|r+v|}\right] - \left(1-\frac{|r|}{N}\right) R(r) \cdot \left(1 - \frac{|r+v|}{N}\right) R(r+v)$$

$$= \frac{1}{N^2} \cdot \sum\sum E(X_i X_{i+r}, X_j X_{j+r+v})$$

Per Isserlis (1918)

$$= \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^{N-r} \sum_{j=1}^{N-r-v} \{E[X_i X_{i+r}] \cdot E[X_j X_{j+r+v}] + E[X_i X_j] \cdot E[X_{i+r} X_{j+r+v}]$$
$$+ E[X_i X_{j+r+v}] \cdot E[X_{i+r} X_j] + k_4(j-i, r, v)\}$$

dove k_4 è detto cumulante congiunto del quarto ordine.

$$= \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^{N-r} \sum_{j=1}^{N-r-v} \{R(r) \cdot R(r+v) + R(j-i) \cdot R(j+v-i) + R(j+r+v-i) \cdot R(j-i-r)$$
$$+ k_4(j-i, r, v)\} - \left(1-\frac{r}{N}\right)\left(1-\frac{r+v}{N}\right) R(r) R(r+v)\}$$

$$= \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^{N-r} \sum_{j=1}^{N-r-v} \{R(j-i) \cdot R(j-i+v) + R(j-i+r+v) R(j-i-r) + k_4(j-i, r, v)\}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{s=1-(N-r)}^{N-r-v-1} \left(1 - \frac{\eta(s)+r+v}{N}\right) \{R(s) R(s+v) + R(s-r) R(s+r+v) + k_4(s,r,v)\}$$

dove $\eta(s) = \begin{cases} s & s > 0 \\ 0 & -v \le s \le 0 \\ -s-v-(N-r)+1 & s < -v \end{cases}$

Per N grande, $\mathrm{Var}(\hat{R}_B(r)) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{s=-\infty}^{+\infty} [R^2(s) + R(s+r) R(s-r) + k_4(s,r,0)]$, dove il cumulante congiunto si annulla per $v=0$.

Ne segue che $\mathrm{Var}(\hat{R}_B(r)) \sim \frac{1}{N}$, e $\mathrm{Var}(\hat{R}(r)) \sim \frac{1}{N-r}$

Possiamo trarre le seguenti osservazioni e conclusioni:

1) BIAS $\hat{R}_B$ $\frac{|r|}{N} R(r)$ se $|r| \sim N-1$ $R(r) \to 0$

se $|r|$ piccolo $\Rightarrow$ $\frac{|r|}{N}$ molto piccolo.

Il bias è dunque generalmente molto piccolo.

2) $\mathrm{Var}(\hat{R}_B(r)) < \mathrm{Var}(\hat{R}(r))$, e $\mathrm{Var}(\hat{R}_B(r))$ non dipende da r.

Dunque conviene prendere $\hat{R}_B$ come stimatore piuttosto che $\hat{R}$, anche se il primo è distorto.

STIMA DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE (5.3, 330-334)

$$\rho(r) = \frac{R(r)}{\sigma^2} = \frac{R(r)}{R(0)} \quad \forall r$$

$$\hat{\rho}(r) = \frac{\hat{R}(r)}{\hat{R}(0)} \qquad r = -(N-r), \dots, N-r$$

$$\hat{\rho}_B(r) = \frac{\hat{R}_B(r)}{\hat{R}_B(0)}$$

1) $|\hat{\rho}_B(r)| \leq 1 \quad \forall r$

Costruiamo due nuovi insiemi di dati a partire dal campione $X_1, \dots, X_N$:

$$(Y_i)_{i=1}^{N+r} \qquad \overbrace{0, \dots, 0}^{r}, X_1, \dots, X_N$$
$$Y_1, \dots, Y_r, Y_{r+1}, \dots, Y_{r+N}$$

$$(Z_i)_{i=1}^{N+r} \qquad X_1, \dots, X_N, \overbrace{0, \dots, 0}^{r}$$
$$Z_1, \dots, Z_N, Z_{N+1}, \dots, Z_{N+r}$$

Calcoliamo ora la covarianza di $(Y_i, Z_i)_{i=1}^{N+r}$:

$$\frac{\frac{1}{N+r} \sum_{i=1}^{N+r} (Y_i - \bar{Y})(Z_i - \bar{Z})}{\sqrt{\frac{1}{N+r} \cdot \sum_{i=1}^{N+r} (Y_i - \bar{Y})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N+r} \cdot \sum_{i=1}^{N+r} (Z_i - \bar{Z})^2}}$$

Vediamo ora di riscrivere il numeratore:

$$\sum_{i=1}^{N+r} \dots = \sum_{i=1}^{r} -\bar{Y}(X_i - \bar{X}) + \sum_{i=r+1}^{N} (X_{i-r} - \bar{X})(X_i - \bar{X}) + \sum_{i=N+1}^{N+r} -\bar{Z}(X_{i+r} - \bar{X})$$
$$= \sum_{j=1}^{N+r}$$

Per N grande:

$$E(\hat{\rho}_B(r)) \sim \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \cdot \rho(r)$$

$$Cov(\hat{\rho}_B(r), \hat{\rho}_B(r+v)) \sim \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\rho(m) + \rho(m+v)$$
$$+ \rho(m+r+v)\rho(m-r) + 2 \cdot \rho(r)\rho(r+v)^2 \rho(m) + 2\rho(r)\rho(m)\rho(m-r-v)$$
$$-2\rho(r+v)\rho(m)\rho(m-r)]$$

$\rho(r) \to 0$ la $\hat{\rho}$ decade più lentamente.

Esempi:

1) Processo puramente casuale:

$$\rho(r) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r \neq 0 \end{cases}$$

$$E(\hat{\rho}_B(r)) \sim \begin{cases} \rho(r) = 1 & r = 0 \\ 0 & r \neq 0 \end{cases}$$

$$Cov(\hat{\rho}_B(r), \hat{\rho}_B(r+v)) \sim 0$$
$$Var(\hat{\rho}_B(r)) \sim \frac{1}{N}$$

2) Processo con $\rho(s) \to 0 \quad |s| \to +\infty$

$$Cov(\hat{\rho}_B(r), \hat{\rho}_B(r+v)) \qquad r \text{ sufficientemente grande}$$
$$\rho(s) \sim 0 \quad |s| > r$$
$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \rho(m) \cdot \rho(m+v)$$
$$Var(\hat{\rho}_B(r)) \sim \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \rho^2(m)$$

3) Processo AR(1) con $|a| < 1$

$$\rho(r) = a^{|r|}$$

$$Cov(\hat{\rho}_B(r), \hat{\rho}_B(r+v)) \sim \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \rho(m) \cdot \rho(m+v)$$
$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^{|m|} \cdot a^{|m+v|} = \frac{1}{N} \cdot \left[\frac{2a^v}{1-a^2} + a^v(1+v)\right]$$
$$Var(\hat{\rho}_B(r)) \sim \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \rho^2(m) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1+a^2}{1-a^2}$$

Teorema del limite centrale di Anderson per processi (X_t) lineari (5.3, 338)

Se $X_t = \mu + \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_u \varepsilon_{t-u}$, ε_t I.I.D., $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) < \infty$, $\sum_{u=-\infty}^{+\infty} |g_u| < \infty$

allora $\sqrt{N}(\bar{X} - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 \cdot \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \rho(r))$

(19.04.2010)

Definiamo un processo come ergodico se: (5.3, 340)

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow{L^2} E(X_t)$$

Occupiamoci ora della:

STIMA DEI PARAMETRI (5.4, 345 - 346)

Partendo dal solito campione $(X_1, \dots, X_N)$, si deve determinare:

(i) di quale modello si tratta?

AR(k), MA(l), ARMA (k, l)

(ii) quali sono i parametri?

Nel caso per esempio si tratti di un AR(k), della forma:

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_k X_{t-k} = \varepsilon_t$$

sono da stimare i parametri $a_1, \dots, a_t, \sigma^2_\varepsilon$, ed eventualmente μ se il processo è a media incognita:

$$(X_t - \mu) + a_1 \cdot (X_{t-1} - \mu) + \dots + a_k \cdot (X_{t-k} - \mu) = \varepsilon_t$$

Sebbene logicamente si pensi di determinare prima (i) e poi (ii), in realtà si procede al contrario.

STIMA DI MODELLI AR (k)

$$E(X_t) = \mu$$

$$(X_t - \mu) + a_1 \cdot (X_{t-1} - \mu) + \dots + a_k \cdot (X_{t-k} - \mu) = \varepsilon_t$$

Hp Stazionarietà

$$d(z) = 1 + a_1 \cdot z + \dots + a_k \cdot z^k$$

ha radici tutte fuori dal cerchio di raggio 1

Ora notiamo una somiglianza con il modello lineare classico:

(*) $y_i = \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i} + \dots + \theta_p x_{pi} + \varepsilon_i \qquad i = 1, \dots, N$

(**) $X_t = \mu - a_1 (X_{t-1} - \mu) - \dots - a_k (X_{t-k} - \mu) + \varepsilon_t$

Si ha:

$$Q(\mu, a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=k+1}^{N} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=k+1}^{N} \left[(X_i - \mu) + a_1 \cdot (X_{i-1} - \mu) + \dots + a_k \cdot (X_{i-k} - \mu) \right]^2$$

Facciamo ora un riferimento ad un caso classico.

Se (ε_i) è un processo gaussiano, allora, nella statistica elementare, il metodo di massima verosimiglianza e il metodo dei minimi quadrati restituiscono lo stesso stimatore.

Ora, consideriamo $(\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_N)$ estratti da un processo gaussiano. (5.4, 347-354)

Possiamo scrivere:

$$f(y_{k+1}, \dots, y_N) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}}\right)^{N-k} \cdot \exp\left[-\frac{\sum_{i=k+1}^{N} y_i^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right]$$

$$f(y_1, \dots, y_{N-k}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}}\right)^{N-k} \cdot \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{N-k} y_i^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right]$$

Nel nostro caso:

$$g(x_{k+1}, \dots, x_N) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}}\right)^{N-k} \cdot \exp\left[-\frac{\sum_{i=k+1}^{N}[(x_i-\mu)+a_1\cdot(x_{i-1}-\mu)+\dots+a_k\cdot(x_{i-k}-\mu)]}{2\sigma_\varepsilon^2}\right]$$

$$\log L(\mu, a_1, \dots, a_k) = -(N-k)\cdot\log\sqrt{\sigma_\varepsilon^2\cdot 2\pi} - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\cdot\sum_{i=k+1}^{N}\left[(x_i-\mu)+a_1\cdot(x_{i-1}-\mu)+\dots+a_k(x_{i-k}-\mu)\right]^2$$

$\hat{\mu}$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log L = \sum\frac{\partial}{\partial\mu}([\,]^2) = \sum 2[\,][\,]'$$

$$= \sum_{i=k+1}^{N} 2\left[(x_i-\mu)+a_1\cdot(x_{i-1}-\mu)+\dots+a_k(x_{i-k}-\mu)\right]\cdot(-1-a_1-\dots-a_k)$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log L = 0 \iff \sum_{i=k+1}^{N}\left[(x_i-\mu)+a_1\cdot(x_{i-1}-\mu)+\dots+a_k\cdot(x_{i-k}-\mu)\right] = 0$$

$$\sum_{i=k+1}^{N} x_i - (N-k)\mu + a_1\cdot\sum_{i=k+1}^{N} x_{i-1} - (N-k)\,a_1\mu + \dots + a_k\cdot\sum_{i=k+1}^{N} x_{i-k} - (N-k)\,a_k\mu$$

$$\hat{\mu} = \frac{\frac{1}{N-k}\cdot\sum_{i=k+1}^{N} x_i + \frac{1}{N-k}\cdot a_1\cdot\sum_{i=k+1}^{N} x_{i-1} + \dots + \frac{1}{N-k}\cdot a_k\cdot\sum_{i=k+1}^{N} x_{i-k}}{(1+a_1+\dots+a_k)}$$

$\hat{a}_j$

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\log L = 2\sum[\,][\,]'$$

$$= 2\cdot\sum_{i=k+1}^{N}\left[(x_i-\mu)+a_1\cdot(x_{i-1}-\mu)+\dots+a_k\cdot(x_{i-k}-\mu)\right](x_{i-j}-\mu)$$

$$= 2\cdot\sum_{i=k+1}^{N}(x_i-\mu)(x_{j-k}-\mu) + a_1\cdot\sum_{i=k+1}^{N}(x_{i-1}-\mu)(x_{i+j}-\mu) + \dots + a_k\cdot\sum_{i=k+1}^{N}(x_{i-k}-\mu)(x_{i-j}-\mu)$$

$$\hat{R}(j) = \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N-|r|}(x_i-\bar{x})(x_{i+|r|}-\bar{x})$$

$j=1,\dots,k$ $\quad N\cdot\hat{R}_B(1) + a_1\cdot\hat{R}_B\cdot N\cdot(j-1) + \dots + a_k\cdot N\cdot\hat{R}_B(j-k) = 0$

equazioni di Yule - Walker

$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$

$$\sigma_\varepsilon^2 = Var(\varepsilon_t) \quad \forall t$$

$$\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \simeq \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N-k}\cdot\sum_{i=k+1}^{N}\varepsilon_i^2$$

è lo stesso che si ottiene dalla ML sotto ipotesi di gaussianità

$$\log L(\mu, a_1, \dots, a_k, \sigma_\varepsilon^2) = -(N-k)\cdot\log\sqrt{\sigma_\varepsilon^2\, 2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2_\varepsilon}\sum[\,]^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_\varepsilon^2} = -\frac{N-k\cdot 2\pi}{2\cdot\sigma_\varepsilon^2\cdot 2\pi} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\sigma^2\varepsilon)^2}\cdot\sum[\,]^2 = 0$$

da cui si ricava:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sum[\,]^2}{N-k}$$

In alternativa si utilizza talvolta:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N-2k-1}\cdot Q(\hat{\mu}, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k)$$

Esempi

AR(1)

$$\hat{R}_B(1) + a_1\cdot\hat{R}_B(0) = 0$$

$$\hat{a}_1 = -\frac{\hat{R}_B(1)}{\hat{R}_B(0)} = -\hat{\rho}_B(1)$$

$$\rho(r) = -a_1^{|r|} \qquad \rho(1) = -a_1$$

AR(2)

$$\hat{R}_B(1) + a_1\cdot\hat{R}_B(0) + a_2\cdot\hat{R}_B(-1) = 0$$

$$\hat{R}_B(2) + a_1\cdot\hat{R}_B(1) + a_2\cdot\hat{R}_B(0) = 0$$

STIMA DI MODELLI MA(ℓ) (5.4, 354-359)

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_\ell \varepsilon_{t-\ell} = \mu + \beta(B) \cdot \varepsilon_t$$

$$\beta(z) = 1 + b_1 z + \dots + b_\ell z^\ell$$

<u>MA(1)</u>

$$X_{t-1} = \mu + \varepsilon_{t-1} + b_1 \cdot \varepsilon_{t-2}$$

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + b_1 \cdot \varepsilon_{t-1}$$

$$X_{t+1} = \mu + \varepsilon_{t+1} + b_1 \cdot \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = X_t - \mu - b_1 \cdot \varepsilon_{t-1} = X_t - \mu - b_1 (X_{t-1} - \mu - b_1 \cdot \varepsilon_{t-2})$$

[Box-Jenkins, 1970]

$$\varepsilon_1 = X_1 - \mu \qquad \varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \dots = \varepsilon_{-(\ell-1)} = 0$$

$$\varepsilon_2 = X_2 - \mu - b_1 \varepsilon_1$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_N = X_N - \mu - b_1 \varepsilon_{N-1} - \dots - b_\ell \varepsilon_{N-\ell}$$

(ε_t) gaussiani

$$\log L(\mu, b_1, \dots, b_\ell) = \text{const} - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} Q(\mu, b_1, \dots, b_\ell)$$

Si trova numericamente il valore di Q che massimizza.

STIMA DI MODELLI MA(ℓ)

$$\varepsilon_{1-\ell} = \varepsilon_{1-\ell}$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_1 = X_1 - b_1 \varepsilon_0 - \dots - b_\ell \varepsilon_{1-\ell}$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_N = X_N - b_1 \varepsilon_{N-1} - \dots - b_\ell \varepsilon_{N-\ell}$$

$$\varepsilon = LX + M\varepsilon^*$$

$$L = \begin{bmatrix} \boxed{0} & & \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \boxed{} \end{bmatrix}$$

$$J = 1$$

Se ε_t è processo gaussiano:

$$f(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_\varepsilon^2}}\right)^{N+\ell} \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon' \cdot \varepsilon}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

$$g(X, \varepsilon^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_\varepsilon^2}}\right)^{N+\ell} \cdot \exp\left(-\frac{(LX + M\varepsilon^*)'(LX + M\varepsilon^*)}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

Chiamiamo:

$\hat{\varepsilon}_*$ il valore di ε_* che minimizza $(LX + M\varepsilon_*)'(LX + M\varepsilon_*)$ fissati gli X. Sviluppiamo in serie di Taylor:

$$\tilde{Q}(\mu, b_1, \dots, b_\ell) = (LX + M \cdot \hat{\varepsilon}_*)'(LX + M \cdot \hat{\varepsilon}_*) + (\varepsilon_* - \hat{\varepsilon}_*)' M'M (\varepsilon_* - \hat{\varepsilon}_*)$$

il cui sviluppo è esatto poiché tutti i termini di grado superiore sono nulli. Si ottiene:

$$g(X, \varepsilon^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}}\right)^{N+\ell} \cdot \exp\left(-\frac{(LX + M\hat{\varepsilon}_*)'(X + M \cdot \hat{\varepsilon}_*)}{2\sigma_\varepsilon^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(\varepsilon_* - \hat{\varepsilon}_*)' M'M (\varepsilon_* - \hat{\varepsilon}_*)}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

Ne segue che $\hat{\varepsilon}_* = E(\varepsilon_* | X)$, e dunque:

$$E[\varepsilon | X] = E[LX + M\varepsilon_* | X] = LX + M\hat{\varepsilon}_*$$

Si tratta ora dunque di minimizzare $(LX + M\hat{\varepsilon}_*)'(LX + M\hat{\varepsilon}_*)$

$$Q(___ \hat{\varepsilon}_*) = \sum_{i=1-\ell}^{N} \hat{\varepsilon}_i^2 \qquad \hat{\varepsilon}_t = E[\varepsilon_t | X]$$

BACK FORECASTING

$$X_1, \dots, X_N$$

$$\downarrow$$

$$X_{1-\ell}, \dots, X_0$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon_{1-\ell}, \dots, \varepsilon_0, X_1, \dots, X_N$$

STIMA DI σ_ε^2

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N} \cdot Q(\hat{\mu}, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_\ell)$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N-(\ell+1)} \cdot Q(\hat{\mu}, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_\ell) \qquad \text{variante alternativa}$$

- STIMA DI MODELLI ARMA(k, ℓ) (5.4, 359-362)

$$(X_t - \mu) + a_1 \cdot (X_{t-1} - \mu) + \dots + a_k \cdot (X_{t-k} - \mu) = \varepsilon_t + b_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \dots + b_\ell \cdot \varepsilon_{t-\ell}$$

Il modello deve essere innanzitutto identificabile, ovvero due set di parametri distinti devono avere proprietà probabilistiche distinte.

Ciò viene garantito se:

1) $\alpha(z) = 1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_k z^k$

$\beta(z) = 1 + b_1 z + \dots + b_\ell z^\ell$

non hanno fattori in comune

2) le radici di $\alpha(z)$ e $\beta(z)$ cadono fuori dal cerchio di raggio 1.

3) $a_k \neq 0$ $\quad b_\ell \neq 0$

Dobbiamo porre:

$\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \dots = \varepsilon_{1-\ell} = 0$ (condizione richiesta nei modelli MA(ℓ))

$\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_k = 0$ (condizione richiesta nei modelli AR(k))

Sarà poi:

$$\varepsilon_{k+1} = (X_{k+1} - \mu) + a_1 \cdot (X_k - \mu) + a_2 \cdot (X_{k-1} - \mu) + \dots + a_k \cdot (X_1 - \mu)$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_{k+\ell+1} = (X_{k+\ell+1} - \mu) + a_1 \cdot (X_{k+\ell} - \mu) + \dots + a_k \cdot (X_{\ell+1} - \mu) - b_1 \cdot \varepsilon_{k+\ell} - \dots - b_\ell \cdot \varepsilon_{k+1}$$

La ML esatta si ottiene come $Q = \sum \hat{\varepsilon}_i^2$, ma non è molto significativo come metodo, poiché comunque gli $\hat{\varepsilon}_i$ non possono essere calcolati esattamente con facilità, e vengono pertanto nella pratica spesso approssimati.

Si utilizza pertanto generalmente il metodo di <u>REVFEIM</u>:

$$h(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \cdot \frac{|1 + b_1 \cdot e^{-i\omega} + \dots + b_\ell \cdot e^{-i\ell\omega}|^2}{|1 + a_1 \cdot e^{-i\omega} + \dots + a_k \cdot e^{-ik\omega}|^2}$$

$$I_X^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{r=1-N}^{N-1} \hat{R}(r) \cdot e^{-i\omega r} \quad \text{(modified periodogram)}$$

$$E(I_X^*(\omega)) \sim h(\omega)$$

$$I_X^*(\omega) = h(\omega) + \xi(\omega) \qquad E(\xi(\omega)) = 0$$

ORDINE DEL MODELLO (5.4, 370 - 374)

Metodo della varianza dei residui

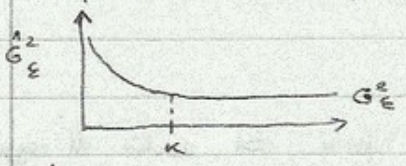
AR(k) $\quad X_t + a_1 \cdot X_{t-1} + \dots + a_k \cdot X_{t-k} = \varepsilon_t$

Sia $c < k$.

$$X_t + a_1 \cdot X_{t-1} + \dots + a_c \cdot X_{t-c} = \varepsilon$$

dove $\varepsilon = \varepsilon_t - a_k X_{t-k} - \dots - a_{c+1} X_{t-c-1}$

Si ha che questa variabilità è maggiore della precedente, poiché vengono aggiunti elementi.



$\hat{\sigma}^2_\varepsilon$ scende fino a k per poi stabilizzarsi; lo studio del grafico permette di determinare il valore di k.

Definiamo ora la funzione di autocorrelazione parziale $\rho(X_t, X_{t+m})$ come l'autocorrelazione supposti $X_{t+1}, \dots, X_{t+m-1}$ costanti.

Si ha $\pi(m) = -a_m$, il primo che si annulla può essere utilizzato per stabilire l'ordine del metodo.

Metodo AIC di Akaike:

$$AIC(q) = -2 \cdot \log(\text{maximized likel}) + 2q$$

$$L = -\frac{n}{2} \log \sigma^2_\varepsilon - \frac{1}{2\sigma^2_\varepsilon} Q(\theta)$$

$Q(\hat{\theta})$ valore massimo Q; con $\hat{\theta}$ stimatore di max likelyhood

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{1}{n} Q(\hat{\theta})$$

$$\hat{L} = -\frac{n}{2} \log \hat{\sigma}^2_\varepsilon - \frac{n}{2} \qquad AIC(q) = -\frac{n}{2} \cdot \log \hat{\sigma}^2_\varepsilon - q$$

Per N grandi, FPE e AIC sono equivalenti.

Consideriamo infatti: $FPE(q) = \frac{n+q}{n-q} \hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{n+q}{n-q} \cdot \frac{1}{N-q} Q$.

Possiamo scrivere:

$$\log FPE(q) = \log\left[\left(\frac{1+\frac{q}{n}}{1-\frac{q}{n}}\right) \hat{\sigma}^2_\varepsilon\right] = \log\left(1+\frac{q}{n}\right) - \log\left(1-\frac{q}{n}\right) + \log \hat{\sigma}^2_\varepsilon$$

per $n \to +\infty$: $\quad 2 \cdot \frac{q}{n} + \log \hat{\sigma}^2_\varepsilon$

$$2 \cdot \frac{AIC(q)}{n} = \log \hat{\sigma}^2_\varepsilon - 2 \cdot \frac{q}{n}$$

$AIC(q) \sim n \cdot \log FPE(q)$ per n grande

STIMA NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA (6.1, 390 - 394)

$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} h(\theta)\, d\theta$ spettro integrato

$h(\theta) = \lim_{T \to +\infty} E\left[\left(\frac{G_T(\omega)}{T^2}\right)^2\right]$ densità spettrale

Processo a spettro puramente discreto

$$X_t = \sum_{i=1}^{k} A_i \cos(\omega_i t + \phi_i) + \varepsilon_t \qquad t = 1, 2, 3, \dots$$

k, $(A_i)_{i=1,\dots,k}$, $(\omega_i)_{i=1,\dots,k}$ costanti, $(\phi_i)_{i=1,\dots,k}$ v.a. $U[-\pi, \pi]$

ε_t processo puramente casuale di parametri $(0, \sigma_\varepsilon^2)$

I parametri da determinare sono $k, A_i, \omega_i, \sigma_\varepsilon^2$.

Supponiamo inizialmente di conoscere k e le frequenze ω_i.

Abbiamo che:

$$X_t = \sum_{i=1}^{k} A_i \cdot \cos \omega_i t \cdot \cos \phi_i - A_i \cdot \sin \omega_i t \cdot \sin \phi_i + \varepsilon_t$$

$$= \sum_{i=1}^{k} A_i' \cdot \cos \omega_i t + B_i' \cdot \sin \omega_i t + \varepsilon_t$$

dove $A_i' = A_i \cdot \cos \phi_i$, $B_i' = -A_i \cdot \sin \phi_i$,

e allora $\sqrt{A_i'^2 + B_i'^2} = A_i$ $\quad \phi_i = \arctan\left(-\frac{B_i'}{A_i'}\right)$

Per stimare i parametri si utilizza il metodo dei minimi quadrati:

$$Q = \sum_{t=1}^{N} \left| X_t - \sum_{i=1}^{k} (A_i' \cos \omega_i t + B_i' \sin \omega_i t) \right|^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A_j'} = 0 \iff \sum_{t=1}^{N} 2\left[X_t - \sum_{i=1}^{k} A_i' \cos \omega_i t + B_i' \sin \omega_i t\right](-\sin \omega_j t) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{N} 2 X_t \cdot \cos \omega_j t = \sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} A_i' \cdot \cos \omega_i t \cdot \cos \omega_j t + \sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} B_i' \cdot \sin \omega_i t \cdot \cos \omega_j t$$

$$\frac{\partial Q}{\partial B_j'} = 0 \iff \sum_{t=1}^{N} X_t \cdot \sin \omega_j t = \sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{k} A_i' \cdot \cos \omega_i t \cdot \sin \omega_j t + \sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{k} B_i' \cdot \sin \omega_i t \cdot \sin \omega_j t \qquad j = 1, \dots, k$$

Semplifichiamo ora un attimo il contesto supponendo che le frequenze siano tutte multiple di $\frac{2\pi}{N}$

$$\omega_i = \frac{2\pi}{N} p_i \qquad p_1, \dots, p_k \in \left[0, \frac{N}{2}\right]$$

$$\sum_{t=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi}{N} pt\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N} qt\right) = \begin{cases} 0 & 0 \le p \ne q \le \frac{N}{2} \\ N/2 & 0 < p = q < \frac{N}{2} \\ N & p = q = 0, \ p = q = \frac{N}{2} \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^{N} \sin\left(\frac{2\pi}{N} pt\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N} qt\right) = \begin{cases} 0 \\ N/2 \\ N \end{cases} \quad \text{analogamente a quanto sopra}$$

$$\sum_{t=1}^{N} \sin\left(\frac{2\pi}{N} pt\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N} qt\right) = 0$$

se $\omega_i = \frac{2\pi}{N} p_i$ $\quad p_i \ne 0$ e $p_i \ne \frac{N}{2}$ $\quad N$ pari

$$\sum_{t=1}^{N} X_t \cos \omega_j t = \frac{N}{2} A_j'$$

$$\hat{A}_j' = \frac{2}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N} X_t \cdot \cos \omega_j t$$

$$\hat{B}_j' = \frac{2}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N} X_t \cdot \sin \omega_j t$$

$$E(\hat{A}_j') = \frac{2}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N} E(X_t) \cdot \cos \omega_j t$$

$$= \frac{2}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{k} A_i' \cdot \cos \omega_i t + B_i' \cdot \sin \omega_i t\right) \cdot \cos \omega_j t$$

$$= \frac{2}{N} \cdot \frac{N}{2} \cdot A_j' = A_j'$$

$$Var(\hat{A}_j') = \frac{4}{N^2} \cdot \sum_{t=1}^{N} Var(X_t) \cdot \cos^2 \omega_j t = \frac{4}{N^2} \cdot \sum_{t=1}^{N} Var(\varepsilon_t) \cdot \cos^2 \omega_j t$$

$$= \frac{4}{N^2} \cdot \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{t=1}^{N} \cos^2 \omega_j t = \frac{2}{N} \cdot \sigma_\varepsilon^2$$

$$Cov(\hat{A}_j', \hat{B}_j') = 0$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N - 2k} Q$$

Proviamo ora a trattare il caso generale, in cui le frequenze sono non necessariamente multiple di $\frac{2\pi}{N}$.

In tal caso si utilizzano principalmente metodi numerici

Nel caso in cui invece k e le w_i non siano conosciute, (6.1, 394-396)

si procede considerando che:

- se $w_1 = \hat{w}_1$ (o circa), $\hat{A}_1'$ è vicino A_1', $\hat{B}_1'$ è vicino B_1'.

$$A_1'^2 + B_1'^2 \neq 0 \Rightarrow \hat{A}_1'^2 + \hat{B}_1'^2 \neq 0$$

- se $\hat{w}_1 \neq w_1$

$$\hat{A}_1'^2 + \hat{B}_1'^2 = 0 \quad \text{circa}$$

$$X_t = \sum_{i=1}^{k} (A_i' \cdot \cos w_i t + B_i' \cdot \sin w_i t) + \sum_{j=1}^{k_2} (\bar{A}_j' \cdot \cos w_j t + \bar{B}_j' \cdot \sin w_j t)$$

dove $\bar{A}_j = 0$ e $\bar{B}_j = 0$

Il periodogramma in questo caso è:

$$I_N(w) = A^2(w) + B^2(w) = \frac{2}{N} \cdot \left| \sum_{t=1}^{N} X_t \cdot e^{-iwt} \right|^2$$

$$A(w) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{t=1}^{N} X_t \cdot \cos wt \qquad B(w) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{t=1}^{N} X_t \cdot \sin wt$$

$$w_p = \frac{2\pi}{N} p \qquad I_p = I_N\left(\frac{2\pi}{N} p\right)$$

se $w_p = w_i$ per qualche i

$$A(w_p) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{t=1}^{N} X_t \cdot \cos w_p t$$

$$\hat{A}_j' = \frac{2}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N} X_t \cdot \cos w_j t$$

$$B(w_p) = \sqrt{\frac{N}{2}} \cdot \hat{B}_i'$$

$$E(I_p) = E\left(\frac{N}{2} \hat{A}_i'^2 + \frac{N}{2} \hat{B}_i'^2\right) = \frac{N}{2}\left[E(\hat{A}_i'^2) + E(\hat{B}_i'^2)\right]$$

$$= \frac{N}{2}\left[\frac{2}{N}\sigma_\varepsilon^2 + A_i'^2 + \frac{2}{N}\sigma_\varepsilon^2 + B_i'^2\right] = 2\sigma_\varepsilon^2 + \frac{N}{2}(A_i'^2 + B_i'^2) \text{ se } w_p = w_i$$

$$E(I_p) = 2\sigma_\varepsilon^2 \quad \text{se } w_p \neq w_i \ \forall i$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N-2k-1} Q \qquad (AR(k))$$

poiché $N-k$: n° di osservazioni realmente usate per stimare i parametri

$k+1$: n° di parametri da stimare

$$\hat{\hat{\sigma}}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N-k} Q$$

- Metodo della varianza dei residui
- $FPE(k) = \frac{n+k}{n-k} \cdot \hat{\hat{\sigma}}_\varepsilon^2 \qquad \hat{\hat{\sigma}}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} Q$

- $AIC(q) = -2 \cdot \log\left(\begin{matrix}\text{maximized}\\ \text{likelyhood}\end{matrix}\right) + 2 \cdot q \qquad q \,/\, AIC$ è minima

se ε_t è gaussiano:

$$L = -\frac{n}{2} \cdot \log \sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \cdot Q(\theta)$$

$$\hat{L} = -\frac{n}{2} \cdot \log \hat{\hat{\sigma}}_\varepsilon^2 - \frac{n}{2} \qquad \hat{\hat{\sigma}}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} Q$$

dunque:

$$AIC(q) = -2\left(-\frac{n}{2} \log \hat{\hat{\sigma}}_\varepsilon^2\right) + 2q = n \cdot \log \hat{\hat{\sigma}}_\varepsilon^2 + 2q$$

Per n grande, sono equivalenti?

$$AIC(q) \sim n \cdot \log FPE(q)$$

FPE vs metodo della varianza dei residui

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-q} Q = \frac{n}{n-q} \hat{\hat{\sigma}}_\varepsilon^2 \qquad \text{poiché } N-k = n, \ k+1 = q.$$

$$\log \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \log \hat{\hat{\sigma}}_\varepsilon^2 - \log\left(1 - \frac{q}{n}\right) \sim \log \hat{\hat{\sigma}}_\varepsilon^2 + \frac{q}{n}$$

$$n \cdot \log \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \sim n \cdot \log \hat{\hat{\sigma}}_\varepsilon^2 + q$$

Dunque il metodo della varianza dei residui e l'FPE non sono equivalenti, e pertanto non lo sono nemmeno il metodo della varianza dei residui e l'AIC.

PERIODOGRAMMA (6.1, 397-399)

$$I_N(\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{t=1}^{N} X_t \cdot \cos \omega t \qquad B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{t=1}^{N} X_t \cdot \sin \omega t$$

$$I_N(\omega) = \frac{2}{N} \cdot \left| \sum_{t=1}^{N} X_t \cdot e^{-i\omega t} \right|^2$$

- se $A_i = 0 \quad \forall i \qquad \omega_p = \frac{2\pi}{N} p \qquad p = 0, 1, \dots, [N/2]$

$X_t = \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t$ sia gaussiano

$X_t \sim N(0, \sigma_X^2)$

$A(\omega) = N(0, Var(A(\omega)))$

con: $Var(A(\omega)) = \frac{2}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N} Var(X_t) \cdot \cos^2 \omega t = \frac{2}{N} \cdot \sigma_X^2 \cdot \sum_{t=1}^{n} \cos^2 \omega t$

$$= \begin{cases} \frac{2}{N} \cdot \sigma_X^2 \cdot \frac{N}{2} & \omega_p = \frac{2\pi}{N} p, \ p \neq 0, \ p \neq \frac{N}{2} \\ \frac{2}{N} \cdot \sigma_X^2 \cdot N & p = 0, \ p = \frac{N}{2} \end{cases}$$

$$Var((B_\omega)) = \begin{cases} \sigma_X^2 & p \neq 0, \ p \neq \frac{N}{2} \\ 0 & p = 0, \ p = \frac{N}{2} \end{cases}$$

$$Cov(A(\omega_p), B(\omega_q)) = 0 = E\left[\frac{2}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N} E(X_t^2) \cdot \cos \omega_p t \cdot \sin \omega_q t\right]$$

$$Cov(A(\omega_p), A(\omega_q)) = 0 \qquad p \neq q$$

$$Cov(B(\omega_p), B(\omega_q)) = 0$$

In conclusione:

$$I_n(\omega) \sim \chi^2(2) \ \sigma_X^2 \qquad p \neq 0, \ p \neq \frac{N}{2}$$

$$\chi^2(1) \ 2\sigma_X^2 \qquad p = 0, \ p = \frac{N}{2}$$

<u>Lemma</u> Dato $I_N(\omega)$

$\Downarrow$

$$I_N(\omega) = 2 \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} \hat{R}(s) \cos s\omega$$

dove $\hat{R}(s) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N-|s|} X_t X_{t+|s|}$

cioè è la funzione di autocovarianza stimata per X_t.

$$X_t = \sum_{i=1}^{k} A_i \cdot \cos(\omega_i t + \phi_i) + \varepsilon_t$$

$$\phi_i \sim Unif[-\pi, \pi]$$

$$E[A_i \cdot \cos(\omega_i t + \phi_i)] = \int_{-\pi}^{\pi} A_i \cdot \cos(\omega_i t + y) \cdot \frac{1}{2\pi} \, dy$$

Dim. del lemma (6.1, 399-401)

$$I_n(\omega) = \frac{2}{N} \cdot \left| \sum_{t=1}^{N} X_t e^{-i\omega t} \right|^2 = \frac{2}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N} \sum_{r=1}^{N} X_t X_r \cos(t-r)\omega$$

Infatti (vediamo il caso $N = 2$):

$$|a_1 \cdot e^{-ib_1} + a_2 \cdot e^{-ib_2}|^2 = (a_1 \cdot e^{-ib_1} + a_2 \cdot e^{-ib_2})(a_1 \cdot e^{ib_1} + a_2 \cdot e^{ib_2})$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 e^{-i(b_1-b_2)} + a_1 a_2 e^{i(b_1-b_2)}$$ · si moltiplica

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 (e^{-i(b_1-b_2)} + e^{i(b_1-b_2)})$$ · si raccoglie

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(b_1 - b_2)$$ · da $\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$

$$= a_1 \cdot a_1 \cdot \cos(b_1-b_1) + a_2 \cdot a_2 \cdot \cos(b_2-b_2) + a_1 \cdot a_2 \cdot \cos(b_1-b_2) + a_2 \cdot a_1 \cdot \cos(b_2-b_1)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_i \cdot a_j \cdot \cos(b_i - b_j)$$

Tornando a prima:

$$I_n(\omega) = \frac{2}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N} \sum_{r=1}^{N} X_t X_r \cos(t-r)\omega =$$

$$= \frac{2}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N-|s|} \sum_{s=1-N}^{N-1} (X_t \cdot X_{t+|s|}) \cos s\omega$$

$$= 2 \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} \hat{R}(s) \cdot \cos s\omega$$

Teorema

$\forall \omega$, ~~$E(I_n(\omega))$~~

$$E(I_n(\omega)) = -2\sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{k} A_i^2 \left[\frac{\sin^2(\frac{N}{2}(\omega+\omega_i))}{\sin^2(\frac{1}{2}(\omega+\omega_i))} + \frac{\sin^2(\frac{N}{2}(\omega-\omega_i))}{\sin^2(\frac{1}{2}(\omega-\omega_i))} \right]$$

Dim.

$$E(I_n(\omega)) = E\left[2 \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} \hat{R}(s) \cos s\omega\right]$$

$$= 2 \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} E(\hat{R}(s)) \cos s\omega$$ · filtra

$$= 2 \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) R_X(s) \cos s\omega$$ · valore della media

$$= 2 \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) E(X_t X_{t+s}) \cos s\omega$$ · cov $\Rightarrow$ prod. medie

$$= 2 \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) E((z_t + \varepsilon_t)(z_{t+s} + \varepsilon_{t+s})) \cos s\omega$$ · $X_t = z_t + \varepsilon_t$

$$= \quad '' \quad [E(z_t z_{t+s}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}) + E(z_t \varepsilon_{t+s}) + E(z_{t+s} \varepsilon_t)] \quad ''$$

$$= \quad '' \quad [E(z_t z_{t+s}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+s})] \quad ''$$ · centrali nulli

$$= \quad '' \quad [R_z(s) + R_\varepsilon(s)] \quad ''$$ · prod. medie $\Rightarrow$ cov

$$= \quad '' \quad \left[\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k} A_i^2 \cos \omega_i s + \sigma_\varepsilon^2 \cdot \delta_{0,s}\right] \quad ''$$

$$E(I_n(\omega)) = 2 \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k} A_i^2 \cos \omega_i s + \sigma_\varepsilon^2 \delta_{0,s}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1-N}^{N-1} \left(\left(1 - \frac{|s|}{N}\right) A_i^2 \cos \omega_i s \cos \omega s\right) + 2\sigma_\varepsilon^2$$

Per un risultato noto:

$$\sum_{s=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \cos s\vartheta = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin^2(N\vartheta/2)}{\sin^2(\vartheta/2)} = 2\pi F_N(\vartheta)$$ (nucleo di Fejér)

e ora; poiché $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cdot \cos A \cdot \cos B$:

$$E(I_n(\omega)) = \sum_{i=1}^{k} A_i^2 \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos(\omega_i + \omega)s + \cos(\omega_i - \omega)s) + 2\sigma_\varepsilon^2$$

Infine si applica il risultato noto e si giunge alla tesi.

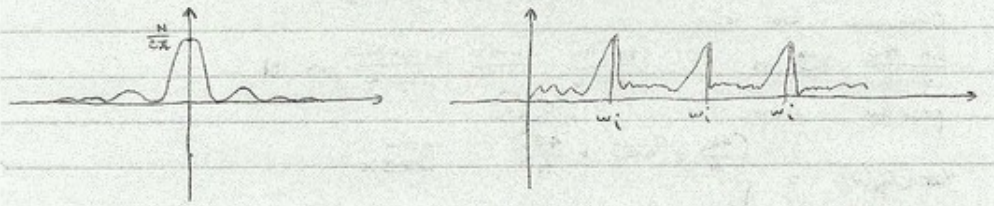
CONSIDERAZIONI SUL NUCLEO DI FEJER (6.1, 401 – 405)

$$F_N(\theta) = \frac{1}{2\pi N} \cdot \frac{\sin^2(N\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}$$

$$\lim_{\theta \to 0} F_N(\theta) = \frac{1}{2\pi N} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2(N\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} = \frac{1}{2\pi N} \cdot \frac{(N\theta/2)^2}{(\theta/2)^2} = \frac{1}{2\pi N} \cdot N^2 = \frac{N}{2\pi}$$

$$\lim_{\theta \to +\infty} F_N(\theta) = 0$$

$$F_N(\theta) \overset{\theta \to +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{N}\right)$$



CALCOLO DELLE COVARIANZE

Teor. Se le (X_t) sono indipendenti con K_4 finito:

$$Cov(I_N(w_1), I_N(w_2)) = \frac{4k_4}{N} + \frac{4\sigma_X^4}{N^2}\left[\frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}(w_1+w_2)\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}(w_1+w_2)\right)} + \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}(w_1-w_2)\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}(w_1-w_2)\right)}\right]$$

Dim.

$$Cov(I_N(w_1), I_N(w_2)) = Cov\left(2 \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} \hat{R}(s) \cdot \cos w_1 s,\ 2 \cdot \sum_{r=1-N}^{N-1} \hat{R}(r) \cdot \cos w_2 r\right)$$

$$= Cov\left(4 \cdot \sum_{s=0}^{N-1} a(s) \cdot \hat{R}(s) \cdot \cos w_1,\ 4 \cdot \sum_{r=0}^{N-1} a(r) \cdot \hat{R}(r) \cdot \cos w_2 r\right)$$

dove $a(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s=0 \\ 2 & \text{se } s \neq 0 \end{cases}$

$$= 4 \cdot \sum_s \sum_r a(s)\, b(r) \cos(sw_1) \cos(rw_2)\, Cov(\hat{R}(s), \hat{R}(r)) \qquad = 0 \text{ se } r \neq s$$

$$= (*)$$

Ora:

$$Cov(\hat{R}(s), \hat{R}(s+v)) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=1-(N-s)}^{(N-s-v)-1} \left(1 - \frac{\eta(m)+s+v}{N}\right) \cdot \left\{R(m)R(m+v) + R(m+v+s)R(m-s) + k_4(m,s,v)\right\}$$

$$4 \cdot \sum_s a(s)\, b(s) \cos(sw_1) \cos(sw_2)\, Cov(\hat{R}(s), \hat{R}(s))$$

$$R(s) = \begin{cases} 0 & s \neq 0 \\ Var(X_t) = \sigma_X^2 & s = 0 \end{cases}$$

$$k_4(m,s,v) = \begin{cases} \mu_4 - 3\sigma_X^4 & m=s=v=0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} 0 & v \neq 0 \\ \frac{1}{N}\left(1 - \frac{s}{N}\right)\left[R^2(0) + k_4(0,s,0)\right] & v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{N}\left[R^2(0) + k_4\right] & s = 0 \quad (\hat{R}(0), \hat{R}(0)) \\ \frac{1}{N}\left(1 - \frac{s}{N}\right) R^2(0) & s \neq 0 \quad (\hat{R}(s), \hat{R}(s)) \quad s \neq 0 \end{cases}$$

$$R^2(0) = \sigma_X^4$$

$$= \frac{4k_4}{N} + 2 \cdot \frac{4\sigma_X^4}{N} + \frac{4\sigma_X^4}{N} \cdot \sum_{s=1}^{N-1} 4\left(1 - \frac{s}{N}\right)\left[\cos(w_1 s) \cdot \cos(w_2 s)\right]$$

Usando le formule di addizione e sottrazione e riscrivendo sotto forma di nucleo di Fejer si giunge alla tesi.

Se $w_1 = w_2 = w$:

$$Var(I_N(w)) = \frac{4k_4}{N} + \frac{4\sigma_X^4}{N^2}\left[\frac{\sin^2 Nw}{\sin^2 w} + \frac{\sin^2 N(w_1-w_2)}{\sin^2(w_1-w_2)}\right]$$

Osservando ora che:

$$\frac{\sin Nw}{\sin w} \overset{w \to 0}{\sim} N \qquad \frac{\sin Nw}{\sin w} \xrightarrow{w \to \pi} \frac{N \cdot \cos Nw}{\cos w} \sim N$$

possiamo scrivere:

$$Var(I_N(w)) = \begin{cases} \frac{4k_4}{N} + 4\sigma_X^4 + \frac{4\sigma_X^4}{N^2} & w \neq 0,\ w \neq \pm\pi \quad (\cdot N^2 + 1) \\ \frac{4k_4}{N} + 8\sigma_X^4 + O\left(\frac{1}{N^2}\right) & w = 0,\ w = \pm\pi \quad (\cdot 2N^2) \end{cases}$$

Se le (X_t) sono gaussiane, $k_4 = 0$, e si ottengono i risultati già trovati.

Notare che per N grande il termine $\frac{4k_4}{N}$ diventa piccolo e pertanto le stesse formule usate per le gaussiane possono essere utilizzate qui a meno di un errore dell'ordine di $O\left(\frac{1}{N}\right)$.

TEST SULLE ORDINATE DEL PERIODOGRAMMA (6.1, 406-407)

Procedimento

Plot del periodogramma a $\omega_p = \frac{2\pi}{N} \cdot p$

$I_p = I_N(\omega_p) \qquad p = 0, \dots, [\frac{N}{2}]$

Test per la frequenza corrispondente al picco più alto

$H_0: \quad A_i = 0 \quad \forall i \implies X_t = \varepsilon_t$

$H_1: \quad \omega_i$ è una frequenza del modello

$A_i \neq 0$ per un qualche i

(03.05.2010)

Il test si svolge sulla ordinata più alta del periodogramma.

Supponiamo $X_t = \varepsilon_t$ gaussiano.

Consideriamo $p = 1, \dots, [N/2]$ con N dispari, escludendo eventualmente anche l'ultimo se N è pari. In questo modo, escludendo $p = 0$, $p = \frac{N}{2}$, tutte le v.a. I_p hanno la stessa distribuzione.

$I_p \sim \sigma_x^2 \cdot \chi^2(2)$ dove $I_p = I_N(\omega_p)$, $\omega_p = \frac{2\pi}{N} \cdot p$, $p = 0, \dots, [\frac{N}{2}]$

$\frac{I_p}{\sigma_x^2} \sim \chi^2(2)$

Sia $\gamma = \max_{p=1\dots[\frac{N}{2}]} I_p / \sigma_x^2$. Allora:

$$P(\gamma < x) = P\left(\max_{1 \le p \le [\frac{N}{2}]} I_p/\sigma_x^2 < x\right) = P\left(I_1/\sigma_x^2 < x, \dots, I_{[\frac{N}{2}]}/\sigma_x^2 < x\right)$$

$$= P\left(I_1/\sigma_x^2 < x\right) \cdot \dots \cdot P\left(I_{[\frac{N}{2}]}/\sigma_x^2 < x\right)$$

$$= \left(1 - e^{-x/2}\right)^{[N/2]}$$

La regione critica è data da $\{\gamma > c\}$. Al solito, si fissa α piccolo, e si calcola $P(\gamma > c) = \alpha$.

Si rifiuta H_0 se $\max_p I_p > c_\alpha \cdot \sigma_x^2$.

Se si conosce σ_x^2, il test è esatto e termina così.

Nel caso in cui invece non si conosca σ_x^2, lo si può:

(1) stimare

sotto H_0, $E(I_p) = 2\sigma_x^2 \longrightarrow E\left(\sum_{p=1}^{[N/2]} I_p\right) = [N/2] \cdot 2\sigma_x^2$

$$r = \frac{\sum_{p=1}^{[N/2]} I_p}{2 \cdot [N/2]} \quad \text{stimatore di } \sigma_x^2$$

(6.1, 407-410)

Consideriamo la statistica:

$$g^* = \frac{\max_{1 \le p \le [N/2]} I_p}{\sum}$$

Per N sufficientemente grande, g^* ha la stessa distribuzione di γ, e dunque $P(g^* > z) \sim 1 - \left(1 - \exp\left(\frac{z}{2}\right)\right)^{[N/2]}$ (Walker, 1914)

(2) effettuare un test esatto (Fisher, 1929)

$$g = \frac{\max_{1 \le p \le [N/2]} I_p}{\sum_{p=1}^{[N/2]} I_p} \qquad g = 2 \cdot [N/2] \cdot g^*$$

non dipende da σ_x^2

(*) $$P(g > z) = n \cdot (1-z)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}(1-2z)^{n-1} + \dots + (-1)^a \cdot \frac{n!}{a!\,(n-a)!}(1-az)^{n-1}$$

dove $n = [N/2]$, a è il più grande intero / $a < \frac{1}{z}$

$g^* \ge 2ng$

$P(g^* > z) = P(2ng > z) = P\left(g > \frac{z}{2n}\right)$.

A questo consideriamo solo il primo termine della distribuzione esatta:

$P\left(g > \frac{z}{2n}\right) \sim n \cdot \left(1 - \frac{z}{2n}\right)^{n-1} \sim n \cdot \exp\left(-\frac{z}{2}\right)$

che corrisponde allo sviluppo del primo ordine dell'approssimazione di Walker.

Se l'ipotesi nulla va scartata, è però possibile che la frequenza trovata non sia quella effettiva. Tuttavia Hartley nel 1949 dimostrò che questa possibilità ha probabilità inferiore alla significatività del test, e pertanto è trascurabile posto un qualunque livello di significatività.

Nel 1952 Whittle estende la procedura alla seconda ordinata più alta.

$$g' = \frac{\max_{1 \le p \le [\frac{N}{2}]} \; \max_{p \ne p'} I_p, \; I_{p'}}{\sum_{p=1}^{[N/2]} I_p - I_{p'}}$$

$g' \sim g$, ponendo però $(n-1)$ dove compare n.

Se $\frac{A_i^2}{\sigma_\varepsilon^2}$ è grande, gli errori sono piccoli anche se $w_i \ne \frac{2\pi}{N} \cdot p$

(*) $\sum_{i=1}^{a} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot (1-iz)^{n-1}$

ANALISI SECONDARIA

Consideriamo un processo con una sola frequenza:

$$X_t = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$$

e sia ω_1 il risultato dato dal test dell'ordinata max.

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ Dividiamo il campione in s gruppi composti di mT_1 osservazioni.

In ciascun gruppo:

$$\hat{A}'_{0,s} = \frac{2}{mT_1} \cdot \sum_{t=(s-1)mT_1}^{smT_1} \overbrace{A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)}^{X_t} \cdot \cos \omega_1 t$$

$$\hat{B}'_{0,s} = \frac{2}{mT_1} \cdot \sum_{t=(s-1)mT_1}^{smT_1} A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) \cdot \sin \omega_1 t$$

~~$t' = smT_1 - t$~~ Modificando le sommatorie:

$$\hat{A}'_{0,s} = \frac{2}{mT_1} \cdot \sum_{t'=0}^{mT_1} A \cdot \cos(\omega_0 [smT_1 - t'] + \phi) \cdot \cos \omega_1 [smT_1 - t']$$

$$= \frac{2A}{mT_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{t'=0}^{mT_1} \Big[\cos\big(\omega_0 [smT_1 - t'](\omega_0 + \omega_1) + \phi\big) + \cos\big([smT_1 - t'](\omega_1 - \omega_0) - \phi\big) \Big]$$

$$\frac{mT_1}{2}\left(\hat{A}'_{0,s} + i \cdot \hat{B}'_{0,s}\right) = \frac{A}{2} \cdot \sum_{t'=0}^{mT_1} \left(e^{i[(smT_1 - t')(\omega_0 + \omega_1) + \phi]} + e^{i[(smT_1 - t')(\omega_1 - \omega_0) - \phi]} \right)$$

Raccogliamo tutto ciò che contiene t':

$$\sum_{t'=0}^{mT_1} e^{it'(\omega_0 + \omega_1)} = G(\omega_0 + \omega_1)$$

$$\frac{mT_1}{2}\left(\hat{A}'_{0,s} + i \cdot \hat{B}'_{0,s}\right) = \frac{A}{2} \cdot e^{i[(\omega_0 + \omega_1) smT_1 + \phi + \psi_1]} |G(\omega_0 + \omega_1)| + \frac{A}{2} \cdot e^{i[(\omega_1 - \omega_0) smT_1 - \phi + \psi_2]} |G(\omega_1 - \omega_0)|$$

dove $\psi_1 = \arg G(\omega_0 + \omega_1)$, $\psi_2 = \arg G(\omega_1 - \omega_0)$

Se mT_1 è sufficientemente grande, e $\omega_0 \neq 0$, allora $|G(\omega_0 + \omega_1)|$ è piccolo, e dunque ignorabile.

Infatti dalla formula di Dirichlet:

$$|G(\omega_0 + \omega_1)| = \frac{\sin\left(\frac{mT_1}{2} \cdot (\omega_0 + \omega_1)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot (\omega_0 + \omega_1)\right)}$$

$$\frac{mT_1}{2}\left(\hat{A}'_{0,s} + i \cdot \hat{B}'_{0,s}\right) \sim \frac{A}{2} \cdot e^{i[\dots]} \cdot |G(\omega_1 - \omega_0)|$$

$$\frac{\hat{B}'_{0,s}}{\hat{A}'_{0,s}} \simeq \tan\left((\omega_1 - \omega_0) smT_1 - \phi + \psi_2\right)$$

$$\arctan \frac{\hat{B}'_{0,s}}{\hat{A}'_{0,s}} = (\omega_1 - \omega_0) smT_1 - \phi + \psi_2 = \phi_s$$

~~posto~~ poniamo $\beta = \frac{m 2\pi}{\omega_1}(\omega_1 - \omega_0) \longrightarrow \omega_0 = \omega_1 - \frac{\beta}{\frac{m 2\pi}{\omega_1}} = \omega_1 - \frac{\omega_1 \beta}{2\pi m}$

A si stima con l'arctan.

Note di orario: Mer 12 : 9-10, 12-13

(05.05.2010)

SPETTRO CONTINUO

Significa che $h(\omega)$ è definita $\forall \omega$.

Considereremo processi two sided: $X_t = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_u \cdot \varepsilon_{t-u}$, dove:

$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_u^2 < \infty$, $E(X_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$

Dato il campione $X_1, \dots, X_N$, si tratta di stimare

$h(\omega)$ e $f(\omega) = \frac{h(\omega)}{\sigma_X^2}$, con:

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{s=-\infty}^{+\infty} R(s) \cdot e^{-is\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{s=-\infty}^{+\infty} R(s) \cdot \cos(s\omega) \qquad \text{se il processo è reale}$$

$$I_N^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} \hat{R}(s) \cdot \cos(s\omega)$$

$$\hat{R}(s) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{t=1}^{N-|s|} X_t X_{t+|s|}$$

$$I_N^*(\omega) = \frac{1}{4\pi} \cdot I_n(\omega)$$

$$E(I_N^*(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} E(\hat{R}(s)) \cos(s\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) R(s) \cos(s\omega)$$

$$\overset{N \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{s=-\infty}^{+\infty} R(s) \cos(s\omega) \longrightarrow h(\omega)$$

Metodo 2

$$R(s) = \int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta) \cos s\vartheta \, d\vartheta$$

$$E(I_N^*(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{s=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta) \cdot \cos s\vartheta \cdot d\vartheta \cdot \cos s\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta) \cdot \left[\sum_{s=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \cdot \cos s\vartheta \cdot \cos s\omega\right] d\vartheta$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta) \cdot \left[\sum_{s=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \cdot \{\cos s(\vartheta+\omega) + \cos s(\vartheta-\omega)\}\right] d\vartheta$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta) \cdot \left[2\pi \cdot F_N(\vartheta+\omega) + 2\pi \cdot F_N(\vartheta-\omega)\right] d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta) \cdot F_N(\vartheta+\omega) \, d\vartheta + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta) \cdot F_N(\vartheta-\omega) \, d\vartheta$$

per la parità di h, F_N $= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(-\vartheta) \cdot F_N(-\vartheta-\omega) \, d\vartheta + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta) \cdot F_N(\vartheta-\omega) \, d\vartheta$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int_{\pi}^{-\pi} h(\vartheta') \cdot F_N(\vartheta'-\omega) \, d\vartheta' + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta) \cdot F_N(\vartheta-\omega) \, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta') \cdot F_N(\vartheta'-\omega) \, d\vartheta' + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta) \cdot F_N(\vartheta-\omega) \, d\vartheta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta) \cdot F_N(\vartheta-\omega) \, d\vartheta$$

Per $N \to \infty$, $F_N(\vartheta)$ $\begin{cases} \vartheta = 0 & \sim \frac{N}{2\pi} \to +\infty \\ \vartheta \neq 0 & \sim \frac{1}{N} \to 0 \end{cases}$ δ

Si noti che $\int_{-\pi}^{\pi} F_N(\vartheta)\, d\vartheta = 1 \quad \forall N.$

Ne segue che $E(I_N^*(\omega)) \xrightarrow{N \to \infty} h(\omega)$.

Metodo 3

Definiamo un oggetto che chiamiamo trasformata di Fourier finita, nel seguente modo:

$$\mathcal{E}_X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{t=1}^{N} X_t\, e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(A(\omega) - i \cdot B(\omega)\right)$$

Poiché possiamo scrivere:

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\vartheta}\, dZ(\vartheta)$$

varrà:

$$\mathcal{E}_X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \cdot \sum_{t=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\vartheta} \cdot dZ(\vartheta) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \cdot \sum_{t=1}^{N} e^{it(\vartheta - \omega)}\, dZ(\vartheta)$$

Inoltre si ha:

$$\sum_{t=1}^{N} e^{it\phi} = e^{\frac{i(N+1)\phi}{2}} \cdot \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}$$

e pertanto:

$$\mathcal{E}_X(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(N+1)\frac{(\vartheta-\omega)}{2}} \sqrt{F_N(\vartheta - \omega)}\, dZ(\vartheta)$$

$$I_N(\omega) = \frac{2}{N} \left| \sum_t X_t\, e^{-i\omega t} \right|^2$$

Dimostreremo la prossima volta che la I^* è una pessima stima.