ANALISI SUPERIORE

Programma:

(i) teoria delle distribuzioni (funzioni generalizzate)

(ii) trasformate di Fourier, Laplace, convoluzione ...

Materiale didattico:

- Dispense Cordero
- Appunti manoscritti (in Centro Stampa)
- Hörmander, Vol. I The Analysis of linear partial differential equations: distributions theory

Confronto con Ist. di Analisi

(i) Integrale di Lebesgue

(ii) Spazi di Banach - Hilbert (L^1, L^2, L^p, ...)

(iii) Operatori P (equazioni $Pu = f$) ed equazioni non lineari

- DISTRIBUZIONI

Nel corso della storia della matematica, le funzioni sono state considerate in maniera di volta in volta differente

- Nel '700 e nel '800, venivano considerate come espressioni analitiche, come nell'analisi del liceo
- Dalla fine del '800, si iniziò a considerarle come mappe, leggi $f: A \to B$ che associano ad $x \in A$, $f(x) \in B$
- Le discontinuità non venivano viste come troppo ammissibili, in quanto non corrispondenti a fenomeni fisici.
- Nel campo delle equazioni differenziali, tuttavia, anche la definizione come mappa non è sufficiente.
- Si ~~considera~~ provino a considerare non i valori puntuali $f(x_0)$, ma gli integrali $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(x)\,dx$, con cui approssimare per $\varepsilon \to 0$. Questo approccio si utilizza tra il 1900 e il 1950.
- Intorno al 1950 Dirac e Schwartz propongono di non considerare proprio i valori puntuali, ma di assegnare direttamente i valori di $\int_a^b f(x)\,dx$, per ogni scelta di $[a,b]$

- Un esempio di tale distribuzione è quella di Dirac, definita come:

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in]a,b[\\ 0 & \text{se } 0 \notin [a,b] \end{cases}$$

- La delta di Dirac può essere definita anche in maniera multidimensionale, per esempio:

$$\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$\int_D \delta(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{0} \in D \\ 0 & \text{se } \bar{0} \notin D \end{cases}$$

Può essere vista come la densità di massa di un solido puntuale situato nell'origine di massa unitaria.

- Resta il problema di calcolare l'integrale se lo zero è sul bordo. Per esempio, nel caso unidimensionale, quanto vale $\int_0^b \delta(x)\,dx$?
- Per rispondere a questa domanda si introducono le funzioni test. Esse sono funzioni che valgono 1 sullo intervallo $[a,b]$, e agli estremi decrescono molto rapidamente a 0, ma si mantengono C^∞.
Chiamata $\varphi(x)$ una funzione test relativa ad $[a,b]$, possiamo scrivere:

$$\int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\,dx = v(\varphi) \qquad (f = v)$$

$$\int_a^b \delta(x)\,dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\delta(x)\,dx = \varphi(0)$$

Esempio:

$$\frac{d}{dx^2}(|x|) = \frac{d}{dx}(\operatorname{sign} x) = 2\delta$$

- Definiamo alcune notazioni:
  - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω insieme aperto
  - $f: \Omega \to \mathbb{R}$
  - $x = (x_1, \dots, x_n)$
  - $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
  - $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \quad \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ multi-indice
  - $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ (lunghezza del multi-indice)
  - $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$
  - $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$

- $\alpha \leq \beta$ significa che $\alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq \beta_n$
  $\alpha < \beta$ " $\alpha \leq \beta$ e $\alpha \neq \beta$
- $\beta \leq \alpha$
  $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \dots \cdot \binom{\alpha_n}{\beta_n}$
- $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
  $\partial^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} f$

Quest'ultima scrittura non rende chiaro l'ordine di derivazione, che può essere influente se non valgono le ipotesi del teorema di Schwartz, che nel caso multidimensionale può essere definito come:

Teor. Se tutte le derivate parziali di ordine totale m di $f: \Omega \to \mathbb{R}$ esistono e sono continue, allora i risultati non dipendono dall'ordine di derivazione. ∎

In generale però possiamo supporre che sia sempre verificato quando utilizziamo la notazione di sopra.

- $C^0(\Omega)$ funzioni continue in Ω
- $C^m(\Omega)$ f tali che esistono e sono continue $\partial^\alpha f$ per $|\alpha| \leq m$
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$

20.10.2010

Considereremo funzioni f da Ω in $\mathbb{C}$, del tipo $f(x) = f_1(x) + i \cdot f_2(x)$, con $f_1, f_2: \Omega \to \mathbb{R}$

Per la prima parte del corso ci si potrà comunque limitare a funzioni da Ω in $\mathbb{R}$.

Inoltre, per evitare situazioni particolari, considereremo D dominio "regolare", limitato, chiuso, e contenuto in Ω, al posto di Ω stesso. Si potranno pertanto considerare derivate ed integrali del tipo:

$$\partial^\alpha f(x) = \partial^\alpha f_1(x) + i \cdot \partial^\alpha f_2(x)$$

$$\int_D f(x)\,dx = \int_D f_1(x)\,dx + i \cdot \int_D f_2(x)\,dx$$

Possiamo considerare uno sviluppo in serie di Taylor di $f \in C^\infty(\Omega)$:

$$\sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

$\hookrightarrow (x_1-x_1^0)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x_n-x_n^0)^{\alpha_n}$

Def. f è detta analitica in $x_0 \in \Omega$ se la sua serie di Taylor in x_0 converge in un intorno di x_0 e risulta:

$$f(x) = \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha \quad \text{in tale intorno.}$$

Def f è detta analitica (di variabile reale) in Ω se è analitica in ogni punto $x_0 \in \Omega$. Si indica con $\mathcal{A}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni analitiche in Ω.

Oss. $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ si estende ad una funzione analitica di variabile complessa (olomorfa, ...) in $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$, $\tilde{\Omega}|_{\mathbb{R}^n} = \Omega$.

Affermiamo che $\mathcal{A}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ con l'inclusione stretta, ovvero che esiste almeno una funzione infinitamente derivabile ma non analitica, per ogni dominio Ω. Vediamo il caso di $\mathbb{R}$.

Sia $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot 1_{\{x>0\}}$. Un breve studio porta ad avere:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot 1_{\{x>0\}} = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$$

$$D_- f(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 0$$

$$D_+ f(0) = 0$$

$$f' \in C^0(\mathbb{R}) \rightarrow f \in C^1(\mathbb{R})$$

Proseguendo su questa falsariga si arriva a provare che tutte le derivate esistono, e dunque la funzione è C^∞.

Infatti in generale $f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{x^M} e^{-\frac{1}{x}}$ dove $P(x)$ è un polinomio ed M intero dipendenti da n; questo fatto si può provare per induzione, considerato che per $n=1$ è vero con $P(x) \equiv 1$, $M = 2$, mentre supposto vero per n lo è anche per $n+1$ dal momento che:

$$f^{(n+1)}(x) = \left[\frac{P(x)}{x^{M+2}} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P'(x)\,x^M - M x^{M-1} P(x)}{x^{2M}}\right] e^{-\frac{1}{x}} = \frac{Q(x)}{x^N} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0 \;? = \lim_{x\to 0^+} \frac{P(x)}{x^M} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall \quad f^{(n)} \in C^0(\mathbb{R}) \rightarrow f \in C^n(\mathbb{R}) \quad \forall n$$

Dunque $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Enunciamo ora il principio di prosecuzione analitica, nel caso delle funzioni analitiche di variabile reale.

Sia $f \in a(\Omega)$, Ω connesso, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Supponiamo che f si annulli identicamente in un intorno di un punto $x_0 \in \Omega$.

Allora f si annulla in tutto Ω.

Dim.

Partiamo dall'osservazione che Ω connesso significa che gli unici insiemi che sono contemporaneamente aperto e chiuso sono solo ϕ, Ω.

Sia $D := \{x \in \Omega$, esiste un intorno di x in cui f si annulla$\}$

Dimostriamo che D è aperto e chiuso, dunque o è vuoto, oppure coincide con Ω, delle quali sarà vera la seconda per l'ipotesi di annullarsi nell'intorno di un punto x_0.

D è aperto, poiché dalla definizione segue che l'insieme di tali punti coincide con l'unione di intorni.

D è chiuso, per dimostrarlo:

- prendiamo una successione x_j, $j = 1, 2, \dots$ $x_j \in D$. Supponiamo $x_j \to x_0 \in \Omega$, e vogliamo dimostrare che anche $x_0 \in D$.
- Per ogni α, $\partial^\alpha f$ si annulla in un intorno di x_j, in particolare $\partial^\alpha f(x_j) = 0$ $\quad \partial^\alpha f \in C^0(\Omega)$
- Ora, volendo il teorema di relazione di Heine (o della continuità sequenziale), che afferma che, se $x_j \to x_0$ e g è continua, allora $g(x_j) \to g(x_0)$. In questo caso,

$$x_j \to x_0 \implies \partial^\alpha f(x_j) \to \partial^\alpha f(x_0)$$
$$\qquad\qquad\quad \| \qquad\qquad\quad \|$$
$$\qquad\qquad\quad 0 \qquad\qquad\quad 0$$

- A questo punto, poiché $f \in a(\Omega)$, in particolare f analitica in x_0, cioè:

$$0 \equiv \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha = f(x) \quad \text{in un intorno di } x_0$$

(poiché $\partial^\alpha f(x_0) = 0$)

- Questo prova che $x_0 \in D$, dunque D è chiuso, il che prova la nostra tesi.

Cor. Sia Ω connesso. Se $f, g \in A(\Omega)$ e se coincidono in un intorno di x_0, allora coincidono in tutto Ω.

Dim. $h = f - g$

$h \in A(\Omega)$, $h(x) = f(x) - g(x) = 0$ in quell'intorno di x_0

$\Rightarrow h(x) = 0$ in tutto Ω.

$\Rightarrow f(x) = g(x)$ in tutto Ω.

Def. Il supporto di f è la chiusura in Ω dell'insieme

$\{x \in \Omega, \ f(x) \neq 0\}$

Per definizione, è un chiuso nella topologia indotta su Ω.

Notando che il suo complementare è aperto, il teorema di prosecuzione analitica può essere enunciato affermando che, se $f \in A(\Omega)$, con Ω connesso, allora

supp $f = \emptyset$, oppure supp $f = \Omega$

Def. Tralasciando almeno per il momento la definizione topologica, considereremo un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ come un sottoinsieme K limitato e chiuso.

Se Ω è aperto in $\mathbb{R}^n$, chiameremo K compatto in Ω se K è un compatto in $\mathbb{R}^n$ totalmente incluso in Ω.

Definiamo $K_\varepsilon = \bigcup_{x_0 \in K} \{|x - x_0| < \varepsilon\}$

Teor. Sia K un compatto in Ω. Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $K_\varepsilon \subset \Omega$

Dim. Supponiamo per assurdo che per ogni $\varepsilon > 0$ risulti che esiste $x_\varepsilon \in (K_\varepsilon \cap \mathbb{R}^n - \Omega)$.

Prendiamo una successione di $\varepsilon = \frac{1}{j}$, con $j = 1, 2, \ldots$

Allora deve esistere $x_j \in (K_{1/j} \cap \mathbb{R}^n - \Omega)$.

Esisterà $\overline{x_j} \in K$, tale che $|\overline{x_j} - x_j| < \frac{1}{j}$

Per la compattezza di K, esiste un sottoinsieme di indici j_k tale per cui la sottosuccessione $\overline{x}_{j_k} \to x_0 \in K$.

Dovrebbe anche essere $x_{j_k} \to x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, ma questo implicherebbe l'esistenza di un punto, x_0 appunto, in K ma non in Ω, assurdo per ipotesi.

Def. Si indica con $C_0^\infty(\Omega)$ lo spazio di tutte le funzioni $f \in C^\infty(\Omega)$ tali che $K = \operatorname{supp} f$ è un compatto in Ω.

Es. fondamentale di funzioni in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:
è costituito dalle funzioni a campana di centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$. Definiamole in questo modo, che dipende dai parametri x_0 e r:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x-x_0|^2 - r^2}} & \text{per } |x-x_0| < r \\ 0 & \text{per } |x-x_0| \geq r \end{cases}$$

Valgono:

$$\lim_{x \to \bar{x}} e^{\frac{1}{|x-x_0|^2 - r^2}} \longrightarrow 0^-$$

$\bar{x}$ sul bordo

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{|x-x_0| < r\}} = \{|x-x_0| \leq r\}$$

Abbiamo già visto:

$$F(y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{y}} & \text{per } y > 0 \\ 0 & \text{per } y \leq 0 \end{cases}$$

Consideriamo ora:

$$y = G(x) \qquad G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$G(x) = r^2 - |x-x_0|^2$$

Allora possiamo scrivere:

$$f(x) = F(G(x))$$

Se si riesce ora a dimostrare che composizioni funzionali di funzioni C^∞ sono ancora C^∞, avremmo dimostrato l'infinita differenziabilità di f, infatti $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
Proviamolo, supponendo per semplicità $n = 1$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{G} \mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

$$G, F \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow F(G(x)) \in C^\infty(\mathbb{R})$$

Dall'analisi di base sappiamo che:
se $F, G \in C^0(\mathbb{R})$, allora $F(G(x)) = f(x) \in C^0(\mathbb{R})$
Ora, siano $F, G \in C^\infty(\mathbb{R})$:

- $f \in C^1(\mathbb{R})$, infatti $f' \in C^0(\mathbb{R})$, poiché:
  $f'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) \in C^0(\mathbb{R})$ in quanto prodotto di $C^0(\mathbb{R})$
- $f \in C^2(\mathbb{R})$: $f''(x) = F''(G(x)) \cdot G'(x) \cdot G'(x) + F'(G(x)) \cdot G''(x)$
- $f \in C^3(\mathbb{R})$: $f'''(x) = F'''(G(x)) \cdot G'(x)^3 + F''(G(x)) \cdot 2 \cdot G'(x) \cdot G''(x)$
  $+ F''(G(x)) \cdot G'(x) \cdot G''(x) + F'(G(x)) \cdot G'''(x)$

Da ogni formula esplicita, la continuità segue poiché somme, prodotti, e composizioni di funzioni continue, sono ancora continue.
Per un n generico vale la formula di Faà di Bruno:

$$f^{n}(x) = \sum_{1 \le j \le n} F^{(j)}(G(x)) \cdot G^{(p_1)}(x) \cdot \ldots \cdot G^{(p_m)}(x)$$

con $p_1 + \ldots + p_m = n$, $p_1 \ge 1, \ldots, p_m \ge 1$

dove certi termini possono non comparire, e altri possono comparire ripetuti. La formula esatta fa uso di due sommatorie e di una produttoria, e vi compaiono binomiali e fattoriali. È tuttavia sufficiente l'espressione generale per far seguire la continuità per il motivo di prima, e quindi il lemma.
La validità dell'espressione generale può essere verificata per induzione:

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{1 \le j \le n} D\left(F^{(j)}(G(x)) \cdot G^{(p_1)}(x) \cdot \ldots \cdot G^{(p_m)}(x)\right)$$

$$= \sum F^{(j+1)}(G(x)) \cdot G^{(p_1)}(x) \cdot \ldots \cdot G^{(p_m)}(x)$$
$$+ F^{(j)} \cdot (G(x)) \cdot G^{(p_1+1)}(x) \cdot \ldots \cdot G^{(p_m)}(x)$$
$$+ \ldots$$
$$+ F^{(j)} \cdot (G(x)) \cdot G^{(p_1)}(x) \cdot \ldots \cdot G^{(p_m+1)}(x)$$

che ha un'espressione simile a quella precedente.
Dunque le funzioni a campana sono effettivamente C^∞.

Richiamando la formula di Leibniz, la possiamo generalizzare al caso di $\mathbb{R}^n$, con le notazioni multi-indice:

$$\partial^{\alpha}(fg) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \partial^{\alpha-\beta} f \cdot \partial^{\beta} g$$

27.10.2010

- $C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega),\ \operatorname{supp}\varphi \text{ è un compatto } \subset \Omega\}$

Poiché $\operatorname{supp}(\varphi_1+\varphi_2) \subset \operatorname{supp}\varphi_1 \cup \operatorname{supp}\varphi_2$, l'insieme può essere dotato di struttura di spazio vettoriale con le usuali operazioni di somma e di prodotto.

- Teorema (costruzione delle funzioni cut-off o di taglio)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sia K compatto $\subset \Omega$. Può costruirsi una funzione $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, con $0 \le \varphi(x) \le 1$ per $x \in \Omega$, $\varphi(x) = 1$ per $x \in K$, il cui supporto può essere contenuto in K_ε con $\varepsilon > 0$ piccolo quanto lo si vuole.

Premessa alla dimostrazione

Avendo definito la campana (non normalizzata) di centro x_0 e raggio $r > 0$ come:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x-x_0|^2 - r^2}\right) & \text{per } |x-x_0| < r \\ 0 & \text{per } |x-x_0| \ge r \end{cases}$$

Possiamo integrare la funzione sullo spazio di definizione come:

$$\int_{|x-x_0|\le r} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \int_{\Omega} \varphi(x)\,dx$$

Se $\{|x-x_0| \le r\} \subset \Omega$, allora $\int_{x_0-r}^{x_0+r} \frac{1}{e^{(x-x_0)^2 - r^2}}\,dx = \text{cost} > 0$

Definiamo la campana normalizzata come $\frac{1}{\text{cost}} \cdot \varphi(x)$, in modo tale che integrata su $\mathbb{R}^n$ dia 1.

Dimostrazione

Sia $K \subset K_\varepsilon \subset \Omega$. Consideriamo anche $K_{\frac{\varepsilon}{2}}$, e sia $\varphi(x)$ la campana normalizzata di centro l'origine e raggio $\frac{\varepsilon}{4}$.

Definiamo ora $f(x) = \int_{K_{\varepsilon/2}} \varphi(x-y)\,dy = \int_{K_{\varepsilon/2}} \varphi(y-x)\,dy$

Per procedere, dovremo riprendere alcuni risultati sugli integrali parametrici.

Sia $f(x) = \int_D H(x,y)\,dy$, con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, D limitato $\subset \mathbb{R}^n$, $H(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Nel nostro caso $H(x,y) = \varphi(x-y)$.

Ricordiamo la derivazione sotto il segno di integrale:

$$\partial_{x_j} f(x) = \int_D \partial_{x_j} H(x,y)\,dy$$

Nel nostro caso:

$$\partial^\alpha f(x) = \int_{K_{\varepsilon/2}} \partial_x^\alpha(\varphi(x-y))\,dy = \int_{K_{\varepsilon/2}} (\partial_x^\alpha \varphi)(x-y)$$

da cui $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in C^\infty(\Omega)$

Resta ancora da dimostrare che:

1) se $x \in K$, allora $f(x) = 1$

2) supp f è un compatto incluso in Ω.

Più precisamente, dimostreremo che se $x \notin K_\varepsilon$, $x \in \Omega$, allora $f(x) = 0 \Rightarrow \text{supp } f \subset \overline{K_\varepsilon} \subset \Omega$

Per dimostrare che vale la 1, osserviamo che:

$$f(x) = \int_{K_{\varepsilon/2}} \varphi(y-x)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y-x)\,dy \quad (\text{per } y \in \mathbb{R}^n - K_{\varepsilon/2},\ \varphi(y-x) = 0)$$

$$\text{supp}_y\, \varphi(y-x) = \{y \in \mathbb{R}^n,\ |y-x| < \tfrac{\varepsilon}{4}\}$$
$$= \text{sfera di centro } x \text{ e raggio } \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Risulta allora:

$$\text{supp}_y\, \varphi(y-x) \subset \{y \in \mathbb{R}^n,\ |y-x| < \tfrac{\varepsilon}{2}\} \subset K_{\varepsilon/2}$$

Se $x \notin K_\varepsilon$ $(x \in \Omega)$, allora $f(x) = 0$.

Proviamo ora che $\text{supp}_y\, \varphi(y-x) \cap K_{\varepsilon/2} = \emptyset$.

Per assurdo, esiste infatti $\bar{x}$, con $|\bar{x}-x| < \frac{\varepsilon}{4}$ e $\bar{x} \in K_{\varepsilon/2}$.

Esiste allora $x_0 \in K$ tale che $|\bar{x}-x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Se ora $x_0 \in K$, $x \notin K_\varepsilon$, possiamo scrivere:

$$|x-x_0| = |x-\bar{x}+\bar{x}-x_0| \le |x-\bar{x}| + |\bar{x}-x_0| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$$

$\Rightarrow x \in K_\varepsilon$, contraddizione.

- La funzione risulta valere $\varphi(x) = 1$ in un intorno $K_{\varepsilon'}$, $\varepsilon' > 0$, e $\varphi(x) = 0$ al di fuori di $K_{\varepsilon''}$, con ε'' opportuno, $\varepsilon'' < \varepsilon$

<u>Teorema</u> di partizione dell'unità.

Sia K compatto in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ aperti ricoprano K. Esistono allora $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $j = 1, \dots, m$, tali che: $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$ per $x \in K$ ed inoltre $0 \le \varphi(x) \le 1$.

<u>Dim.</u>

Si possono trovare compatti tali per cui $K_j \subset \Omega_j$, $j = 1, \dots, m$, tali che $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} K_j$.

Possiamo costruire $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $\psi_j(x) = 1$ per $x \in K_j$, questo grazie al teorema precedente e con il rispettivo metodo costruttivo. Definiamo ora:

$$\varphi_1 = \psi_1$$
$$\varphi_2 = \psi_2(1-\psi_1)$$
$$\varphi_3 = \psi_3(1-\psi_1)(1-\psi_2)$$
$$\dots$$
$$\varphi_m = \psi_m(1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdot\dots\cdot(1-\psi_{m-1})$$

In questo modo, sarà $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$ per $x \in K$. Infatti:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \psi_1 + \psi_2(1-\psi_1)$$
$$= 1 - 1 + \psi_1 + \psi_2(1-\psi_1)$$
$$= 1 - (1-\psi_2)(1-\psi_1)$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 1 - (1-\psi_2)(1-\psi_1) + \varphi_3$$
$$= 1 - (1-\psi_2)(1-\psi_1) + \psi_3(1-\psi_1)(1-\psi_2)$$
$$= 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)(1-\psi_3)$$

e il procedimento può essere generalizzato per induzione.

Per $x \in K$, almeno una tra le ψ_i vale 1, ergo almeno uno dei fattori si annulla, e resta soltanto l'addendo 1.

(28.10.2010)

$V = C_0^\infty(\Omega)$ spazio delle funzioni test

$V' = \{u : V \to \mathbb{C} \text{ lineari}\}$ spazio duale

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} \lambda_1 u_1(\varphi) + \lambda_2 u_2(\varphi) \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad u_1, u_2 \in V$$

(notare che $(\mathbb{R}^n)' \sim \mathbb{R}^n$ e $(\mathbb{C}^n)' \sim \mathbb{C}^n$

$\mathcal{D}'(\Omega) \subset (C_0^\infty(\Omega))'$ sottospazio vettoriale caratterizzato dalla disuguaglianza di controllo.

Def. Una distribuzione u in Ω è un elemento di $(C_0^\infty(\Omega))'$, cioè $u : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ lineare

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ \varphi & \longrightarrow & u(\varphi) \\ \text{test} & & \text{valore del test} \end{array}$$

Inoltre, si suppone soddisfatta la seguente disuguaglianza di controllo: per ogni compatto $K \subset \Omega$, esistono un intero $k \geq 0$ e una costante $C > 0$ tali che per ogni $\varphi \in C_0^\infty(K) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{supp}\varphi \subset K\}$ risulta:

$$|u(\varphi)| \leq C \cdot \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

ovvero, informalmente, se φ è "piccola", allora $u(\varphi)$ è piccolo.

Si denota con $\mathcal{D}'(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni in Ω.

Ciò porta la questione di come misurare la "grandezza" di $\varphi \in C^0(\Omega)$, per esempio con $\Omega = \mathbb{R}$.

L'indicatore classico è rappresentato dalla norma infinito:

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$$

Possiamo però definire anche una norma, se $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, e $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, come $\max_{x \in K} |\varphi(x)| + \max_{x \in K} |\varphi'(x)|$

In questo caso però possono esistere funzioni

per cui $\|\varphi\|_\infty$ è piccolo ma $\|\varphi'\|_\infty$ è grande, per esempio $\varphi(x) = f(x) \cdot \sin[(100^2)x]$ dove $f(x)$ è una funzione cutoff per $\frac{1}{100}$. Infatti $\varphi'(x) = f'(x) \cdot \sin[(100^2)x] + f(x) \cdot 100^2 \cdot [\cos(100^2)x]$, e si verifica che $\varphi'(0) = 100$.

Tornando alla disuguaglianza di controllo, si può osservare che κ dipende da K, ed anche la costante C, indipendente però dalla φ. κ può tuttavia tendere a $+\infty$ all'ingrandirsi di K.

Def. Si indica con $\mathcal{D}'_F(\Omega)$ il sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni che soddisfano la diseguaglianza di controllo per un certo $\kappa \geq 0$ indipendente da $K(\Omega)$.

Es. Le funzioni continue possono essere viste come distribuzioni: $C^0(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Si associ infatti ad f la distribuzione $v \in \mathcal{D}'$ definita da $v(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$, dove $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

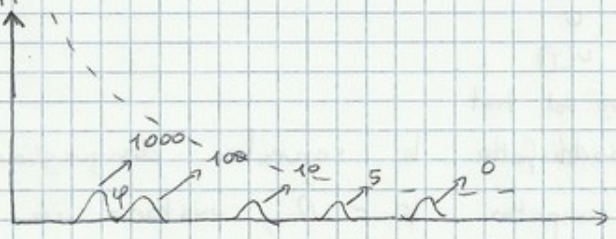
Dim. Possiamo dimostrare la disuguaglianza di controllo nel seguente modo:

$$|v(\varphi)| = \left|\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx\right| = \left|\int_K f(x)\cdot\varphi(x)\,dx\right| \leq \int_K |f(x)|\cdot|\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq \int_K |f(x)|\,dx \cdot \max_{x\in K}|\varphi(x)|$$

$$\| \quad C \text{ (dipende da } K)$$

Supponiamo ora di conoscere i valori di alcuni test:



È possibile risalire, da tali valori, ai valori puntuali della funzione?

Teor. (ricostruzione dei valori puntuali)

Sia data $f \in C^0(\Omega)$, e sia $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ la distribuzione corrispondente. Fissiamo $x_0 \in \Omega$. Si prendano φ_j, $j = 1, 2, \dots$, funzione a campana normalizzata di centro x_0 e raggio $\frac{1}{j}$

Allora $\lim_{j\to\infty} v(\varphi_j)$ $\left(\overset{\text{def.}}{=} \int_\Omega f(x)\cdot\varphi_j(x)\,dx\right) = f(x_0)$

Dim. Richiamiamo innanzitutto alcuni risultati:

(1° teorema della media) $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$

(2° teorema della media) $f \in C^0([a,b])$, $\varphi \in C^0([a,b])$, $\varphi(x) \geq 0$. Allora:

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx = f(c)\cdot\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

Infatti, se $m \le f(x) \le M$ (m, M esistono poiché f è definita su dominio chiuso e limitato e vale pertanto il th. di Weierstrass), sarà:

$$m \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx \le M \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$m \le \frac{\int_a^b f\varphi\,dx}{\int_a^b \varphi\,dx} \le M$$

$\hookrightarrow = f(c)$ per il teorema dei valori intermedi

Il 2° teorema della media (versione n-dimensionale)

Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio compatto, e connesso per archi. Sia $f, \varphi \in C^0(D)$, $\varphi(x) \ge 0$ per $x \in D$. Allora esiste $c \in D$ t.c.:

$$\int_D f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c)\cdot\int_D \varphi(x)\,dx$$

Si noti che il 2° teorema è una generalizzazione del 1°, che segue se $\varphi(x) \equiv 1$.

Procediamo ora con la dimostrazione:

$$\lim_{j\to\infty} U(\varphi_j) = \lim_{j\to\infty} \int f(x)\cdot\varphi_j(x)\,dx \qquad \Omega = \operatorname{supp}\varphi_j = \left\{|x-x_0| \le \frac{1}{j}\right\}$$

Esiste $c_j \in D$, cioè $|c_j - x_0| \le \frac{1}{j}$ tale che

$$\lim_{j\to\infty} f(c_j)\cdot\int_{|x-x_0|\le\frac{1}{j}} \varphi_j(x)\,dx = \lim_{\substack{j\to\infty \\ c_j\to x_0}} f(c_j) = f(x_0)$$

per il teorema di relazione di Heine ∎

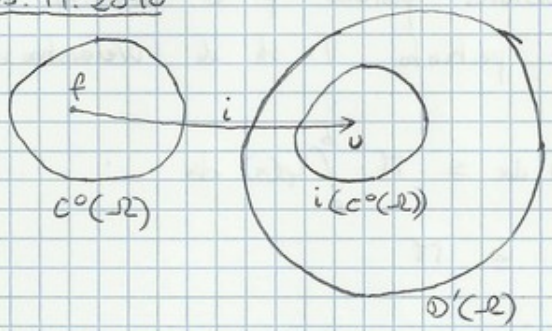
Dimostriamo anche il 2° teorema della media nel caso multidimensionale. Abbiamo che $\int_D f(x)\,\varphi(x)\,dx$. Essendo D compatto, esistono ancora $m \in M$ per Weierstrass. Dividendo per $\int_D \varphi(x)\,dx$:

$$m \le \frac{\int_D f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_D \varphi(x)\,dx} \le M$$

dove, come prima, per il teorema dei valori intermedi multidimensionale, possiamo sostituire la frazione con $f(c)$.

Dimostriamo ora anche questo teorema. Consideriamo un cammino da $\bar{x}$ a $\bar{\bar{x}}$, dove in $\bar{x}$ si raggiunge il minimo, in $\bar{\bar{x}}$ il massimo. Allora, esiste $x(t)$, $0 \le t \le 1$, tale per cui $x(0) = \bar{x}$, $x(1) = \bar{\bar{x}}$. Se poniamo $f(x(t)) = g(t) \in C^0([0,1])$, naturalmente $g(0) = m$ e $g(1) = M$, e si applica a g il teorema dei valori intermedi unidimensionale. Si noti l'ipotesi di necessarietà della connessione per archi.

03.11.2010



Prop. La u è iniettiva

Dim. Proviamo che $f_1 \neq f_2$ in $C^0(\Omega) \Rightarrow u_1 \neq u_2$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

Sia per assurdo $u_1 = u_2$. Allora, $u_1(\varphi_j) \to f_1(x_0)$, $u_2(\varphi_j) \to f_2(x_0)$, da cui $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, contraddizione.

Per estendere la cosa a funzioni non continue, consideriamo lo spazio di Lebesgue:

$$L^1(K) = \{ f : K \to \mathbb{R}, \int_K |f(x)|\,dx < \infty \}$$

dove K è un compatto e l'integrale è quello di Lebesgue, eventualmente improprio. Abbiamo che $C^0(K) \subset L^1(K)$

Esempio: $K = [-1,1]$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, la funzione è integrabile.

Definiamo ora anche lo spazio:

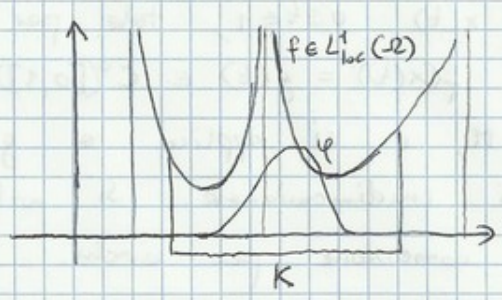
$$L^1_{loc}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ per ogni } K \subset \Omega,\ f|_K \in L^1(K), \text{ cioè } \int_K |f(x)|\,dx < \infty \}$$

Consideriamo per esempio, $\Omega = (-1,1)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$.

Essa non appartiene a $L^1(-1,1)$, ~~mica~~ in quanto il secondo fattore porta ad una singolarità non integrabile, ma appartiene a $L^1_{loc}(-1,1)$, in quanto $\int_a^b f(x)\,dx$ converge se $-1 < a < b < 1$.

Analogamente, $\frac{1}{\sqrt{|x|}} \cdot e^x$ non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, ma fa parte di $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Naturalmente $C^0(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.

Risultato notevole è che $f \in L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$



$\operatorname{supp}\varphi \subset K$ compatto in Ω

$$|u(\varphi)| \overset{\text{def.}}{=} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot\varphi(x)\,dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\cdot|\varphi(x)|\,dx \leq \int_K |f(x)|\,dx \cdot \max_{x\in K} |\varphi(x)|$$

Teor. Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ la distribuzione corrispondente: $u(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\,dx$. Sia fissato x_0, sia la successione φ_j definita come in precedenza. Allora $\lim_{j\to\infty} u(\varphi_j) = f(x_0)$ a.e.

- Vale la pena segnalare che, oltre a quello di Riemann e di Lebesgue, sono definiti altri tipi di integrale, che permettono di dare un senso anche ad espressioni altrimenti non definite come $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx$ (integrale alla Cauchy) e $\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\varphi(x)}{x^M}\,dx$ con $M \geq 1$ (se $M \geq 2$, si fa ricorso alla parte finita di Adamar).
  Ciò permette di estendere ad altri tipi di singolarità: $\frac{1}{x^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ e $\frac{1}{x^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_-)$, ma si può anche far appartenere a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
- Vediamo ora alcuni esempi di distribuzioni che non sono funzioni.
  Sia Σ ipersuperficie regolare in $\mathbb{R}^n$, e consideriamo $\delta_\Sigma(\varphi) = \int_\Sigma \varphi(x)\,d\sigma$, con $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $d\sigma$ elemento di ipersuperficie.
  Consideriamo il caso di $\mathbb{R}^3$, e sia:

$$\Sigma = \gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in I \subset \mathbb{R}$$

curva regolare

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$\delta_\gamma(\varphi) = \int_\gamma \varphi(x,y,z)\,ds = \int_I \varphi(x(t), y(t), z(t))\,ds$$

  Sia ora:

$$\Sigma = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in V \subset \mathbb{R}^2$$

$$\delta_\Sigma(\varphi) = \int_\Sigma \varphi(x,y,z)\,d\sigma$$

  (densità di massa dello strato uniforme Σ)
- Ricerca dei valori puntuali di una distribuzione.
  Definiamo innanzitutto la restrizione di una distribuzione.
  Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Prendiamo $\Omega' \subset \Omega$, e definiamo $u|_{\Omega'} \in \mathcal{D}'(\Omega')$ ponendo, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, $u|_{\Omega'}(\varphi) \overset{def.}{=} u(\tilde{\varphi})$ dove $\tilde{\varphi}$ è l'estensione a zero di φ a Ω:

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \Omega' \\ 0, & x \in \Omega - \Omega' \end{cases}$$

Osserviamo $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)$ (mentre se $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\tilde{\varphi} \notin C^\infty(\Omega)$)

- Teorema di localizzazione.

Sia $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Supponiamo che per ogni $x_0 \in \Omega$ esista un intorno $V_{x_0} \subset \Omega$ tale che $v|_{V_{x_0}} \equiv 0$ in $\mathcal{D}'(V_{x_0})$.

Allora $v \equiv 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

Tesi: per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $v(\varphi) = 0$

Sia $K = \operatorname{supp} \varphi$, compatto ricoperto dai V_{x_0}, $x_0 \in K$

Può estrarsi un sottoricoprimento finito $x_1, \dots, x_m$ per cui

$K \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}$

$\varphi_j \in C_0^\infty(V_{x_j})$, $j = 1, \dots, m$, tali che $\sum_{j=1}^m \varphi_j(x) = 1$ per $x \in K$

$\varphi = \varphi \cdot 1 = \varphi \cdot \sum_{j=1}^m \varphi_j = \sum_{j=1}^m \underbrace{\varphi\varphi_j}_{\in C_0^\infty(V_{x_j})}$

Conclusione:

$$v(\varphi) = v\left(\sum_{j=1}^m \varphi\varphi_j\right) = \sum_{j=1}^m \underbrace{v(\varphi\varphi_j)}_{=0} = 0$$

04.11.2010

- SUPPORTO DI UNA DISTRIBUZIONE

Sia $f \in C^0(\Omega)$. Abbiamo detto che:

- $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega,\ f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$, tuttavia, se conosciamo solo la distribuzione e non i valori puntuali, direttamente non si può ricavare il supporto. Possiamo però considerare:
- $\Omega - \operatorname{supp} f = \{x \in \Omega,$ esiste un intorno V_x in cui $f(x) \equiv 0\}$,

e, da questa definizione, porre il supporto nel seguente modo:

Def. Data $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si definisce $\operatorname{supp} v$ ponendo:

$\Omega - \operatorname{supp} v = \{x \in \Omega,$ esiste V_x in $v|_{V_x} \equiv 0$ in $\mathcal{D}'(V_x)\}$

Prop. Sia $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, sia $\operatorname{supp} v$ il suo supporto. Allora

$v|_{\Omega - \operatorname{supp} v} \equiv 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega - \operatorname{supp} v)$, e quindi se

$\operatorname{supp} v \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$ per $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, allora $v(\varphi) = 0$

Dim. Per la prima parte, si applichi il teorema di localizzazione all'aperto $\Omega - \operatorname{supp} v$. Per ogni $x \in \Omega - \operatorname{supp} v$ esiste un intorno V_x in cui $v|_{V_x} = 0$. Allora $v \equiv 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega - \operatorname{supp} v)$.

Seconda parte: se $\operatorname{supp} v \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$, allora

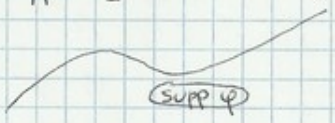
$\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega - \operatorname{supp} v$; $v(\varphi) = 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega - \operatorname{supp} v)$

Es. 1 δ_{x_0} $\operatorname{supp} \delta_{x_0} = \{x_0\}$

$\delta_{x_0}(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} \varphi(x_0)$

$v(\varphi) = 0$ se $x_0 \notin \varphi$

Es. 2 $\quad \operatorname{supp} \delta_\Sigma = \Sigma$



$\Sigma = \gamma$

$\delta_\Sigma(\varphi) = 0$

Es. 3 $\quad U = \delta_{-1} + f$, dove $f = e^{-\frac{1}{x}} \cdot 1_{\{x>0\}}$

$\operatorname{supp} U = \{-1\} \cup \overline{\mathbb{R}_+}$

Es. 4 $\quad U = \delta_\Sigma + \delta_{x_0}$

Def. Si indica con $\mathcal{E}'(\Omega)$ il sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$ costituito dalle $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\operatorname{supp} U = K$ compatto in Ω.

Es $\quad \delta_{x_0} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\delta_\Sigma \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ se $\overline{\Sigma}$ è un compatto.

- PROBLEMA DELLA DERIVAZIONE

Volendo derivare una distribuzione, partiamo dalla regola di integrazione per parti, con $f \in C^1(I)$ e $[a,b] \subset I$:

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

La regola ha una particolare forma se il supporto è compatto: se $\operatorname{supp} g \subset [a,b]$: in tal caso infatti $g(a) = g(b) = 0$ e quindi si annulla il fattore finito, portando a:

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Generalizziamo il risultato.

Teor. (di integrazione per parti a supporto compatto n-dimensionale). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sia $f \in C^1(\Omega)$. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Allora, per $j = 1, \dots, n$ fissato:

$$\int_\Omega (\partial_{x_j} f)(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega f(x)\, (\partial_{x_j} \varphi)(x)\, dx$$

Prima di procedere, richiamiamo alcuni risultati di analisi.

Teorema di Gauss in $\mathbb{R}^n$: sia $f \in C^1(\Omega)$, D dominio regolare $\subset \Omega$, Σ frontiera di D regolare. Allora $\int_D \partial_{x_j} f(x)\, dx = \int_\Sigma f(x)\, \nu_j(x)\, d\sigma$

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_j, \dots, \nu_n)$

Teorema della divergenza (del flusso)

$F = (f_1, \dots, f_n)$, $f_j \in C^1(\Omega)$

$\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$ $\qquad \int_D \operatorname{div} F\, dx\, dy = \int_\Sigma F(x,y)\, d\sigma$

Nel nostro caso, siano $g \in C^1(\Omega)$, $fg \in C^1(\Omega)$

$$\int_D \partial_{x_j}(fg)\, dx = \int_\Sigma f(x)\, g(x)\, \nu_j(x)\, d\sigma$$

$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$\int_D (\partial_{x_j} f)\, g\, dx + \int_D f\, (\partial_{x_j} g)\, dx$$

$$\int_D (\partial_{x_j} f)\, g\, dx = \int_\Sigma f g \nu_j \, d\sigma - \int_D f(\partial_{x_j} g)\, dx \qquad (*)$$

Dim. Sia $g = \varphi$.

$D = (\overline{\text{supp } \varphi})_\varepsilon \subset \Omega$

Si applichi $(*)$ osservando che $\varphi = 0$ in Σ, bordo di D.

Esaminando il teorema precedente dal punto di vista delle distribuzioni

$f,\ \partial_{x_j} f \in C^0(\Omega)$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\partial_{x_j} f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Si rileggga l'identità precedente.

$$\partial_{x_j} f(\varphi) = -f(\partial_{x_j} \varphi) \qquad \partial_{x_j}\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Def. Sia $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$. $(\varphi \in C_0^\infty(\Omega))$

Si definisce $\partial_{x_j} v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ponendo $\partial_{x_j} v(\varphi) \overset{\text{def}}{=} -v(\partial_{x_j}\varphi)$.

Oss. Se f è derivabile in senso classico, allora derivata classica e derivata nel senso delle distribuzioni coincidono.

Analizziamo la consistenza:

Hp. $|v(\varphi)| \le C \cdot \sum_{|\alpha| \le k} \max_{x \in k} |\partial^\alpha \varphi(x)|$

Th. $|\partial_{x_j} v(\varphi)| \overset{\text{def.}}{=} |v(\partial_{x_j}\varphi)| \le C \cdot \sum_{|\alpha| \le k} \max_{x \in k} |\partial^\alpha \partial_{x_j} \varphi(x)|$

$\partial^\beta \varphi \qquad \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_j + 1, \dots, \alpha_n)$

$\|\beta\| = \beta_1 + \dots + \beta_n = |\alpha| + 1 \le k+1$

(10.11.2010)

Ci si chiede ora cosa si verifica derivando nel senso delle distribuzioni una funzione $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ non derivabile in senso classico.

Consideriamo per esempio la funzione di Heaviside, o indicatrice dei positivi: $H(x) = 1_{\{x \ge 0\}} = \begin{cases} 1 & \text{per } x \ge 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$.

Si ha che $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$;

$$H(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\cdot\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_0^M \varphi(x)\,dx \quad \text{se } [-M, M] \supset \text{supp } \varphi$$

la derivata classica è $H'(x) = 0$ per $x \ne 0$, non definita per $x = 0$.

Vediamo ora cosa succede in senso distribuzionale.

$$\frac{d}{dx} H(\varphi) \overset{\text{def}}{=} -H(\varphi') = -\int_0^M \varphi'(x)\,dx = -[\varphi(M) - \varphi(0)] = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

Generalizziamo il risultato a tutte le funzioni con discontinuità di prima specie.

Teor. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}-\{0\})$. Nell'origine sia f che f' ($\in C^0(\mathbb{R}-\{0\})$) abbiamo una discontinuità di prima specie: $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = f(0^\pm) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = f'(0^\pm) \in \mathbb{R}$, con $f(0+) \neq f(0-)$. Allora, viste f, f' (derivata classica) come elementi di $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, e quindi elementi di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, risulta:

$$\frac{d}{dx} f = f' + (f(0+) - f(0-))\,\delta$$

Notare che, se $f(0+) = f(0-)$, il teorema è ancora valido, anche se diventa non più particolarmente significativo.

Dim. Siano:

- $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$
- $\operatorname{supp} \varphi' \subset \operatorname{supp} \varphi \subset [-M, M]$

$$\frac{d}{dx} f(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} -f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{-M}^{M} f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\int_{-M}^{0} f(x)\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{M} f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

↑ prendendo come valore di f nell'origine $f(0-)$ — ↖ prendendo come valore di f nell'origine $f(0+)$

$$= -\left[f(x)\varphi(x)\Big|_{-M}^{0^-} - \int_{-M}^{0} f'(x)\,\varphi(x)\,dx + f(x)\varphi(x)\Big|_{0+}^{M} - \int_{0}^{M} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \right]$$

$$= -\left[f(0-)\varphi(0) - f(-M)\varphi(-M)\right] - \left[f(M)\varphi(M) - f(0+)\varphi(0)\right] + \int_{-M}^{0} + \int_{0}^{M} f'(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= f(0+)\,\varphi(0) - f(0-)\,\varphi(0) + \int_{-M}^{0}\int_{0}^{M} f'(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{-M}^{M} f'(x)\,\varphi(x)\,dx + (f(0+) - f(0-))\,\varphi(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx + (f(0+) - f(0-))\,\delta(\varphi)$$

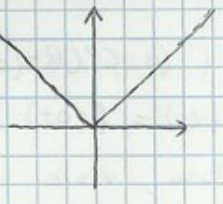
$$= f'(\varphi) + (f(0+) - f(0-))\,\delta(\varphi)$$

Nel caso precedente, $H' \equiv 0$, $H(0-) = 0$, $H(0+) = 1$, dunque:

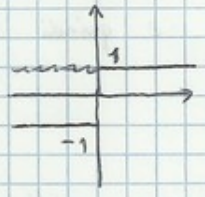
$$\frac{d}{dx} H = 0 + (1-0)\,\delta$$

Cor. Se f, come nel teorema precedente, ha in realtà un punto angoloso, cioè $f(0+) = f(0-)$, e quindi $f \in C^0(\mathbb{R})$, ma $f'(0+) \neq f'(0-)$, allora derivata nel senso delle distribuzioni e derivata classica coincidono.

Es.



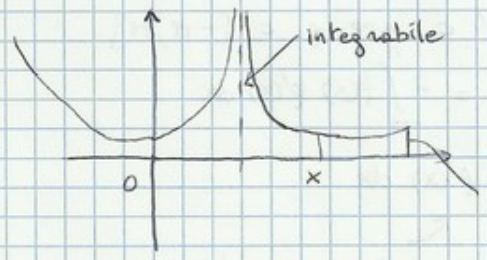
$y = f(x) = |x|$



$f'(x)$ = velocità = sign x

$f''(x)$ = forza agente = 2δ ← $1-(-1)$

Teor. Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Si consideri $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.



Allora $F'(x) = f(x)$, dove la $F'(x)$ è definita quasi ovunque ed appartiene quindi a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Si può aggiungere che $F'(x) = f(x)$ anche nel senso delle distribuzioni:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F'(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

Es. $f(x) = \text{sign}(x)$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = |x|$

Mostriamo ora un esempio multidimensionale.

Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, per cui non esistono in senso classico le derivate parziali prime $\partial_x f$, $\partial_y f$. Per esempio, consideriamo la funzione a scalino $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{per } y > 0 \\ 0 & \text{per } y \le 0 \end{cases}$

Se $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, allora $f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \varphi(x,y)\,dy \right) dx$$

$\partial_y f,\ \partial_x f \equiv 0$ (tranne che per $y=0$; ovunque)

$$\partial_y f(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} -f(\partial_y \varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \partial_y \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

(x, y)

$$= -\int_{-M}^{M} \int_0^{M} \partial_y \varphi(x,y)\,dx\,dy \quad \text{se } \operatorname{supp}\varphi \subset [-M,M] \times [-M,M]$$

$$= -\int_{-M}^{M} \left(\int_0^{M} \partial_y \varphi(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= -\int_{-M}^{M} [\varphi(x,M) - \varphi(x,0)]\,dx$$

$$= \int_{-M}^{M} \varphi(x,0)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,0)\,dx = \delta_\gamma$$

γ asse delle x ($y=0$)

$$\delta_\gamma \varphi = \int_\gamma \varphi \, d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,0)\, dx$$

Dunque $\partial_y f = \delta_\gamma$

Verifichiamo che $\partial_x f = 0$ anche nel senso delle distribuzioni:

$$(\partial_x f)(\varphi) = -\int_{-M}^{M} \left(\int_0^M \partial_x \varphi(x,y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^M \left(\int_{-M}^{M} \partial_x \varphi(x,y)\, dx \right) dy = 0 \quad \text{in quanto } \varphi(M,y) = \varphi(-M,y) = \varphi(M,y) - \varphi(-M,y) = 0$$

(11.11.2010)

Proviamo ora a derivare una distribuzione che non sia una funzione. Per esempio, la delta di Dirac. Si ha:

$$\delta'(\varphi) \overset{\text{def}}{=} -\delta(\varphi') = -\varphi'(0)$$

δ' può corrispondere in senso fisico al concetto di dipolo.

Oss. La definizione di derivata di una distribuzione può essere iterata:

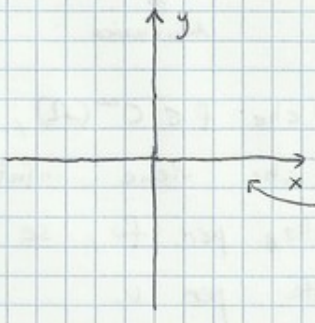
$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, α multi-indice, si ha che

$$\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \cdot u(\partial^\alpha \varphi)$$

(∂^α: $\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$; ben definito indipendente dall'ordine di derivazione)

Se $f \in C^m(\Omega)$, $m > 0$, allora $\partial^\alpha f$ per $|\alpha| \le m$ ha lo stesso significato nell'ambito classico e nell'ambito delle distribuzioni.

- Tornando all'esempio della δ, abbiamo che:
$$\partial^\alpha \delta(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \cdot \delta(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \cdot \partial^\alpha \varphi(0)$$
che corrisponde al multipolo in fisica.
- Deriviamo ora una densità di strato. Vale:
$$\partial_{x_j} \delta_\Sigma(\varphi) = -\delta_\Sigma(\partial_{x_j} \varphi) = -\int_\Sigma \partial_{x_j} \varphi(x)\, d\sigma$$
ovvero una densità di doppio strato.
- Consideriamo ora:



$$\delta_\gamma(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,0)\, dx$$

$\Sigma = \gamma = \{y = 0\}$ = asse delle x

parametrizzazione banale $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$

$$\partial_x \delta_\gamma(\varphi) = -\delta_\gamma(\partial_x \varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \varphi(x,0)\, dx = -\int_{-M}^{M} \partial_x \varphi(x,0)\, dx$$

$$= -(\varphi(M,0) - \varphi(-M,0)) = 0$$

$$\partial_y \delta_\gamma(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} -\delta_\gamma(\partial_y \varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_y \varphi)(x,0)\, dx$$ doppio filo

PRODOTTO ARITMETICO DI DISTRIBUZIONI

Sia V algebra, ovvero soddisfa sia i requisiti di spazio vettoriale che quelli di anello. Per esempio, $C^0(\Omega)$ è un'algebra, in quanto, se $f, g \in C^0(\Omega)$, allora $c_1 f + c_2 g \in C^0(\Omega)$, $fg \in C^0(\Omega)$. Anche $C^\infty(\Omega)$ e $\mathcal{A}(\Omega)$ sono algebre; può essere utile anche notare come $C_0^\infty(\Omega)$ sia un ideale di $C^\infty(\Omega)$.

Ci si chiede ora se $\mathcal{D}'(\Omega)$ sia un'algebra, e se si possa introdurre una definizione di prodotto che generalizzi quella in $C^0(\Omega)$. Purtroppo la risposta è no.

Per esempio, non si può dare in maniera coerente con tutta la teoria un significato a δ^2.

Consideriamo infatti la funzione di Heaviside. Essa è idempotente, per come definita, ovvero $H^2 = H$, ..., $H^n = H$.

Supponendo ora che la derivazione funzioni come al solito, dovrà valere:

$$\delta = \frac{d}{dx} H^n = n \cdot H^{n-1} \cdot \frac{d}{dx} H = n \cdot H \cdot \delta$$

$$\delta H = \frac{1}{n} \delta$$

In questo modo però il prodotto $\delta \cdot H$ non è ben definito, perché dipende da n: se prendiamo per esempio $n = 2$, sarebbe che $\delta \cdot H = \frac{\delta}{2}$, ma con $n = 3$, risulterebbe $\delta \cdot H = \frac{\delta}{3}$.

Def. Sia $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$. Si definisce $fv \in \mathcal{D}'(\Omega)$, ponendo, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $(fv)(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} v(f\varphi)$

Es. Se $v \in C^0(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, allora si ritrova l'usuale definizione di prodotto. Infatti allora:

$$(fv)(\varphi) \overset{\text{def}}{=} v(f\varphi) = \int_\Omega \underset{\in C^0 \in C^\infty \in C_0^\infty}{v(f\varphi)}\, dx = \int_\Omega \underset{\in C^0}{(fv)}\, \varphi\, dx = \underset{\text{def. classica}}{(fv)}(\varphi)$$

Questa definizione, in cui si richiede che $f \in C^\infty(\Omega)$, è consistente con la teoria. Dimostriamo che viene infatti soddisfatta la disuguaglianza di controllo per fv, se si ipotizza che essa venga soddisfatta per v.

Hp: $|v(\varphi)| \leq C \cdot \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$

Th: $|(fv)(\varphi)| \overset{\text{def.}}{=} |v(f\varphi)| \leq C \cdot \sum_{|\alpha| \in k} \max_{x \in K} |\partial^\alpha (f\varphi)(x)|$

$$\| \quad \sum_{\beta \in \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f(x)\, \partial^\beta \varphi(x)$$

$$\leq C \cdot \sum_{|\alpha|\leq k} \cdot \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \max_{x\in K} |\partial^{\alpha-\beta} f(x)| \cdot \max_{x\in K} |\partial^{\beta}\varphi(x)|$$

Definiamo ora:

$$\max_{\beta\leq\alpha\leq k} \binom{\alpha}{\beta} = C^{*} \qquad \max_{|\gamma|\leq k} \max_{x\in K} |\partial^{\gamma} f(x)| = C^{**}$$

In questo modo la disuguaglianza diventa:

$$|(fu)(\varphi)| \leq C \cdot C^{*} \cdot C^{**} \cdot \sum_{|\alpha|\leq k} \sum_{\beta\leq\alpha} \max_{x\in K} |\partial^{\beta}\varphi(x)|$$

$$\leq \quad \| \quad \cdot \quad \| \left(\sum_{|\beta|\leq k} \max_{x\in K} \quad \| \right)$$

$$\leq \quad \| \quad \cdot \quad N \quad \cdot \quad \|$$

dove N è il numero degli α tali che $|\alpha| \leq k$.

Poiché $C' = C \cdot C^{*} \cdot C^{**} \cdot N$ non dipende da φ, è accettabile come costante e la disuguaglianza di controllo è verificata.

Es.

- Sia $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot \delta = f(0) \cdot \delta$

  Infatti $f \cdot \delta(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} \delta(f\varphi)$, e $f(0) \cdot \varphi(0) = f(0) \cdot \delta(\varphi)$

- Quanto alla derivata:

$$(f\delta')(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} \delta'(f\varphi) = -\delta(\underbrace{(f\varphi)'}_{f'\varphi + f\varphi'}) = -f'(0)\underbrace{\varphi(0)}_{\delta(\varphi)} - f(0)\underbrace{\varphi'(0)}_{-\delta'(\varphi)}$$

$$f\delta' = -f'(0)\,\delta + f(0)\,\delta'$$

(24.11.2010)

- $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ $\quad u : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$
- $u \in \mathcal{D}'_F(\Omega)$ esiste K, tale che per ogni K compatto $\subset \Omega$, esiste C tale che per ogni $\varphi \in C_0^\infty(K)$:

$$|u(\varphi)| \leq C \cdot \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

$\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'_F(\Omega)$

- Esempio di distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $u \notin \mathcal{D}'_F(\mathbb{R})$

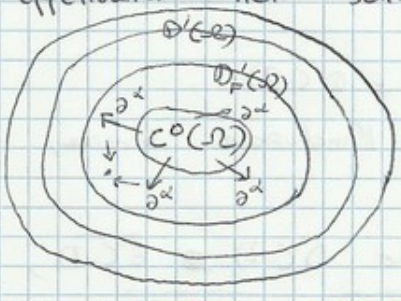
$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j^{(j)}$$

$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $\qquad u(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j^{(j)}(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \varphi^{(j)}(j)$ $\qquad \operatorname{supp}\varphi \subset [-j_0, j_0]$

$$|u(\varphi)| = \left| \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \varphi^{(j)}(j) \right| \leq \sum_{j \leq k} \max_{x \in K} |\varphi^{(j)}(x)|$$

- Teorema di struttura per $\mathcal{D}'_F(\Omega)$

Sia $u \in \mathcal{D}'_F(\Omega)$. Allora esistono $f_\alpha \in C^0(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$ per un certo m, tali che $u = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha$, dove la derivata viene effettuata nel senso delle distribuzioni.



$\mathcal{D}'_F(\Omega)$ è il più piccolo sottoinsieme di $C_0^\infty(\Omega')$ che risolve il problema della derivazione.

Esempio:

$$u = \delta^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} \delta$$

Non possiamo scrivere semplicemente $\frac{d^k}{dx^k}\delta = \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{dH(x)}{dx}\right)$, in quanto $H(x)$ non è una funzione continua (si ricordi che $H(x) = \begin{cases} x \geq 0 & 1 \\ x < 0 & 0 \end{cases}$)

Possiamo però considerare la seguente funzione:

$$f(x) = \int_0^x H(t)\,dt = \begin{cases} x \geq 0 & x \\ x < 0 & 0 \end{cases} = x_+$$

che è continua, e $\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}} f$

Verrebbe da chiedersi come mai non ci si limiti a $\mathcal{D}'_F(\Omega)$, che sarebbe sufficiente per derivare tutte le funzioni non derivabili in senso classico, e si introduca $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Il motivo è topologico: $\mathcal{D}'_F(\Omega)$ non è infatti un chiuso, e $\overline{\mathcal{D}'_F(\Omega)} = \mathcal{D}'(\Omega)$

Topologia in $C_0^\infty(\Omega)'$

Def. Siano u_j, $j = 1, 2, \dots$, $u \in C_0^\infty(\Omega)'$

Diciamo che u_j converge ad u (e scriviamo $\lim_{j\to\infty} u_j = u$) se per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ risulta $\lim_{j\to\infty} u_j(\varphi) = u(\varphi)$

Teorema (Banach - Steinhaus)

Se $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $j = 1, 2, \dots$ e u_j converge ad u in $C_0^\infty(\Omega)'$, allora anche $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Def. Sia $A \subset C_0^\infty(\Omega)'$. La chiusura di A, denotata con $\bar{A}$, è l'insieme di tutte le $u \in C_0^\infty(\Omega)'$ tali che esiste una successione $u_j \in A$ con $u_j \to u$ secondo la definizione precedente.

Def. $A \subset C_0^\infty(\Omega)'$ è detto chiuso se $\bar{A} = A$

In questo modo possiamo definire una topologia su $C_0^\infty(\Omega)'$. Si verifica infatti che sono soddisfatti gli assiomi sugli aperti. Sotto questa luce, il teorema di Banach - Steinhaus può essere visto come che $\mathcal{D}'(\Omega)$ è chiuso in $C_0^\infty(\Omega)'$.

Teorema

$$\overline{\mathcal{D}'_F(\Omega)} = \mathcal{D}'(\Omega)$$

Dim. È evidente che $\overline{\mathcal{D}'_F(\Omega)} \subseteq \overline{\mathcal{D}'(\Omega)} = \mathcal{D}'(\Omega)$

Si tratta di dimostrare pertanto l'inclusione inversa, ovvero che $\mathcal{D}'(\Omega) \subseteq \overline{\mathcal{D}'_F(\Omega)}$.

Ragioniamo su $\mathcal{E}'(\Omega)$, dimostrando che $\mathcal{D}'(\Omega) \subseteq \overline{\mathcal{E}'(\Omega)}$, il che è sufficiente poiché $\overline{\mathcal{E}'(\Omega)} \subseteq \overline{\mathcal{D}'_F(\Omega)}$

Si deve dunque dimostrare che presa $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ esiste una successione $u_j \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $j = 1, 2, \dots$, $u_j \to u$, cioè per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ risulta $u_j(\varphi) \to u(\varphi)$

Sia K_j, $j = 1, 2, \dots$, una successione esaustiva di compatti per Ω, cioè $\bigcup_j K_j = \Omega$, $K_j \subseteq K_{j+1}$. Per esempio, in $\mathbb{R}$ potrebbe essere $K_j = [-j, j]$, ovvero $K_1 = [-1, 1]$, $K_2 = [-2, 2]$, ...

Prendiamo $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi_j(x) = 1$ per $x \in$ un intorno di K_j, $0 \le \psi_j \le 1$, $\operatorname{supp} \psi_j \subset K_{j+1}$.

Si ponga $u_j \overset{\text{def.}}{=} \psi_j u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Affermiamo che $\lim_{j\to\infty} u_j = u$, cioè che per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ risulta $\lim_{j\to\infty} u_j(\varphi) = u(\varphi)$.

Abbiamo infatti $u_j(\varphi) = \psi_j u(\varphi) = u(\psi_j \varphi)$; esiste j_0 tale che per ogni $j \ge j_0$ $\operatorname{supp} \varphi \subset K_j$

$\psi_j(x)$, $j \geq j_0$, $= 1$ per $x \in K_j$ e quindi per $x \in \operatorname{supp} \varphi$;
quindi $\psi_j \varphi = \varphi$

Da un certo j_0 in poi, pertanto, $u(\psi_j \varphi) = u(\varphi)$, e perciò:

$u_j(\varphi) = \psi_j\, u(\varphi) = u(\psi_j \varphi) \to u(\varphi)$

il che verifica la nostra tesi. $[u_j \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\operatorname{supp} u_j \subset \operatorname{supp} \psi_j]$

$\mathcal{D}'(\Omega)$ può contenere $u \in (C_0^\infty(\Omega))'$ che non sono ottenibili derivando funzioni continue, ma tuttavia risultano limiti di derivate di funzioni continue.

Non tratteremo invece gli elementi di $C_0^\infty(\Omega)' \setminus \mathcal{D}'(\Omega)$, sebbene si possa elaborare una teoria su di essi.

Consideriamo ora degli spazi vettoriali generici, dotati di struttura topologia, come $C^0(\Omega)$, $C^m(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$.

Definiamo al solito una norma; se $v \in V$:

1) $\|v\| \geq 0$
2) $\|v\| = 0 \iff v = 0$
3) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$, $\lambda \in \mathbb{C}$
4) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(25.11.2010)

$C^0(K)$, spazio delle funzioni continue sul compatto $K \subset \mathbb{R}^n$, con la norma $\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$, è uno spazio metrico completo: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste infatti n_0 tale per cui, per ogni $n, m > n_0$, risulta $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$

Sia $U_\varepsilon := \{f, \|f\| < \varepsilon\}$.

Def. Uno spazio vettoriale topologico è uno spazio vettoriale V con una topologia, per cui le seguenti applicazioni sono continue:

1) $V \times V \to V \qquad (v, w) \longrightarrow v + w$

2) $\mathbb{C} \times V \to V \qquad (\lambda, v) \longrightarrow \lambda v$





$(w = 0)$

Def. Sia V uno spazio vettoriale. Una seminorma è un'applicazione $p : V \to \mathbb{R}$ tale che:

1) $p(v) \geq 0$ per ogni $v \in V$

2) $p(\lambda v) = |\lambda| \cdot p(v)$

3) $p(v+w) \leq p(v) + p(w)$

Rispetto alla definizione di norma, non è presente la separazione (se $p(v) = 0$ non necessariamente $v = 0$)

Def. Spazio localmente convesso

Sia V uno spazio vettoriale. Sia data una famiglia di seminorme $p \in \mathcal{F}$. Supponiamo che:

- se risulta $p(v) = 0$ per ogni $p \in \mathcal{F}$, allora $v = 0$

Definiamo allora gli intorni dell'origine mediante la base

$U_{p_1,\varepsilon} \cap \dots \cap U_{p_m,\varepsilon}$

dove $p_1, \dots, p_m$ è un numero finito qualsiasi di seminorme in $\mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ e $U_{p,\varepsilon} \overset{\text{def.}}{=} \{v \in V, p(v) < \varepsilon\}$, $p \in \mathcal{F}$.

La topologia così determinata in V, definendo per traslazione gli intorni di ogni $v \in V$, determina uno spazio vettoriale topologico.

Es. $C^0(\Omega)$, per esempio se $\Omega =]a, b[$

Per ogni K compatto, $K \subset \Omega$, definiamo:

$$p_K(f) = \max_{x \in K} |f(x)| \quad \left(= \|f\|_{f|_K} \; C^0(K) \right)$$

Il numero di compatti contenuti in Ω, infinito, ha almeno la potenza del continuo (aleph - 1).
Per avere un ricoprimento di Ω che abbia al più la potenza del numerabile (aleph - 0), è sufficiente considerare una successione esaustiva di compatti K_j, $j = 1, 2, \dots$
Può essere, fissato K, $p_K(f) = 0$ e $f \neq 0$.
Tuttavia, se $p_K(f) = 0$ per ogni K, allora $f \equiv 0$, ovvero, se $f \not\equiv 0$ (non identicamente nulla), risulterebbe $p_K(f) > 0$ per almeno un K.

Def. Uno spazio V localmente connesso è detto spazio di Frechet se:
- la famiglia $\mathcal{F}$ è un insieme numerabile: $p_1, p_2, \dots$
- la topologia è completa

Una successione v_j, $j = 1, 2, \dots$ in V, spazio di Fréchet, converge a $v \in V$ se, per ogni seminorma p_K, $K = 1, 2, \dots$, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_0 tale che per ogni $n > n_0$ risulta $p_K(v - v_j) < \varepsilon$.
Una successione v_j è di Cauchy, $j = 1, 2, \dots$, se per ogni seminorma p_K, $K = 1, 2, \dots$, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_0 tale che per ogni $n, m > n_0$ risulta $p_K(v_n - v_m) < \varepsilon$
In uno spazio di Frechet, tutte le successioni di Cauchy convergono.

Gli spazi di Fréchet sono metrizzabili. Sia V di Fréchet, si definisce:

$$v \in V \qquad p(v) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \cdot \frac{p_j(v)}{p_j(v) + 1}$$

Benchè $p(v) = 0 \Rightarrow v = 0$, $p(v)$ non è una norma, in quanto lo scalare non filtra. Tuttavia $p(v - w) = d(v, w)$ è una distanza.
Dato V di Fréchet, la sua topologia di spazio localmente convesso coincide con quella di spazio metrico fornita dalla distanza $d(v, w)$.
In uno spazio metrico convergenza e proprietà di Cauchy possono rileggersi in termini di $d(v, w) = p(v - w)$

Torniamo in $C^0(\Omega)$. Se K_j è una successione esaustiva, allora $p_j(f) = \max_{x \in K_j} |f(x)|$, e si ha completezza.
$f_j \to f$ in $C^0(\Omega)$ se converge uniformemente in K_j, cioè per ogni j fissato

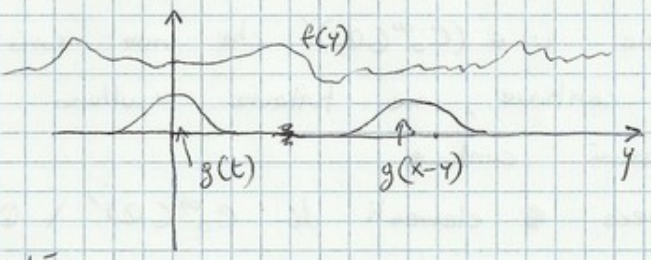
$$\lim_{j \to \infty} \max_{x \in K_j} |f_j(x) - f(x)| = 0$$

(01.12.2010)

CONVOLUZIONE

Def. Siano $f, g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, una delle due almeno a supporto compatto. Si definisce allora:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$$ prodotto di convoluzione



Proprietà:

① $f * g$ è in $C^0(\mathbb{R}^n)$

② $f * g = g * f$

Dimostriamo la seconda:

$$(f * g)(x) = \int f(y)\, g(x-y)\, dy = \int f(x-t)\, g(t)\, dt = \int f(x-y)\, g(y)\, dy = (g * f)(x)$$

Si osservi che, se sia f quanto g sono a supporto compatto, allora $(f * g) \in C^0(\mathbb{R}^n)$ è anch'essa a supporto compatto.

③ Siano $f, g, h \in C^0(\mathbb{R}^n)$, di cui almeno due a supporto compatto. Vale allora la proprietà distributiva:

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

④ Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, e sia almeno una delle due a supporto compatto. Allora $f * g \in C^1(\mathbb{R}^n)$

Risulta $\partial_{x_j}(f * g) = (\partial_{x_j} f) * g$

Infatti si può derivare sotto il segno di integrale:

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$$\partial_{x_j}(f * g)(x) = \int (\partial_{x_j} f)(x-y)\, g(y)\, dy = \partial_{x_j} f * g$$

⑤ Siano $f \in C^j(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$, una almeno delle due a supporto compatto. Allora $f * g \in C^{j+k}(\mathbb{R}^n)$, inoltre sia $|\alpha| \le j$, $|\beta| \le k$, allora $\partial_x^{\alpha+\beta}(f * g) = \partial_x^{\alpha} f * \partial_x^{\beta} g$

⑥ Siano $f, g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, una almeno a supporto compatto. Allora $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, dove il segno di somma indica l'insieme di tutte le somme possibili.

- In $C^m(\Omega)$, $m > 0$

$$p_j(f) = \sum_{|\alpha| \le m} \max_{x \in K_j} |\partial^\alpha f(x)|$$ K_j successione esaustiva.

$C^m(K)$, K compatto, con la definizione precedente è uno spazio di Banach completo.

- In $C^\infty(\Omega)$

$$p_{m,j}(f) = \sum_{|\alpha| \le m} \max_{x \in K_j} |\partial^\alpha f(x)| \qquad m = 0, 1, 2, \dots \quad j = 1, 2, \dots$$

$$p_j(f) = \sum_{|\alpha| \le j} \max_{x \in K_j} |\partial^\alpha f(x)|$$

Teorema $\mathcal{E}'(\Omega)$ è il duale topologico di $C^\infty(\Omega)$.

$v \in \mathcal{E}'(\Omega) \qquad v : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$

Le $C_0^\infty(\Omega)$, tuttavia, non sono uno spazio di Fréchet, pur essendo uno spazio vettoriale topologico

Def. (di topologia in $C_0^\infty(\Omega)$ tramite la convergenza di successioni)
Siano φ_j, $j = 1, 2, \dots$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Si dice che φ_j converge a φ in $C_0^\infty(\Omega)$ se:

- esiste K, compatto in Ω, tale che se $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$, $\operatorname{supp} \varphi \subset K$
- per ogni α, la successione $\partial^\alpha \varphi_j$ converge uniformemente a $\partial^\alpha \varphi$ in K, cioè $\max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi| \to 0$, ovvero $\partial^\alpha(\varphi - \varphi_j)(x)$

Teorema $\mathcal{D}'(\Omega)$ è il duale topologico di $C_0^\infty(\Omega)$.

Dim. Le due seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) - per ogni K esistono k, C tali che:

$$|v(\varphi)| \le C \cdot \sum_{|\alpha| \le k} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in C_0^\infty(K)$$

(ii) - se $\varphi_j \to 0$ in $C_0^\infty(\Omega)$, allora $v(\varphi_j) \to 0$ in $\mathbb{C}$.

Infatti:

(i) $\to$ (ii)

Se $\varphi_j \to 0$, $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$.

Si applichi allora (i) in K per $\varphi = \varphi_j$.

(ii) $\to$ (i)

Proviamo che $\neg$(i) $\to \neg$(ii). La negazione di (i) significa che esiste K tale che per ogni k, C grandi quanto si vuole, in particolare per $k = C = j \to \infty$, la disuguaglianza di controllo non vale, cioè esiste $\varphi_j \in C_0^\infty(K)$ tale che

$$|v(\varphi_j)| > j \cdot \sum_{|\alpha| \le j} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j(x)|$$

Si normalizzi φ_j in maniera che $v(\varphi_j) = 1 \rightarrow \tilde{\varphi}_j = \frac{1}{v(\varphi_j)} \varphi_j$

Dunque $1 = |v(\varphi_j)| > j \cdot \sum_{|\alpha| \leq j} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j(x)|$

Ne segue che:

$$\sum_{|\alpha| \leq j} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j(x)| < \frac{1}{j}$$

$$\Rightarrow \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j(x)| < \frac{1}{j}$$

$\searrow 0$ $\qquad$ $\searrow 0$

In questo caso $\varphi_j \to 0$ in $C_0^\infty(\Omega)$, ma $v(\varphi_j) \to 1$, poiché $v(\varphi_j) = 1$. Dunque abbiamo negato la (ii).

[inserire parte sulla densità di strato]

DENSITÀ DI STRATO

$$\delta_\Sigma(P) = \int_\Sigma \rho(x)\, d\sigma \qquad \text{con } \Sigma \text{ IPERSUPERFICIE IN } \mathbb{R}^m$$

Σ IPERSUPERFICIE DI DIM. $m-1$ IN $\mathbb{R}^m$

$$\Sigma = \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \dots, u_{m-1}) \\ \vdots \\ x_m = x_m(u_1, \dots, u_{m-1}) \end{cases} \quad \text{con } u = (u_1, u_2, \dots u_{m-1}) \in U \subset \mathbb{R}^{m-1}$$

↖ FUNZIONI C^∞

SIA $$A(u) = \left\| \begin{matrix} e_1 & \dots & e_m \\ \partial_{u_1} x_1(u) & \dots & \partial_{u_1} x_m(u) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{u_{m-1}} x_1(u) & \dots & \partial_{u_{m-1}} x_m(u) \end{matrix} \right\| = \left| I_1(u) e_1 + I_2(u) e_2 + \dots I_m(u) e_m \right| =$$

$$= \sqrt{I_1^2(u) + \dots + I_m^2(u)}$$

↳ determinante

↳ VALORE ASSOLUTO

ALLORA $$\int_\Sigma f(x)\, d\sigma \overset{\text{def}}{=} \int_U f(x(u)) A(u)\, du \qquad (1)$$

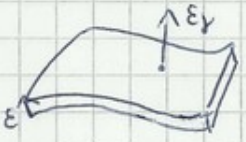
DEF

↓

TALE DEFINIZIONE È INDIPENDENTE DALLA PARAMETRIZZAZIONE

DEF (MINKOWSKI)

VOGLIAMO DEFINIRE LA SUPERFICIE DEL LAMIERINO:



POSSIAMO OTTENERLA TRAMITE CALCOLO DEL VOLUME V_ε

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{V_\varepsilon} dx}{\varepsilon} \overset{\text{def}}{=} \int_\Sigma d\sigma \qquad (2)$$

TEOREMA (MINKOWSKI)

LE DEF (1) E (2) SONO EQUIVALENTI

INTEGRALI IMPROPRI m-DIMENSIONALI

RICHIAMO: $m=1$ • $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ CONVERGE $\iff \alpha > 1$

• $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ CONVERGE $\iff \alpha < 1$

$m > 1$

* NORMA EUCLIDEA $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$

• $\int_{*\,|x|\geq 1} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx$

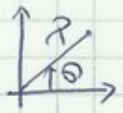
• $\int_{|x|<1} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx$



→ PROBLEMA: PER QUALI VALORI DI α AVVIENE CONVERGENZA?

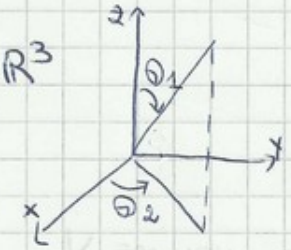
SOLUZIONE: UTILIZZIAMO LE COORDINATE POLARI

• $\mathbb{R}^2$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\Theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\Theta \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

• $\mathbb{R}^3$



$$\begin{cases} z = \rho\cos\Theta_1 \\ x = \rho\,\mathrm{sen}\Theta_1\cos\Theta_2 \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\Theta_1\,\mathrm{sen}\Theta_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \Theta_1 \in [0,\pi] \\ \Theta_2 \in [0,2\pi] \end{matrix}$$

$$J = \rho^2\,\mathrm{sen}\Theta_1$$

• $\mathbb{R}^m \quad \Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_{m-1})$

$$\begin{cases} x_1 = \rho\,\mathrm{sen}\Theta_1 \cdots = \rho P_1(\Theta) \\ x_2 = \rho\,\mathrm{sen}\Theta_1 \cdots = \rho P_2(\Theta) \\ \vdots \\ x_m = \rho\,\mathrm{sen}\Theta_1 \cdots = \rho P_m(\Theta) \end{cases}$$

DOVE $P_1, \dots, P_m$ SONO MONOMI DI $\cos\Theta_1$, $\mathrm{sen}\Theta_1, \dots \cos\Theta_m, \mathrm{sen}\Theta_m$

$\Theta \in M = [0,\pi] \times \dots \times [0,2\pi]$

JACOBIANO:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} & \frac{\partial x_1}{\partial \Theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \Theta_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial \rho} & \frac{\partial x_m}{\partial \Theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \Theta_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1(\Theta) & \rho\frac{\partial P_1}{\partial \Theta_1} & \cdots & \rho\frac{\partial P_1}{\partial \Theta_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_m(\Theta) & \rho\frac{\partial P_m}{\partial \Theta_1} & \cdots & \rho\frac{\partial P_m}{\partial \Theta_m} \end{vmatrix} = \rho^{m-1} P(\Theta)$$

↓ POLINOMIO DI $\cos\Theta_1, \mathrm{sen}\Theta_1, \dots \mathrm{sen}\Theta_{m-1}, \cos\Theta_m$

ESEMPIO

$m=2 \to P(\Omega)=1$

$m=3 \to P(\Omega)=\sin\Omega_1$

QUINDI

$$\int_{|x|\geq 1} \frac{1}{|x|^\tau} = \int_1^{+\infty} \int_U \frac{1}{\rho^\tau} \underbrace{\rho^{m-1} P(\Omega)}_{J} \, d\rho \, d\Omega = \int_U P(\Omega)\, d\Omega \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{\tau-m+1}} \, d\rho$$

$|x|=\rho$

$U=[0,\pi)\times\dots\times[0,2\pi]$

CHE CONVERGE $\iff$ $\underbrace{\tau-m+1>1}_{\text{UTILIZZO CRITERIO CASO } m=1}$ $\iff$ $\boxed{\tau>m}$

STESSO RAGIONAMENTO PER

$$\int_{|x|\leq 1} \frac{1}{|x|^\tau}\, dx \quad \text{CONVERGE} \iff \boxed{\tau<m}$$

ESEMPIO:

- $\iiint_{x^2+y^2+z^2\geq 1} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dx\,dy\,dz \Rightarrow \tau=2 \not> 3$ NON CONVERGE
- $\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dx\,dy\,dz \Rightarrow \tau=2<3$ CONVERGE

CONDIZIONE DI CONVERGENZA

f CONTINUA, $f\in C^0(\mathbb{R}^m)$

SE PER $\boxed{|x|\geq 1}$ RISULTA $|f(x)|\leq \frac{C}{|x|^\tau}$ con $C>0$, $\boxed{\tau>m}$

$\Rightarrow$ SI HA CONVERGENZA

INFATTI:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\,dx = \underbrace{\int_{|x|\leq 1} \dots}_{\text{CONVERGE}} + \underbrace{\int_{|x|>1} |f(x)|\,dx}_{\leq C\int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^\tau} < \infty}$$

PIU' IN GENERALE:

SE $|f(x)| \le \frac{C}{(1+|x|^2)^N}$ $\quad N > \frac{m}{2}$

ALLORA $\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,dx$ CONVERGE

- $\int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\frac{1}{(1+|x|)^M}}_{\in C^0(\mathbb{R}^m)}\,dx$ CONVERGE $\iff M > m$

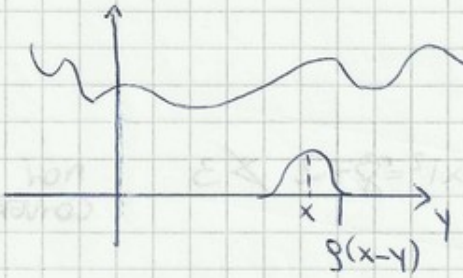
CONVOLUZIONE

DEF SIANO $f, g \in C^0(\mathbb{R}^m)$, UNA DELLE 2 ALMENO A SUPPORTO COMPATTO. SI DEFINISCE ALLORA

$$(f*g)(x) = \int f(y)\, g(x-y)\,dy$$

L'INTEGRALE CONVERGE,

ES



$f(y)\cdot g(x-y) =$ f SI SMORZA VELOCE

PROPRIETA'

① $f*g \in C^0(\mathbb{R}^m)$

② $f*g = g*f$

DIM

$$(f*g)(x) = \int f(y)\, g(x-y)\,dy = \int f(x-t)\, g(t)\,dt = (g*f)(x)$$

CAMBIO DI VAR $x-y=t$
$J=1$

↓

SOSTITUZIONE, POICHÉ IN $\mathbb{R}^n$ DOM COMPATTO

CONVOLUZIONI TRA DISTRIBUZIONI E FUNZIONI C^∞

Partendo dalla definizione fornita prima: $(f * g) = \int f(y)\, g(x-y)\, dy$ proviamo a sostituire f con una distribuzione $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, e g con una funzione test $\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Abbiamo:

$\int f(y)\, g(x-y)\, dy = f_y(\varphi(x-y))$

Def. Sia $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Allora $(v * \varphi)(x) \overset{\text{def.}}{=} v(\varphi(x-y))$, con $v * \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

Es. Sia $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, delta di Dirac. Prendiamo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Vale $\delta * \varphi = \delta_y(\varphi(x-y)) = \varphi(x-0) = \varphi(x)$, dunque $\delta * \varphi = \varphi$.

La delta di Dirac riproduce quindi la funzione test in termini di prodotto di convoluzione.

Es. $\delta^{(\alpha)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Segue $(\delta^{(\alpha)} * \varphi)(x) = \delta_y^{(\alpha)}(\varphi(x-y)) = (-1)^{|\alpha|} \cdot \partial_y^\alpha(\varphi(x-y))|_{y=0}$

$= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha\varphi)(x-y)|_{y=0} = (\partial^\alpha\varphi)(x-y)|_{y=0} = (\partial^\alpha\varphi)(x)$

ricordando che $\delta^{(\alpha)}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(0)$.

Dunque $\delta^{(\alpha)} * \varphi = \partial^\alpha\varphi$

Proprietà:

1. $v * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
2. linearità: $v * (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 \cdot v * \varphi_1 + \lambda_2 \cdot v * \varphi_2$

   $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) * \varphi = \lambda_1 v_1 * \varphi + \lambda_2 v_2 * \varphi$
3. $\partial^\alpha(v * \varphi) = \partial^\alpha v * \varphi = v * \partial^\alpha\varphi$
4. $\operatorname{supp}(v * \varphi) \subset \operatorname{supp} v + \operatorname{supp}\varphi$
5. $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (v * \varphi) * \psi = v * (\varphi * \psi)$
6. $\varphi_j \to 0$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow v * \varphi_j \to 0$ in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

   Questo implica la convergenza uniforme di $\partial^\alpha(v * \varphi_j)$ su ogni $K \subset \mathbb{R}^n$

Def. Sia $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, sia $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Allora $(v * \varphi)(x) \overset{\text{def.}}{=} v_y(\varphi(x-y))$

CONVOLUZIONE TRA DISTRIBUZIONI

Siano $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, e consideriamo $u * v$.

$$(u * v)(x) = \int u(x-y)\, v(y)\, dy = \int u(y)\, v(x-y)\, dy$$

- Per definire bene quanto sopra, dobbiamo ricorrere alla teoria degli operatori negli spazi funzionali.
- Sia $P: A \to B$ lineare, generalmente $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ o $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si scrive anche $P \in \mathcal{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ e nell'altro caso $P \in \mathcal{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n))$.
- Per esempio, sia $P: C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Un'applicazione può essere $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to f(x)\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$
- Un altro esempio di operatore è dato da quello alle derivate parziali lineare: $P = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha(x)\, \partial^\alpha$, dove $c_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ un caso notevole è quello in cui le funzioni a coefficiente sono costanti.
- Abbiamo poi l'operatore di convoluzione:

$$\begin{array}{ccc} u * : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \psi \qquad\qquad & & \psi \\ \varphi & \longrightarrow & u * \varphi \end{array}$$

Si può dimostrare che gli operatori che sono sia alle derivate parziali e lineari, sia di convoluzione, sono tutti e soli quelli del caso particolare visto prima in cui le funzioni sono costanti.

Infatti $P\varphi = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \cdot \partial^\alpha \varphi \overset{?}{=} u * \varphi$

$$\partial^\alpha \varphi = \delta^{(\alpha)} * \varphi$$

$$\left(\sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \cdot \delta^{(\alpha)}\right) * \varphi$$

(02.12.2010)

- $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $\quad u* : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$
  $u* \in \mathcal{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n))$

- $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ $\quad u* : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$
  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
  $u* \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n))$, $\in \mathcal{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$
- Consideriamo anche l'operatore di traslazione:
  $\tau_{x_0}(\varphi(x)) = \varphi(x-x_0) \in \mathcal{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$
  $\in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n))$

  $\tau_{x_0} = \delta_{x_0} *$
  $(\delta_{x_0} * \varphi)(x) = \delta_{x_0}(\varphi(x-y))$
  L'operatore di traslazione può essere dunque visto come il prodotto di convoluzione con la rispettiva delta di Dirac.
- Vale il seguente teorema:
  Teor. Sia $P \in \mathcal{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$
  Allora esiste $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tale che $U = u*$ se e solo se:
  ① P commuta con tutte le traslazioni: $P(\tau_{x_0}\varphi) = \tau_{x_0}(P\varphi)$
  ② P è continuo, cioè se $\varphi_j \to 0$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ allora $P\varphi_j \to 0$ in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$
  Dim. $u*$ soddisfa 1) e 2). Infatti:
  - la 2) è la proprietà 6) del prodotto distribuzioni $* C^\infty$
  - la 1) $u * (\tau_{x_0}\varphi) = u(\varphi(x-x_0)\varphi) = u_y(\varphi(x-x_0-y))$
    $= u_y(\varphi(x-y)-x_0) = \tau_{x_0}(u*\varphi)(x)$
- Vale pure:
  Teor: Sia $P \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n))$ $\quad [P \in \mathcal{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C_0^\infty(\mathbb{R}^n))]$
  Allora esiste $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ come prima.
- Un altro risultato porta ad una definizione:
  Teor. Siano $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si pensi agli operatori $u*$, $v*$.
  Si consideri la loro composizione $u*(v*)$:
  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{v*} C^\infty(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{u*} C^\infty(\mathbb{R}^n)$
  Questo è un operatore in $\mathcal{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n))$ che verifica 1) e 2) nel teorema precedente.
  Dim. Verifica 1): $\tau_{x_0}(u*)(v*) = \tau_{x_0}P = (u*)\tau_{x_0}(v*)$
  $= (u*)(v*)\tau_{x_0} = P\tau_{x_0}$
  Verifica anche 2), in quanto la composizione di funzioni continue è continua.

Quindi per il teorema precedente esiste w tale che $P = w *$, $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si pone per definizione $u * v \overset{\text{def}}{=} w$.

Se $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $w * \varphi \overset{\text{def.}}{=} u * (v * \varphi)$

Es. · $\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Sarà $\delta * (v * \varphi) = v * \varphi$, dunque $\delta * v = v$

· $\delta^{(\alpha)} * v = (\partial^\alpha v) *$ infatti:

$\delta^{(\alpha)} * (v * \varphi) = \partial^\alpha (v * \varphi) = (\partial^\alpha v) * \varphi$

Proprietà:

1) $u * v = v * u$
2) $(u * v) * w = u * (v * w)$
3) $\partial^\alpha (u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v$
4) $\operatorname{supp}(u * v) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v$
5) Se $u_j \to u$ in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, allora $u_j * v \to u * v$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ovvero l'operazione di convoluzione è continua in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Oss. Se $u_j \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $u_j \to \delta$, allora per ogni $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, risulta $u_j * v \to v$

Dim. Si applichi la 5) precedente con $u = \delta$:

$u_j * v \longrightarrow \delta * v = v$

Le $u_j * v$ vengono dette approssimazioni dell'identità o regolarizzazioni di v.

In genere, se u_j sono opportune, sono molto regolari.

Teor. Sia $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Esiste una successione di funzioni $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \dots$, tali che $f_j \to v$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ovvero $\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Lemma Esiste una successione $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tale che $\varphi_j \to \delta$.

Si prenda come φ_j la funzione a campana centrata nell'origine di raggio $\frac{1}{j}$, $j = 1, 2, \dots$, normalizzata.

Sia in particolare $\varphi_1(x)$ la funzione a campana di centro l'origine e raggio 1, normalizzata.

Allora $\varphi_j(x) = j^n \cdot \varphi_1(jx)$. Si ha inoltre:

· $\operatorname{supp} \varphi_1 = \{|x| \le 1\}$

· $\operatorname{supp} \varphi_j = \{|jx| \le 1\} = \{|x| \le \frac{1}{j}\}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x)\,dx = j^n \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(jx)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(y)\,dy = 1$$

Si dimostra che $\varphi_j \to \delta$, cioè per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ risulta:

$$\varphi_j(\varphi) = \int \varphi_j(x)\,\varphi(x)\,dx \Rightarrow \delta(\varphi) = \varphi(0)$$

($\varphi_j \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$)

Dim. Teorema

Sia $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si prenda $\varphi_j \to \delta$ come nel lemma precedente. Allora per l'osservazione $f_j = \varphi_j * v = \delta * v = v$, $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Teor. Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. Esiste una successione $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_j \to f$ (in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) in norma $L^p(\mathbb{R}^n)$

Dim. Basta definire $f_j = f * \varphi_j$

In $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, f_j converge a f nella norma di $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Si può dimostrare che, oltre a $\overline{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, valgono anche $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

(09.12.2010)

[Prossime lezioni: 15 dicembre, 16 dicembre con orario solito
11 gennaio, 18 gennaio, 20 gennaio, 25 gennaio 16-18 Aula 3]

Lemma (Riemann - Lebesgue)

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ e $\lim_{\xi \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$

Nel caso $n = 1$:

$$|\hat{f}(\xi_0 + h) - \hat{f}(\xi_0)| = \left|\int (e^{-i(\xi_0+h)x} - e^{-i\xi_0 x}) f(x)\, dx\right| < \varepsilon$$

$$\leq \left|\int_{|x|\geq R} \ldots\ldots\right| + \left|\int_{|x|\leq R} \ldots\ldots\right|$$

Con:

$$\int_{|x|\geq R} |\ldots\ldots|\, dx \leq 2 \cdot \int_{|x|\geq R} f(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per } R \text{ opportunamente grande}$$

Questo prova la continuità.

Dimostriamo ora che $\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0$, provando che $\lim_{\xi \to +\infty} \int e^{-ix\xi} f(x)\, dx = 0$, ovvero che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste H tale che per $\xi > H$ risulta $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx\right| < \varepsilon$

Lemma 1 (esempio di calcolo di $\hat{f}$)

Sia $\chi_{[a,b]}(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$; $f \in L^1(\mathbb{R})$

Si ha:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) f(x)\, dx - i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x\xi) f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \cos(x\xi)\, dx - i \cdot \int_a^b \sin(x\xi)\, dx$$

$$= \frac{1}{\xi} \int_a^b \cos(x\xi)\, d(x\xi) - \frac{i}{\xi} \cdot \int_a^b \sin(x\xi)\, d(x\xi)$$

$$= \frac{1}{\xi}(\sin(b\xi) - \sin(a\xi)) + \frac{i}{\xi}(\cos(b\xi) - \cos(a\xi))$$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{4}{\xi}$$

Lemma 2 Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dato $\varepsilon > 0$ esiste una funzione step, cioè $\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{m} M_j \cdot \chi_{[a_j, b_j]}(x)$, tale che $\|f - \tilde{f}\|_{L^1} < \varepsilon$, ovvero le funzioni step sono dense nello spazio L^1.

Vale:

$$|\hat{f}(\xi)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} [(f(x) - \tilde{f}(x)) + \tilde{f}(x)]\, dx\right|$$

$$\leq \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} (f(x) - \tilde{f}(x))\, dx\right| + \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \tilde{f}(x)\, dx\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-ix\xi}| \cdot |f(x) - \tilde{f}(x)|\, dx \quad \|f - \tilde{f}\|_1 < \frac{\varepsilon}{4} + \ldots$$

$$= \|f - \tilde{f}\|_1 + \ldots$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \ldots$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \left(\sum_{j=1}^{m} M_j \chi_{[a_j,b_j]}(x) \right) dx \right|$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{j=1}^{m} M_j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \cdot \chi_{[a_j,b_j]}(x)\, dx \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{m} |M_j| \cdot \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \chi_{[a_j,b_j]}(x)\, dx \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{m} |M_j| \cdot \frac{4}{\xi}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

per $\xi > \frac{8}{\varepsilon} \cdot \sum_{j=1}^{m} |M_j| = H$

Esempi:

- $\hat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) = 2 \cdot \frac{\sin \xi}{\xi}$

- $y = f(x) = e^{-|x|}$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-|x|}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(x\xi) - i \cdot \sin(x\xi))\, e^{-|x|}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi)\, e^{-|x|}\, dx - i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x\xi) \cdot e^{-|x|}\, dx$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \cos(x\xi)\, e^{-x}\, dx$$

che si risolve integrando per parti:

$$\int \cos(x\xi)\, e^{-x}\, dx = -\cos(x\xi)\, e^{-x} - \xi \cdot \int e^{-x} \cdot \sin(x\xi)\, dx$$

$$= -\cos(x\xi) e^{-x} - \xi \left(-e^{-x} \sin(x\xi) + \xi \cdot \int e^{-x} \cos(x\xi)\, dx \right)$$

$$= -\cos(x\xi)\, e^{-x} + \xi \cdot \sin(x\xi)\, e^{-x} - \xi^2 \cdot \int e^{-x} \cos(x\xi)\, dx$$

e, chiamato I l'integrale:

$$(1+\xi^2)\, I = -\cos x\xi \cdot e^{-x} + \xi \cdot \sin x\xi \cdot e^{-x}$$

$$I = \frac{1}{1+\xi^2}\, e^{-x} \left[-\cos x\xi + \xi \cdot \sin x\xi \right]$$

valutando:

$$I\Big|_0^{+\infty} = \frac{0-(-1)}{1+\xi^2} = \frac{1}{1+\xi^2}$$

dunque $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$

Regola qualitativa generale: se $f(x)$ decresce molto rapidamente all'infinito, allora $\hat{f}(\xi)$ è molto regolare localmente. Viceversa, se $f(x)$ è molto regolare localmente, $\hat{f}(\xi)$ decresce all'infinito molto rapidamente.

Con riferimento agli esempi precedenti:

- $e^{-|x|}$ decresce molto rapidamente; e $\frac{1}{1+\xi^2}$ è analitica, quindi molto regolare.
- $e^{-|x|}$ ha regolarità limitata, è C^0; e $\frac{1}{1+\xi^2}$ decresce ma non molto rapidamente
- $\chi_{[-1,1]}$ decresce molto rapidamente; e $2 \cdot \frac{\sin \xi}{\xi}$ è analitica intera
- $\chi_{[-1,1]}$ è poco regolare, ha discontinuità di prima specie; e $2 \cdot \frac{\sin \xi}{\xi}$ decresce lentamente

(15.12.2010)

Consideriamo ancora la trasformata di Fourier:

$Ff(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)\, dx$

$F: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$(C_0^0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^0(\mathbb{R}^n_\xi),\ \lim_{\xi \to \infty} f(\xi) = 0\})$

Si preferisce tuttavia operare nello spazio delle energie:

$F: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

In questo modo possono però insorgere alcuni problemi. Per esempio, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ma $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, in generale l'integrale $\int e^{-ix\xi} f(x)\, dx$ non converge. Un siffatto esempio è dato da $f(x) = (1+|x|)^{-1}$.

Un primo modo per superare il problema, proposto nel 1940, è quello di definire l'integrale mediante il metodo delle troncature, ovvero troncando la funzione ad un certo x e facendo poi il limite.

L'approccio più moderno prevede invece l'appoggio alla teoria delle distribuzioni.

Def. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio di tutte le funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che per ogni α, β risulta $|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha\beta}$ per $x \in \mathbb{R}^n$, cioè

$\| x^\alpha \partial^\beta f(x) \|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$

Prop. Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora per ogni intero $N \geq 0$ esiste una costante C_N tale che: $|f(x)| \leq \frac{C_N}{(1+|x|^2)^N}$

Dim. Dobbiamo dimostrare che $(1+|x|^2)^N \cdot |f(x)| = g(x) \leq C_N$, ovvero che $g(x)$ è una funzione limitata.

Sviluppando con la formula del binomio di Newton:

$(1+|x|^2)^N = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} |x|^{2j}$

inoltre possiamo scrivere:

$|x|^2 = (x_1^2 + (x_2^2 + \dots + x_n^2))$

a cui riapplicare ancora Newton ponendo $A = x_1^2$, $B = x_2^2 + \dots + x_n^2$.

Operando in questo modo si ottiene una forma del tipo:

$\sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha x^{2\alpha}$, con $x^{2\alpha} = x_1^{2\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{2\alpha_n}$

Otteniamo quindi:

$\sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha x^{2\alpha} |f(x)| = \sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha \cdot |x^{2\alpha} \cdot f(x)| \leq C_N$

con $|x^{2\alpha} \cdot f(x)|$ limitata, poiché per definizione di spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ risulta $|x^\alpha \cdot \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha\beta}$ per $x \in \mathbb{R}^n$.

Questo prova la tesi.

Cor. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$

Dim. $\int |\varphi(x)|\,dx \le \int \frac{c_N}{(1+x^2)^N}\,dx < \infty$, ponendo $N > \frac{n}{2}$

Es. 1 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Infatti $\max_{x \in \operatorname{supp}} |x^\alpha \cdot \partial^\beta \varphi(x)| \le c$, dove $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Poiché $\operatorname{supp} \partial^\beta \varphi(x) \subset \operatorname{supp} \varphi$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Es. 2 Consideriamo $f(x) = e^{-|x|^2} = e^{-x_1^2} \cdot e^{-x_2^2} \cdot \ldots \cdot e^{-x_n^2}$

La generica funzione $x^\alpha \cdot \partial^\beta e^{-|x|^2}$ è data da $x_\alpha^\alpha \cdot P_\beta(x) \cdot e^{-|x|^2}$, dove P_β è un polinomio dipendente da β. La dimostrazione di questo fatto segue, per esempio, per induzione.

Poiché $|x^\alpha \cdot P_\beta(x) \cdot e^{-|x|^2}| \le c$, $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Es. 3 Poniamo ora $f(x) = (\cosh x)^{-1} = 2 \cdot (e^x + e^{-x})^{-1}$. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Es. 4 Altro esempio è dato da $f(x) = e^{-(1+|x|^2)^\varepsilon}$

Prop. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora per ogni γ, δ risulta $x^\gamma \partial^\delta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Dim. La tesi si può scrivere come che, per ogni α, β:

$x^\alpha \partial^\beta (x^\gamma \partial^\delta f) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Sviluppando con Leibniz:

$$x^\alpha \cdot \sum_{\theta \le \beta} \binom{\beta}{\theta} \partial^\theta x^\gamma \partial^{\beta-\theta} (\partial^\delta f)$$

$$= x^\alpha \cdot \sum_{\theta \le \beta} \binom{\beta}{\theta} \partial^\theta x^\gamma \partial^{\beta-\theta+\delta} f$$

$$= x^\alpha \cdot \sum_{\theta \le \beta} \binom{\beta}{\theta} \cdot k \cdot x^{\gamma-\theta} \cdot \partial^{\beta-\theta+\delta} f$$

$$= \sum_{\text{finita}} c_{\mu\nu} \cdot x^\mu \partial^\nu f(x)$$

Per ipotesi $x^\mu \partial^\nu f(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, in quanto $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dunque la somma finita $\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, il che prova la tesi.

Prop. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio di Fréchet rispetto alla famiglia di seminorme:

$$p_j(f) = \sum_{|\alpha|+|\beta| \le j} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$$

Cor. (alla proposizione dimostrata prima). Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, siano fissati γ, δ. Allora $x^\gamma \partial^\delta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Prop. (convergenza di una successione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Siano f_j, $j = 1, 2, \ldots$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Risulta $f_j \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se per ogni α, β la successione $x^\alpha \partial^\beta f_j$ converge a $x^\alpha \partial^\beta f$ uniformemente in $\mathbb{R}^n$, ovvero se per ogni α, β risulta:

$$\|x^\alpha \partial^\beta (f_j - f)\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta (f_j(x) - f(x))| \to 0$$

Prop. Sia $f_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora $\|x^\alpha \partial^\beta f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$, per ogni α, β fissati.

Dim. La norma in questione è pari a $\int |x^\alpha \partial^\beta f_j(x)|\, dx$.

Possiamo scrivere:

$$\int |x^\alpha \partial^\beta f_j(x)|\, dx = \int \frac{1}{(1+|x|^2)^N} \cdot (1+|x|^2)^N \cdot |x^\alpha \partial^\beta f_j(x)|\, dx \qquad N > \frac{n}{2}$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| (1+|x|^2)^N \cdot x^\alpha \partial^\beta f_j(x) \right| \cdot \int \frac{dx}{(1+|x|^2)^N}$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \sum_{|\gamma| \leq N} c_\gamma \cdot x^{2\gamma} \cdot x^\alpha \partial^\beta f_j(x) \right| \cdot k \qquad \text{per opportuni } c_\gamma, k$$

$$\leq \sum_{|\gamma| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha+2\gamma} \partial^\beta f_j(x)| \cdot k$$

Poiché $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha+2\gamma} \partial^\beta f_j(x)| \to 0$, anche la sua combinazione lineare cui sopra tende a 0, il che prova la tesi.

Prop. Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Poiché $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, risulta ben definita $\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)\, dx \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teor. (proprietà di Fourier) Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora, denotando $D_{x_j} = -i \cdot \partial_{x_j}$:

(1) · $\widehat{D_{x_j} f}(\xi) = \xi_j \hat{f}(\xi) \qquad j = 1, \dots, n$

(2) · $\widehat{x_j f}(\xi) = -D_{\xi_j} \hat{f}(\xi)$ (proprietà di simmetria)

(1 bis) · $\forall \alpha, \quad \widehat{D^\alpha f}(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

(2 bis) · $\forall \alpha, \quad \widehat{x^\alpha f}(\xi) = (-1)^{|\alpha|} \cdot D_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

(1 ter) · $P = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \cdot D^\alpha \qquad p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \cdot \xi^\alpha$

Si ha l'importante proprietà $\widehat{P(D) f} = p(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$, che permette di trasformare equazioni differenziali in equazioni algebriche

$$P(D) f = g \to \widehat{P(D) f} = \hat{g} \to p(\xi) \hat{f} = \hat{g}$$
$$\to \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi) \cdot [p(\xi)]^{-1} \to f(x) = F^{-1}\left(\frac{\hat{g}(\xi)}{p(\xi)}\right)$$

(16.12.2010)

Dim. Siamo nel caso $n = 1$ e dimostriamo la prima:

$$\widehat{D_x f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} D_x f(x)\, dx = -i \cdot \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} f'(x)\, dx$$

Integrando per parti:

$$\int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} f'(x)\, dx = e^{-ix\xi} f(x) \Big|_{x=-R}^{x=R} - \int_{-R}^{R} \frac{d}{dx}(e^{-ix\xi}) f(x)\, dx$$
$$= e^{-iR\xi} f(R) - e^{iR\xi} f(-R) - \int_{-R}^{R} \frac{d}{dx}(e^{-ix\xi}) f(x)\, dx$$

Il limite dei primi due addendi è 0, poiché $|f(x)| < \frac{C_N}{(1+|x|^2)^N}$

Resta: $-i \cdot \lim_{R \to +\infty} -\int_{-R}^{R} \frac{d}{dx}(e^{-ix\xi}) f(x)\, dx = -i \cdot \lim_{R \to +\infty} -\int -i\xi \cdot e^{-ix\xi} f(x)\, dx$

$$= \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \xi \cdot e^{-ix\xi} f(x)\, dx = \xi \cdot \hat{f}(\xi), \text{ come volevasi dimostrare.}$$

Un accenno di dimostrazione nel caso multidimensionale può essere il seguente:

$$\widehat{D_{x_j} f}(\xi) = -i \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\, \partial_{x_j} f(x)\, dx$$

$$= -i \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_1\xi_1} \cdot \ldots \cdot e^{-ix_j\xi_j} \cdot \ldots \cdot e^{-ix_n\xi_n}\, \partial_{x_j} f(x)\, dx_1 \ldots dx_j \ldots dx_n$$

Poiché $|e^{-ix\xi}\, \partial_{x_j} f(x)| = |\partial_{x_j} f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si può applicare il teorema di Fubini integrando per fili:

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_j\xi_j}\, \partial_{x_j} f(x)\, dx_j \ldots dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n$$

$$= \xi_j \cdot \hat{f}(x_1, \ldots, \xi_j, \ldots, x_n) = \xi_j\, \hat{f}(\xi)$$

- Dimostriamo ora la seconda.

$$-D_{\xi_j} \hat{f}(\xi) = i \cdot \partial_{\xi_j} \left(\int e^{-ix\xi} f(x)\, dx \right)$$

La derivazione sotto il segno di integrale è lecita in quanto:

$$\partial_{\xi_j} (e^{-ix\xi} f(x)) = \partial_{\xi_j} e^{-i(x_1\xi_1 + \ldots + x_j\xi_j + \ldots + x_n\xi_n)} f(x) = -ix_j\, e^{-ix\xi} f(x)$$

ha modulo $|x_j f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$. Si ha dunque:

$$i \cdot \partial_{\xi_j} \left(\int e^{-ix\xi} f(x)\, dx \right) = i \cdot \int \left(\partial_{\xi_j} e^{-ix\xi} f(x)\, dx \right) = \int e^{-ix\xi} x_j f(x)\, dx = \widehat{x_j f}(\xi)$$

come volevasi dimostrare.

- I risultati successivi seguono per applicazione ripetuta.

Cor. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$

Dim. La tesi è che per ogni α e per ogni β:

$$|\xi^\alpha\, \partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi)| \in L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$$

Si ha $|\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f}(\xi)| = |\xi^\alpha \cdot (-1)^{|\beta|} \cdot \widehat{x^\beta f}(\xi)| = |\xi^\alpha \cdot \widehat{x^\beta f}(\xi)|$

$$= |\widehat{D^\alpha (x^\beta f)}| = |\widehat{\partial^\alpha (x^\beta f)}| \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n), \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Teor. Sia $F: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'operatore di trasformazione. Allora $F: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è continua rispetto alla topologia di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè, se $f_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $\hat{f}_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dim. Ipotesi: $f_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè per ogni α, β fissati:

$$\|x^\alpha \partial^\beta f_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{per } j \to \infty$$

Tesi: per ogni α, β: $\|\xi^\alpha \partial^\beta \hat{f}_j(\xi)\|_{L^\infty} \to 0$ per $j \to \infty$

Richiamo: se $f_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora per ogni α, β fissati:

$$\|x^\alpha \partial^\beta f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

Dimostreremo che l'ipotesi implica il richiamo, che a sua volta implica la tesi.

Abbiamo che $\| \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f}_j \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \| \xi^\alpha \widehat{x^\beta f_j}(\xi) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \| \widehat{\partial^\alpha (x^\beta f_j)} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$

$\leq \| \partial^\alpha (x^\beta f_j) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

$= \| \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma x^\beta \partial^{\alpha-\gamma} f_j \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

$= \| \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha \\ (\gamma \leq \beta)}} \binom{\alpha}{\gamma} \kappa_\gamma \cdot x^{\beta-\gamma} \cdot \partial^{\alpha-\gamma} f_j \|$

$\leq \sum_{\text{finita}} c_{\mu\nu} \cdot \| x^\mu \partial^\nu f_j \|_{L^1(\mathbb{R})}$

dove ogni termine della combinazione lineare tende a zero, e dunque tende a zero anche la combinazione lineare stessa.

F è dunque una biezione, essendo un isomorfismo bi-continuo.

A questo punto possiamo definire l'antitrasformata di Fourier:

$$(F^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \int e^{ix\xi} g(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-n} \cdot \hat{g}(-x)$$

Valgono per F^{-1} le stesse proprietà, seppur con opportune modifiche, che per F.

Teor. Risulta $FF^{-1} = F^{-1}F = I$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

In particolare:

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

Lemma – Esempio:

Determiniamo la trasformata di Fourier della gaussiana.

Abbiamo che $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \cdot e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$ è ciò che verificheremo.

- Per semplicità analizziamo il caso $n = 1$, in cui $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Consideriamo l'equazione differenziale $y' + xy = 0$, di cui $f(x)$ e tutte le $C \cdot f(x)$ sono soluzioni.

Trasformando risulta $\widehat{f' + xf}(\xi) = 0 \longrightarrow \hat{f}' + \widehat{xf}(\xi) = 0$

Poiché $f' = i(-if') = i\,Df$, possiamo scrivere:

$i \cdot \widehat{Df} + \widehat{xf} = 0 \longrightarrow i \cdot \xi \cdot \hat{f}(\xi) - D_\xi \cdot \hat{f}(\xi) = 0$

$\longrightarrow i \cdot \xi \cdot \hat{f}(\xi) - i \cdot \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = 0$

$\rightarrow \xi \cdot \hat{f}(\xi) + \hat{f}'(\xi) = 0 \rightarrow y' + \xi y = 0 \rightarrow \hat{f}(\xi) = C \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}}$

$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

ma $\hat{f}(0) = C \cdot e^0 = C$. Dunque $C = \sqrt{2\pi}$.

- Passiamo ora al caso multidimensionale. Abbiamo che:

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = \int e^{-(ix_1\xi_1 + \dots)} e^{\frac{x_1^2 + \dots}{2}} dx$$

$$= \int e^{-ix_1\xi_1} e^{-\frac{x_1^2}{2}} dx_1 \cdot \int \dots = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{\xi_1^2}{2}} \cdot \dots = (2\pi)^{n/2} \cdot e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$$

Può essere istruttivo verificare la formula di inversione per $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$:

$$e^{-\frac{|x|^2}{2}} = (2\pi)^{-n} \cdot \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

(11.01.2011)

Date esami: 8 febbraio e 10 marzo

Dimostriamo la formula di antitrasformazione:

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \int e^{ix\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

Proviamo innanzitutto un tentativo che si rivelerà infruttuoso:

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \int e^{ix\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi = \int e^{ix\xi} \cdot e^{-iy\xi} f(y)\, dy\, d\xi \cdot (2\pi)^{-n}$$

$$= (2\pi)^{-n} \cdot \iint e^{-i(y-x)\xi} f(y)\, dy\, d\xi$$

A questo punto però non si può in generale applicare Fubini e pertanto non si può procedere oltre.

Dobbiamo dunque intraprendere un'alternativa:

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \int e^{ix\xi} f(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-n} \cdot \int (\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varphi(\varepsilon\xi))\, e^{ix\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

dove $\varphi(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$. La quantità a cui prima è uguale a:

$$(2\pi)^{-n} \cdot \int \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\varphi(\varepsilon\xi)\, e^{ix\xi}\, \hat{f}(\xi))\, d\xi$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2\pi)^{-n} \cdot \int_{\varphi(\varepsilon\xi) \in S(\mathbb{R}^n)} \varphi(\varepsilon\xi)\, e^{ix\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2\pi)^{-n} \cdot \int \varphi(\varepsilon\xi) \cdot e^{ix\xi} \cdot \left(\int e^{-iy\xi} f(y)\, dy\right) d\xi$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2\pi)^{-n} \cdot \iint e^{-i(y-x)\xi}\, \varphi(\varepsilon\xi)\, f(y)\, dy\, d\xi \qquad (*)$$

A questo punto Fubini è applicabile, infatti:

$$|e^{-i(y-x)\xi}\, \varphi(\varepsilon\xi)\, f(y)| = |\varphi(\varepsilon\xi)|\, |f(y)| \le \frac{c_N}{(1+|\xi|^2)^N} + \frac{c'_N}{(1+|y|^2)^N} \le \frac{c}{(1+|\xi|^2+|y|^2)^N}$$

$$(1+|\xi|^2+|y|^2+|\xi|^2|y|^2)^N \qquad 2N > 2n \qquad N > n$$

La quantità $(*)$ si può ora riscrivere come:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (2\pi)^{-n} \iint e^{-i(y-x)\xi}\, \varphi(\varepsilon\xi)\, f(y)\, dy\, d\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} (2\pi)^{-n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n_y} \left(\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-i(y-x)\xi}\, \varphi(\varepsilon\xi)\, d\xi\right) f(y)\, dy$$

Ponendo ora $\varepsilon\xi = \eta$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (2\pi)^{-n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n_y} \varepsilon^{-n} \cdot \hat{\varphi}\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) f(y)\, dy$$

Ancora, poniamo $z = \frac{y-x}{\varepsilon}$, da cui $dz = \varepsilon^{-n} \cdot dy$:

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2\pi)^{-n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n_z} \hat{\varphi}(z) \cdot f(x+\varepsilon z)\, dz$$

Poiché $|\hat{\varphi}(z)| \cdot |f(x+\varepsilon z)| \le \text{cost} \cdot |\hat{\varphi}(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n_z)$, l'espressione precedente corrisponde a:

$$= (2\pi)^{-n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n_z} \hat{\varphi}(z) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(x+\varepsilon z)\, dz$$

Per l'ipotesi di continuità su f $\lim_{\varepsilon \to 0^+} f(x+\varepsilon z) = f(x)$ che si tira fuori e $\lim f(x) \cdot \left[(2\pi)^{-n} \cdot \int \hat{\varphi}(z)\, dz\right] = f(x)$ il che prova la tesi.

Esempio:

$\varphi(\vartheta) = (2\pi)^{-n} \cdot \int e^{i\vartheta z} \hat{\varphi}(z)\, dz$

φ gaussiana, per cui vale la formula di antitrasformazione.

$\vartheta = 0$

$1 = \varphi(0) = (2\pi)^{-n} \cdot \int e^{i \cdot 0 \cdot z} \hat{\varphi}(z)\, dz = (2\pi)^{-n} \cdot \int \hat{\varphi}(z)\, dz = 1$

(18.01.2011)

[farsi dare appunti]

(20.01.2011)

Teor. (di Plancherel)

Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

Dim.

Abbiamo già visto che $\int \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int f(x)\, \hat{g}(x)\, dx$.

In questo caso si ha:

$\|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{f}(\xi)}\, d\xi$

Considerando come $g(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$ e applicando l'identità precedente:

$\hat{g}(x) = (2\pi)^n \cdot \overline{f(x)}$ ⊙

che è l'uguaglianza da dimostrare, infatti in tal caso si avrebbe:

$\|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{f}(\xi)}\, d\xi = \int \hat{f}(\xi) \cdot g(\xi)\, d\xi = \int f(x)\, \hat{g}(x)\, dx$

$= (2\pi)^n \cdot \int f(x)\, \overline{f(x)}\, dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

Vediamo di dimostrare ora ⊙:

$\hat{g}(x) = \int e^{-ix\xi} g(\xi)\, d\xi = \int e^{-ix\xi} \overline{\hat{f}(\xi)}\, d\xi = \overline{\int e^{-ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi}$

$= \overline{\int e^{-ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi} = \overline{\int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi}$

$= (2\pi)^n \cdot \overline{(2\pi)^{-n} \cdot \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi}$

$= (2\pi)^n \cdot \overline{f(x)}$

come volevasi dimostrare.

Definiamo ora $\hat{f}$ per $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

$L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

in realtà risulterà $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{n/2} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

Lemma $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$, cioè data $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ esiste una successione $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $f_j \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dim Mediante l'identità approssimata, si prenda φ_j $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_j \to \delta$, e $f_j = \varphi_j * f$

$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, prendiamo $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f_j \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$

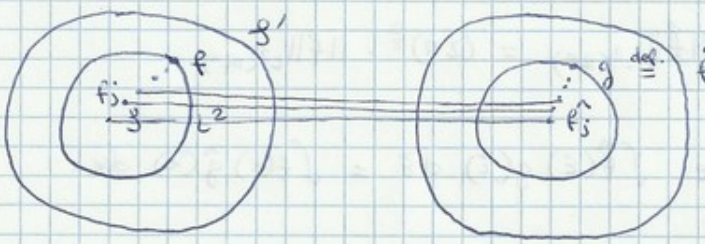
la successione f_j è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R}^n)$, cioè per ogni ε esiste j_0 tale che per ogni $j, h > j_0$ $\|f_j - f_h\|_{L^2} < \varepsilon$.

Si consideri $\hat{f}_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Questa risulta una successione di Cauchy in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Infatti: ~~per ogni~~

$$\|\hat{f}_j - \hat{f}_h\|_{L^2} = \|\widehat{f_j - f_h}\|_{L^2} \overset{(*)}{=} (2\pi)^{n/2} \cdot \|f_j - f_h\|_{L^2}$$
$$\leq (2\pi)^{n/2} \cdot \frac{\varepsilon}{(2\pi)^{n/2}} = \varepsilon$$

dove l'$(*)$ si ottiene grazie al teorema di Plancherel.

L^2 è completo. Essendo $\hat{f}_j$ di Cauchy, risulta esistere $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, tale che $\hat{f}_j \to g$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. $\hat{f} \overset{\text{def}}{=} g$



$f(x) = 1_{[-1,1]}$ $\quad f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in L^2(\mathbb{R})$

$\hat{f}(\xi) = 2 \cdot \frac{\sin \xi}{\xi}$ $\quad \hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

$$\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = 4 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \, d\xi < \infty$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi)) \text{ in } L^2(\mathbb{R})$$

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \cdot 2 \cdot \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi$$

$$f(x) \overset{(**)}{=} \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \cdot \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi$$

non converge in valore assoluto - Lebesgue

$$f(0) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi$$

Non converge nel senso di Lebesgue, ma converge come Riemann - improprio.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi = \pi \quad \text{(con i residui)}$$

Si ha il fatto che $(**)$ non ha senso.

TRASFORMATA DI LAPLACE

Esiste solo in dimensione 1.

$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} K(t,p) f(t)\, dt$, dove $K(t,p) = e^{-tp}$

$f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ $\quad p \in \mathbb{C}$ $\quad p = \mathrm{Re}\, p + i \cdot \mathrm{Im}\, p$

$\mathcal{L}[f](p)$ risulta definito in generale in un sottoinsieme di $\mathbb{C}$

$t \in [0, +\infty[$

$|e^{-tp}| = |e^{-(\mathrm{Re}\, p)t}| \cdot |e^{-i(\mathrm{Im}\, p)t}| = e^{-(\mathrm{Re}\, p)t}$

Teor. Se $\mathcal{L}[f](p)$ è definita (cioè l'integrale converge in valore assoluto) per $p = p_0 \in \mathbb{C}$, allora $\mathcal{L}[f](p)$ è definita anche per ogni p con $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, p_0$

Dim. Sia $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, p_0$. Allora $\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-tp} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-tp_0} e^{-t(p-p_0)} \cdot f(t)\, dt$

$$|\mathcal{L}[f](p)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-tp} f(t)\, dt\right| \le \left|\int_0^{+\infty} e^{-tp_0} e^{-t(p-p_0)} f(t)\, dt\right|$$

$$\le \int_0^{+\infty} |e^{-tp_0}| \cdot |e^{-t(p-p_0)}| \cdot |f(t)|\, dt$$

$$\le \int_0^{+\infty} |e^{-tp_0}| \cdot 1 \cdot |f(t)|\, dt$$

dunque si ha convergenza.

Def. Sia $f : [0, +\infty] \to \mathbb{C}$, si consideri $\mathcal{L}[f](p)$.

Si dice semipiano di convergenza il semipiano

$\{p \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, p \ge \mathrm{Re}\, p_0,\ \mathcal{L}[f](p_0)$ definita$\}$

Si definisce anche l'ascissa di convergenza

$p_0 = \inf\{p,\ \mathcal{L}[f](p)$ è definita$\}$

In questo modo possiamo definire il semipiano di convergenza anche come: $\{p \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, p_0,\ p_0$ ascissa di convergenza$\}$

Ci sono tre casi possibili:

- $p_0 = +\infty$: non si ha mai convergenza, es. e^{t^2}
- $p_0 = -\infty$: si ha convergenza in tutto il piano, es. e^{-t^2}
- $p_0 \in \mathbb{R}$

DISTRIBUZIONI

Nel corso della storia della matematica, le funzioni sono state considerate in maniera di volta in volta differente.

- Nel '700 e nel '800, venivano considerate come espressioni analitiche, come nell'analisi del liceo
- Dalla fine del '800, si iniziò a considerarle come mappe, leggi $f: A \to B$ che associano ad $x \in A$, $f(x) \in B$
- Le discontinuità non venivano viste come troppo ammissibili, in quanto non corrispondenti a fenomeni fisici.
- Nel campo delle equazioni differenziali, tuttavia, anche la definizione come mappa non è sufficiente.
- Si ~~considera~~ provino a considerare non i valori puntuali $f(x_0)$, ma gli integrali $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(x)\,dx$, con cui approssimare per $\varepsilon \to 0$. Questo approccio si utilizza tra il 1900 e il 1950.
- Intorno al 1950 Dirac e Schwartz propongono di non considerare proprio i valori puntuali, ma di assegnare direttamente i valori di $\int_a^b f(x)\,dx$, per ogni scelta di $[a,b]$
- Un esempio di tale distribuzione è quella di Dirac, definita come:

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in]a,b[\\ 0 & \text{se } 0 \notin [a,b] \end{cases}$$

- La delta di Dirac può essere definita anche in maniera multidimensionale, per esempio:

$$\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$\int_D \delta(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{0} \in D \\ 0 & \text{se } \bar{0} \notin D \end{cases}$$

Può essere vista come la densità di massa di un solido puntuale situato nell'origine di massa unitaria.

- Resta il problema di calcolare l'integrale se lo zero è sul bordo. Per esempio, nel caso unidimensionale, quanto vale $\int_0^b \delta(x)\,dx$?
- Per rispondere a questa domanda si introducono le funzioni test. Esse sono funzioni che valgono 1 sullo intervallo $[a,b]$, e agli estremi decrescono molto rapidamente a 0, ma si mantengono C^∞.

- Definiamo alcune notazioni:
  - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω insieme aperto
  - $f: \Omega \to \mathbb{R}$
  - $x = (x_1, \dots, x_n)$
  - $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
  - $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ $\quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ multi-indice
  - $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ (lunghezza del multi-indice)
  - $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$
  - $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$
  - $\alpha \leq \beta$ significa che $\alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq \beta_n$
    $\alpha < \beta$ " $\alpha \leq \beta$ e $\alpha \neq \beta$
  - $\beta \leq \alpha$
    $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \dots \cdot \binom{\alpha_n}{\beta_n}$
  - $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
    $\partial^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f$

Quest'ultima scrittura non rende chiaro l'ordine di derivazione, che può essere influente se non valgono le ipotesi del teorema di Schwartz, che nel caso multidimensionale può essere definito come:

Teor. Se tutte le derivate parziali di ordine totale m di $f: \Omega \to \mathbb{R}$ esistono e sono continue, allora i risultati non dipendono dall'ordine di derivazione. ∎

In generale però possiamo supporre che sia sempre verificato quando utilizziamo la notazione qui sopra.

- $C^0(\Omega)$ funzioni continue in Ω
- $C^m(\Omega)$ f tali che esistono e sono continue $\partial^\alpha f$ per $|\alpha| \leq m$.
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$

20.10.2010

Considereremo funzioni f da Ω in $\mathbb{C}$, del tipo $f(x) = f_1(x) + i \cdot f_2(x)$, con $f_1, f_2: \Omega \to \mathbb{R}$

Per la prima parte del corso ci si potrà comunque limitare a funzioni da Ω in $\mathbb{R}$.

Inoltre, per evitare situazioni particolari, considereremo D dominio "regolare", limitato, chiuso, e contenuto in Ω, al posto di Ω stesso. Si potranno pertanto considerare

FUNZIONI C^∞ E ANALITICHE

- Consideriamo $f \in C^\infty(\Omega)$ e sia il suo sviluppo in serie di Taylor

$$\sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha = \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x_1-x_1^0)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x_n-x_n^0)^{\alpha_n} := Tf(x)$$

- Def. f analitica in $x_0 \in \Omega \iff$ $Tf(x_0)$ converge in un intorno di x_0 (per $|\alpha| \to +\infty$), e in esso $f(x) = Tf(x)$
- Def. f analitica in $\Omega \iff \forall x_0 \in \Omega$, f analitica in x_0.
- Def. $\mathcal{A}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni analitiche in Ω.
- Oss. Finora abbiamo considerato funzioni di variabile reale. Ma $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ si può estendere ad una funzione analitica di variabile complessa (olomorfa) in $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$, con $\tilde{\Omega}|_{\mathbb{R}^n} = \Omega$.
- Prop. $\mathcal{A}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$, con l'inclusione stretta, talvolta $\subsetneq$.

Dim.
- L'affermazione che $\mathcal{A}(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega)$ è banale, infatti per esistere Taylor di ogni ordine sono richieste le derivate.
- Proviamo dunque che esiste una funzione C^∞ non analitica. Ciò è vero per ogni dominio (Ω), vediamolo per $\mathbb{R}$.
- Sia $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \mathbb{1}_{\{x>0\}}$. Si verifica agevolmente che:
  - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
  - $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$ per $x \neq 0$, $f'(0) = 0$ via rapp. increm.
  - $f' \in C^0(\mathbb{R})$, ergo $f \in C^1(\mathbb{R})$.
- In generale, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{M(n)}} e^{-\frac{1}{x}}$, infatti per induzione:
  - base: è vero per $n=1$, con $P_1(x) \equiv 1$, $M(1) = 2$.
  - passo: $f^{(n+1)}(x) = \left[\frac{P(x)}{x^{M(n)+2}} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n'(x)\,x^{M(n)} - M x^{M(n)-1} P_n(x)}{x^{2M(n)}}\right] e^{-\frac{1}{x}}$
    $:= P_{n+1}(x) \cdot x^{-M(n+1)} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$
  - $e^{-\frac{1}{x}}$ decresce più in fretta di quanto cresca il resto, e dunque $f^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow f^{(n)} \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in C^n(\mathbb{R})$
  - Poichè $f \in C^n(\mathbb{R})\ \forall n$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Proveremo ora che $f \notin \mathcal{A}(\mathbb{R})$.

• A tale scopo, dimostreremo il principio di prosecuzione analitica.

Prop. (principio di prosecuzione analitica) Sia $U(x_0)$ un intorno di x_0, e:
$f \in \mathcal{A}(\Omega)$, Ω connesso $\subset \mathbb{R}^n$, $\exists\, U(x_0) / f \equiv 0$ in $U(x_0) \Rightarrow f \equiv 0$ in Ω.

Dim. Ricordiamo che Ω connesso $\iff$ solo $\emptyset \in \Omega$ sono sia aperti che chiusi.
Sia $D := \{x \in \Omega,\ \exists\, U(x) / f \equiv 0 \text{ in } U(x)\}$. Proviamo che D è sia aperto che chiuso, per cui $D = \Omega$ ($x_0 \in D$, ergo $D \neq \emptyset$).

- D è aperto, in quanto unione di intorni (segue dalla definizione)
- D è chiuso, infatti si mostra che ogni successione $\{x_j\}_j$ a valori in D e convergente in Ω, converge ad un valore in D:
  $x_j \in D$, $\{x_j\}_j \to x_0 \in \Omega \Rightarrow x_0 \in D$
  - $\forall \alpha$, $\exists\, U(x_j) / \partial^\alpha f \equiv 0$ in $U(x_j)$; in particolare, $\partial^\alpha f(x_j) = 0$, e inoltre $\partial^\alpha f \in C^0(\Omega)$, l'operatore di derivazione è cioè continuo.
  - Ora, per la continuità sequenziale, $x_j \to x_0 \Rightarrow \partial^\alpha f(x_j) \to \partial^\alpha f(x_0)$. Poichè $\partial^\alpha f(x_j) = 0\ \forall j$, dovrà essere $\partial^\alpha f(x_0) = 0$.
  - A questo punto, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, dunque f è analitica in x_0, e: $f(x) = \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha \equiv 0$ in un intorno di x_0, poichè $\partial^\alpha f(x_0) = 0$.
  - Dunque $x_0 \in D$, e D è chiuso, allora necessariamente $D = \Omega$, e pertanto $f \equiv 0$ in tutto Ω.

Il principio è detto di prosecuzione analitica in quanto garantisce un'unico prolungamento ad una funzione analitica, infatti:

Cor. Ω connesso, $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\exists\, U(x_0) / f \equiv g$ in $U(x_0) \Rightarrow f \equiv g$ in Ω

Dim. È sufficiente considerare $h = f - g$.
h è analitica poichè c.l. di funzioni analitiche (differenza), si annulla in $U(x_0)$, dunque per primo si annulla in tutto Ω.

Poichè $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ si annulla in un intorno, per esempio, di -1, ma non è identicamente nulla, non può essere analitica.

SUPPORTO, FUNZIONI A CAMPANA

- **Def.** $\operatorname{supp} f := \operatorname{cl}\{x \in \Omega,\ f(x) \neq 0\}$ (in Ω)

  Prop.
  - È un chiuso nella topologia indotta su Ω
  - Poiché $\Omega \setminus \operatorname{supp} f$ è aperto, una forma equivalente del principio di prosecuzione analitica è: $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, Ω connesso $\Rightarrow \operatorname{supp} f = \emptyset \ \vee \ \operatorname{supp} f = \Omega$.

- **Def.** $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto $\iff$ K limitato e chiuso

  Almeno per il momento, tralasciamo la definizione topologica.
  - Ω aperto in $\mathbb{R}^n$: K compatto in $\Omega \iff K \subset \Omega$, K compatto in $\mathbb{R}^n$
  - $K_\varepsilon = \bigcup_{x_0 \in K} \{|x - x_0| < \varepsilon\}$

- **Teor.** K compatto in $\Omega \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \ / \ K_\varepsilon \subset \Omega$

  Dim. Per assurdo, sia che, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, x_\varepsilon \in (K_\varepsilon \cap \mathbb{R}^n - \Omega)$.
  Prendiamo una successione di $\varepsilon = \frac{1}{j}$, con $j = 1, 2, \dots$
  In questo modo la richiesta diventa $\exists\, x_j \in (K_{1/j} \cap \mathbb{R}^n - \Omega)$.
  Esisterà intanto $\bar{x}_j \in K \ / \ |\bar{x}_j - x_j| < \frac{1}{j}$.
  Ora, $\exists \{j_k\}_k \ / \ \bar{x}_{j_k} \to x_0 \in K$, per la compattezza di K
  Dunque anche $x_{j_k} \to x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, ma allora $x_0 \in K$ e $x_0 \notin \Omega$, assurdo per ipotesi.

- **Def.** $f \in C_0^\infty(\Omega) \iff f \in C^\infty(\Omega)$, $K = \operatorname{supp} f$ compatto in Ω

- **Es.** fondamentale con $\Omega = \mathbb{R}^n$: funzioni a campana

  $$f(x) = \exp\left(\frac{1}{|x - x_0|^2 - r^2}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{|x - x_0| < r\}}$$

  con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ centro, r raggio.

  Prop.
  - $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = 0$, se $\bar{x}$ è il bordo: infatti il denominatore dell'esponente dell'esponenziale tende a 0 mantenendosi negativo.
  - $\operatorname{supp} f = \{\overline{|x - x_0| < r}\} = \{|x - x_0| \leq r\}$
  - c'è un legame con la già vista $F(y) = e^{-\frac{1}{y}} \cdot \mathbb{1}_{\{y > 0\}}$: se infatti $G(x) = r^2 - |x - x_0|^2$. $(G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$, possiamo scrivere $f(x) = F(G(x))$. Poiché come già visto $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, ed evidentemente $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ in quanto loro composizione.
    Vedremo ora di provarlo formalmente.

INFINITA DIFFERENZIABILITÀ DELLA FUNZIONE COMPOSTA

Per semplicità considereremo $n = 1$: $\mathbb{R} \xrightarrow{G} \mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}$

Proveremo dunque che $G, F \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow F(G(x)) \in C^\infty(\mathbb{R})$

- Sappiamo che composizioni di funzioni continue sono continue:
  se $F, G \in C^0(\mathbb{R})$, allora $F(G(x)) = f(x) \in C^0(\mathbb{R})$
- Siano ora $F, G \in C^\infty(\mathbb{R})$. Segue, "a catena", che:
  - $f \in C^1(\mathbb{R})$: infatti $f'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) \in C^0(\mathbb{R})$ in quanto prodotto di $C^0(\mathbb{R})$.
  - $f \in C^2(\mathbb{R})$: $f''(x) = F''(G(x)) \cdot G'(x) \cdot G'(x) + F'(G(x)) \cdot G''(x) \in C^0(\mathbb{R})$
  - $f \in C^3(\mathbb{R})$: $f'''(x) = F'''(G(x)) \cdot [G'(x)]^3 + F''(G(x)) \cdot 2 \cdot G'(x) \cdot G''(x) +$
    $+ F''(G(x)) \cdot G'(x) \cdot G''(x) + F'(G(x)) \cdot G'''(x) \in C^0(\mathbb{R})$

  poichè somme, prodotti e composizioni di funz. continue sono continue.
- $\forall n$, $f \in C^n(\mathbb{R})$: $f^{(n)}(x) = \sum_{1 \le j \le n} F^{(j)}(G(x)) \cdot G^{(p_1)}(x) \cdot \dots \cdot G^{(p_m)}(x) \in C^0(\mathbb{R})$
  con in particolare $p_1 + \dots + p_m = n$, $p_i \ge 1 \ \forall i$;
  alcuni termini possono non comparire, o comparire più volte.
- Nella formula esatta, compaiono: due sommatorie,
  una produttoria, fattoriali, binomiali; per la continuità
  è però sufficiente l'espressione generale, verificabile induttivamente:

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{1 \le j \le n} D\left(F^{(j)}(G(x)) \cdot G^{(p_1)}(x) \cdot \dots \cdot G^{(p_m)}(x)\right)$$

$$= \sum F^{(j+1)}(G(x)) \cdot G^{(p_1)}(x) \cdot \dots \cdot G^{(p_m)}(x)$$
$$+ F^{(j)}(G(x)) \cdot G^{(p_1+1)}(x) \cdot \dots \cdot G^{(p_m)}(x)$$
$$+ \dots$$
$$+ F^{(j)}(G(x)) \cdot G^{(p_1)}(x) \cdot \dots \cdot G^{(p_m+1)}(x)$$

  di espressione simile a quella precedente.
- Dunque, $\forall n$ $f \in C^n(\mathbb{R})$, e allora $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
- In particolare, per i prodotti, si può generalizzare
  Leibniz: $\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \partial^{\alpha-\beta} f \cdot \partial^\beta g$

COSTRUZIONE DELLE FUNZIONI CUT-OFF O DI TAGLIO

- Abbiamo già definito $C_0^\infty(\Omega)$.
- Osserviamo che $\text{supp}(\varphi_1+\varphi_2) \subset \text{supp}\,\varphi_1 \cup \text{supp}\,\varphi_2$, per cui l'insieme può essere dotato di struttura di spazio vettoriale, con somma e prodotto soliti.
- Teor. di costruzione: sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, K compatto $\subset \Omega$. Allora $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon$ / $\exists f \in C_0^\infty(\Omega)$ per cui valgano:
  - $\text{supp}\, f \subset K_\varepsilon$, $f(x) \equiv 1$ se $x \in K$, $0 \le f(x) \le 1$.
- Premessa: sia $\varphi(x)$ la funzione a campana già definita, tale funzione è integrabile sullo spazio di definizione. Se $\{|x-x_0| \le r\} \subset \Omega$, allora il suo integrale è una costante positiva, che rende possibile normalizzarla come $\tilde{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x)}{\cos t}$, / $\int \tilde{\varphi}(x)\,dx = 1$
- Dim. sia $K \subset K_\varepsilon \subset \Omega$, $\varphi(x)$ campana normalizzata di centro 0 e raggio $\frac{\varepsilon}{4}$.
  Sia $f(x) := \int_{K_{\varepsilon/2}} \varphi(x-y)\,dy = \int_{K_{\varepsilon/2}} \varphi(y-x)\,dy$ (uguali poichè $|x-y| = |y-x|$).
  - Proviamo innanzitutto che f è C^∞.
    Si abbia in generale $f(x) = \int_D H(x,y)\,dy$, con:
    $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, D limitato $\subset \mathbb{R}^n$, $H(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$
    È possibile derivare sotto l'integrale: $\partial_{x_j} f(x) = \int_D \partial_{x_j} H(x,y)\,dy$
    Nel nostro caso, poichè $H(x,y) = \varphi(x-y)$, sarà:
    $$\partial^\alpha f(x) = \int_{K_{\varepsilon/2}} \partial_x^\alpha (\varphi(x-y))\,dy = \int_{K_{\varepsilon/2}} (\partial_x^\alpha \varphi)(x-y)\,dy$$
    Poichè $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, e $f \in C^\infty(\Omega)$
  - Vediamo ora come, se $x \in K$, allora $f(x) = 1$.
    Poichè per $y \in \mathbb{R}^n - K_{\varepsilon/2}$, $\varphi(y-x) = 0$, segue che:
    $$\text{supp}_y\, f(x) = \int_{K_{\varepsilon/2}} \varphi(y-x)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y-x)\,dy = 1 \quad \text{se } x \in K.$$
    Infatti $\text{supp}_y\, \varphi(y-x) := \{y \in \mathbb{R}^n,\ |y-x| < \frac{\varepsilon}{4}\} = B(x, \frac{\varepsilon}{4})$
    $\subset \{y \in \mathbb{R}^n,\ |y-x| < \frac{\varepsilon}{2}\} \subset K_{\varepsilon/2}$
    $x \in \Omega \setminus K_\varepsilon \Rightarrow f(x) = 0$; proviamo che $\text{supp}_y\, \varphi(y-x) \cap K_{\varepsilon/2} = \emptyset$.
    Se infatti $\bar{x}$ fosse tale che $|\bar{x}-x| < \frac{\varepsilon}{4}$, $\bar{x} \in K_{\varepsilon/2}$, $\exists x_0 \in K$ / $|\bar{x}-x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Se ora $x_0 \in K$, $x \notin K_\varepsilon$, sarebbe:
    $|x-x_0| = |x-\bar{x}+\bar{x}-x_0| \le |x-\bar{x}| + |\bar{x}-x_0| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$
    assurdo poichè implicherebbe $x \in K_\varepsilon$.
  - Dunque $\exists \varepsilon' > 0$, $\varepsilon'' < \varepsilon$ / $\varphi(x) = 1$ in $K_{\varepsilon'}$, $\varphi(x) = 0$ in $\Omega \setminus K_{\varepsilon''}$.

TEOREMA DI PARTIZIONE DELL'UNITÀ

- Hp: K compatto in $\mathbb{R}^n$, $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ aperti ricoprono K.
  Th: $\exists\, \varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $j = 1:m$ / $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$ per $x \in K$, $0 \le \varphi(x) \le 1$.
- Dim.
  - Esistono compatti K_j, $j = 1:m$, t.c. $K_j \subset \Omega_j$, $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} K_j$
  - Per il teorema precedente, possiamo costruire ψ_j tali che:
    $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $\psi_j(x) = 1$ per $x \in K_j$
  - Definiamo ora, $j = 1:m$, $\varphi_j = \psi_j \cdot \prod_{i=1}^{j-1} (1 - \psi_i)$
    Si avrà, e potrà essere provato agevolmente per induzione:
    $$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i = 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - \psi_i), \quad \forall\, 1 \le k \le m$$
  - Poichè, per $x \in K$, $\exists\, i$ / $\psi_i = 1$, il prodotto si annulla, e resta 1.

DISTRIBUZIONI

- Sia $V = C_0^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni test, e V' il suo duale, ovvero lo spazio delle applicazioni lineari da V in $\mathbb{C}$, dove:
  $$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} \lambda_1 v_1(\varphi) + \lambda_2 v_2(\varphi) \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad v_1, v_2 \in V$$
  Si noti che $(\mathbb{R}^n)' \sim \mathbb{R}^n$ e $(\mathbb{C}^n)' \sim \mathbb{C}^n$; definiamo anche un sottospazio vettoriale di $(C_0^\infty(\Omega))'$, detto $\mathcal{D}'(\Omega)$, e che sarà caratterizzato da una disuguaglianza che introdurremo.
- Def. Una distribuzione v in Ω è un elemento di $(C_0^\infty(\Omega))'$, cioè un' applicazione lineare da $C_0^\infty(\Omega)$ in $\mathbb{C}$, che associa ad un test φ il suo rispettivo valore $v(\varphi)$.
  Deve inoltre essere soddisfatta la disuguaglianza cui prima, detta di controllo: $\forall K \subset \Omega$, $\exists\, k \ge 0$, $C > 0$ / $\forall \varphi \in C_0^\infty(K)$ si abbia
  $$|v(\varphi)| \le C \cdot \sum_{|\alpha| \le k} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| : \varphi \text{ "piccola"} \Rightarrow v(\varphi) \text{ "piccolo"}.$$
- Lo spazio delle distribuzioni in Ω viene denotato come $\mathcal{D}'(\Omega)$.
- Per misurare la grandezza di φ, con $\Omega = \mathbb{R}$, possiamo considerare:
  - norma infinito: $\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$
  - norma con derivate: $\|\varphi\|_D = \max_{x \in K} |\varphi(x)| + \max_{x \in K} |\varphi'(x)|$ (supp $\varphi \subset K$)

  Nel secondo caso, si noti la possibile esistenza di funzioni per cui $\|\varphi\|_\infty$ è piccolo, ma $\|\varphi'\|_\infty$ è grande, i.e. $\varphi(x) = f(x) \cdot \sin[(100^2)x]$ con $f(x)$ cutoff per $\frac{1}{100}$.

NOTE SULLA DISUGUAGLIANZA DI CONTROLLO

- Osserviamo che, in generale, K dipende da K, e non è detto che si mantenga limitato all'ingrandirsi di K. Anche la costante C può dipendere da K, ma non da φ.
- Esistono però delle distribuzioni per le quali la limitatezza si mantiene, ovvero $\exists\, k \geq 0$ che soddisfa la disuguaglianza $\forall K$. Indichiamo con $\mathcal{D}'_F(\Omega)$ il sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$ da esse costituito.
- Le funzioni continue sono particolari distribuzioni, ovvero $C^0(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Infatti $v(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, può essere associata ad f. In tal caso vale la disuguaglianza: $|v(\varphi)| = \left|\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx\right| \overset{[K=0]}{=} \left|\int_K f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leq \int_K |f(x)|\cdot|\varphi(x)|\,dx \leq \int_K |f(x)|\,dx \cdot \max_{x\in K}|\varphi(x)| = C_K \cdot \max_{x\in K}|\varphi(x)|$

RICOSTRUZIONE DEI VALORI PUNTUALI

- $f \in C^0(\Omega)$, $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ distribuzione corrispondente, $x_0 \in \Omega$ fissato. Siano anche φ_j, $j = 1,2,\dots$, campane normalizzate di centro x_0 e raggio $\frac{1}{j}$. Allora $\lim_{j\to\infty} v(\varphi_j) := \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f(x)\cdot\varphi_j(x)\,dx = f(x_0)$

  Dim. Sia $\Omega = \operatorname{supp}\varphi_j = \{|x-x_0| \leq \frac{1}{j}\}$. Esiste $c_j \in D$, cioè $|c_j - x_0| \leq \frac{1}{j}$, t.c.:
  $\lim_{j\to\infty} f(c_j)\cdot\int_{|x-x_0|\leq\frac{1}{j}} \varphi_j(x)\,dx = \lim_{\substack{j\to\infty \\ c_j\to x_0}} f(c_j) = f(x_0)$ per il th. di relazione di Heine.

- Per affermare ciò, utilizziamo alcuni teoremi "della media":
  - 1-dim: $f,\varphi \in C^0([a,b])$, $\varphi(x) \geq 0 \Rightarrow \exists\, c \,/\, \int_a^b f\varphi\,dx = f(c)\cdot\int_a^b \varphi\,dx$, $a \leq c \leq b$

    Infatti, $\exists\, m, M \,/\, m \leq f(x) \leq M$ per Weierstrass ($[a,b]$ è un compatto), e:
    $m\cdot\int\varphi\,dx \leq \int f\varphi\,dx \leq M\cdot\int\varphi\,dx \Rightarrow m \leq \frac{\int f\varphi\,dx}{\int\varphi\,dx} \leq M \Rightarrow m \leq f(c) \leq M$
    per il th. dei valori intermedi. Caso notevole considerando $\varphi(x) \equiv 1$.
  - n-dim: $D \subset \mathbb{R}^n$ compatto e connesso per archi,
    $f,\varphi \in C^0(D)$, $\varphi(x) \geq 0 \Rightarrow \exists\, c \in D \,/\, \int_D f\varphi\,dx = f(c)\cdot\int_D \varphi\,dx$

    La dimostrazione è la stessa, usando però il th. dei val. intermedi multidimensionale.
- Esso si prova considerando un cammino da $\underline{x}$ in $\overline{x}$, con min in $\underline{x}$, max in $\overline{x}$. $\exists\, x(t)$, $0 \leq t \leq 1$ / $x(0) = \underline{x}$, $x(1) = \overline{x}$. Ponendo $f(x(t)) = g(t) \in C^0([0,1])$, sarà $g(0) = m$, $g(1) = M$, e possiamo applicare il teorema dei valori intermedi unidimensionale. La connessione per archi è necessaria.

INIETTIVITÀ

- La funzione che va dallo spazio $C^0(\Omega)$ a $\mathcal{D}'(\Omega)$, associando ad ogni f continua la relativa distribuzione, è iniettiva.

  Infatti, $v_1 = v_2 \Rightarrow f_1(x_0) = f_2(x_0)$, poiché $v_i(\varphi_j) \to f_i(x_0)$, $i = 1, 2$.

CASO DI FUNZIONI NON CONTINUE

- Def. $L^1(K) = \{ f : K \to \mathbb{R}, \int_K |f(x)|\,dx < \infty \}$ spazio di Lebesgue (K compatto)

  $L^1_{loc}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \forall K \subset \Omega, f|_K \in L^1(K) \}$

  Prop. $C^0(K) \subset L^1(K)$; $C^0(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$

  Es. Siano $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$, $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \cdot e^x$.

  $f_1(x) \notin L^1((-1,1))$, poiché $(x-1)^{-2}$ porta ad una singolarità;

  $f_1(x) \in L^1_{loc}((-1,1))$, poiché $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$ se $-1 < a < b < 1$.

  $f_2(x) \notin L^1(\mathbb{R})$; $f_2(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

- Ris. notevole: $f \in L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$

- Teor. $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ distribuzione corrispondente $[v(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\,dx]$

  Fissato x_0, e prendendo $\{\varphi_j\}_j$ come prima, $\lim_{j\to\infty} v(\varphi_j) = f(x_0)$ a.e.

  Note Oltre all'integrale di Riemann e Lebesgue, definiamo:

  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$ integrale alla Cauchy

  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^n}\,dx$, $n \geq 1$ (per $n \geq 2$ si usa parte finita di Hadamard)

  In questo modo si può far sì che, p.es., $\frac{1}{x^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*_+)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

DISTRIBUZIONI CHE NON SONO FUNZIONI

- Es. Σ ipersuperficie regolare in $\mathbb{R}^n$, $\delta_\Sigma(\varphi) = \int_\Sigma \varphi(x)\,d\sigma$, con $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $d\sigma$ elemento di ipersuperficie. P.es., $n = 3$.

- Es. γ curva regolare; in $\mathbb{R}^3$, $\delta_\gamma(\varphi) = \int_\gamma \varphi(x, y, z)\,ds$.

RESTRIZIONE DI UNA DISTRIBUZIONE

- Def. Se $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, e $\Omega' \subset \Omega$, si può definire $v|_{\Omega'} \in \mathcal{D}'(\Omega')$, ponendo, per $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, $v|_{\Omega'}(\varphi) := v(\tilde{\varphi})$, avendo posto:

  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) \cdot \mathbb{1}_{\Omega'}$, ovvero vale $\varphi(x)$ se $x \in \Omega'$, e se $x \in \Omega - \Omega'$.

  Note $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)$, e la compattezza del supporto è necessaria, cioè se $\varphi \in$ solo a $C^\infty(\Omega')$, può essere che $\tilde{\varphi} \notin C^\infty(\Omega)$.

Teor. (localizzazione) : $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall x_0 \in \Omega \ \exists V_{x_0} \subset \Omega \ / \ u|_{V_{x_0}} \equiv 0$ in $\mathcal{D}'(V_{x_0})$

Allora $u \equiv 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dim.
- Dobbiamo provare che, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $u(\varphi) = 0$
- Sia $K = \operatorname{supp} \varphi$, compatto ricoperto dai V_{x_0}, $x_0 \in K$
- Per la compattezza, esiste un sottoricoprimento finito t.c. $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$
- Per il teorema di partizione dell'unità, esisteranno:

  $\varphi_j \in C_0^\infty(V_{x_j})$, $j = 1:m$, t.c. $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$ per $x \in K$
- Infine: $\varphi = \varphi \cdot 1 = \varphi \cdot \sum_{j=1}^{m} \varphi_j = \sum_{j=1}^{m} \varphi\varphi_j \in C_0^\infty(V_{x_j})$

  $u(\varphi) = u\left(\sum_{j=1}^{m} \varphi\varphi_j\right) = \sum_{j=1}^{m} u(\varphi\varphi_j) = 0$

SUPPORTO DI UNA DISTRIBUZIONE

- Conoscendo solo la distribuzione e non i valori puntuali, non è possibile ricavare per via diretta il supporto.
- Considerando però il complementare: $\Omega - \operatorname{supp} f = \{x \in \Omega, \exists V_x \text{ in cui } f(x) \equiv 0\}$ possiamo definire per analogia: $\Omega - \operatorname{supp} u = \{x \in \Omega, \exists V_x \text{ in cui } u|_{V_x} \equiv 0 \text{ in } \mathcal{D}'(V_x)\}$ se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, e conseguentemente $\operatorname{supp} u$ come il suo complementare.
- **Prop.** $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\operatorname{supp} u$ il suo supporto. Allora:
  - $u|_{\Omega - \operatorname{supp} u} \equiv 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega - \operatorname{supp} u)$
  - $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow u(\varphi) = 0$

  Dim.
  - Si applica il teor. di localizzazione all'aperto $\Omega - \operatorname{supp} u$.
  - $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset \Rightarrow \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega - \operatorname{supp} u \Rightarrow$ la tesi.
- **Es**
  - $\operatorname{supp} \delta_{x_0} = \{x_0\}$
  - $\operatorname{supp} \delta_\Sigma = \Sigma$
  - $u = \delta_{-1} + f$, $f = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \mathbb{1}_{\{x>0\}} \Rightarrow \operatorname{supp} u = \{-1\} \cup \overline{\mathbb{R}}_+$
- **Def.** Se il supporto di u, sia K, è un compatto in Ω, la distribuzione appartiene a $\mathcal{E}'(\Omega)$, sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$.

PROBLEMA DELLA DERIVAZIONE

- Integrazione per parti: $\int_a^b f'g \, dx = fg|_a^b - \int_a^b fg' \, dx$;

  se $\operatorname{supp} g \subset [a,b]$, $\int_a^b f'g \, dx = - \int_a^b fg' \, dx$ poichè $g(a) = g(b) = 0$.

- Generalizzazione n-dim: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

  Allora, $\forall j = 1:n$ fissato, $\int_\Omega (\partial_{x_j} f)(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega f(x)(\partial_{x_j}\varphi)(x)\, dx$

- Teorema di Gauss in $\mathbb{R}^n$: $f \in C^1(\Omega)$, D regolare $\subset \Omega$, Σ frontiera di D

  Allora, $\forall j$, $\int_D \partial_{x_j} f(x)\, dx = \int_\Sigma f(x)\, \nu_j(x)\, d\sigma$ $\quad [\nu = (\nu_1, \dots, \nu_j, \dots, \nu_n)]$

- Teorema della divergenza: $F = (f_1, \dots, f_n)$, $f_j \in C^1(\Omega)$, $\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$

  Allora $\int_D \operatorname{div} F\, dx\, dy = \int_\Sigma F(x,\nu)\, d\sigma$

- Nel nostro caso, siano $g \in C^1(\Omega)$, $fg \in C^1(\Omega)$; segue:

$$\int_D \partial_{x_j}(fg)\, dx = \int_\Sigma f(x)\, g(x)\, \nu_j(x)\, d\sigma$$

$$\int_D (\partial_{x_j} f)\, g\, dx + \int_D f(\partial_{x_j} g)\, dx = \int_\Sigma f(x)\, g(x)\, \nu_j(x)\, d\sigma$$

$$\int_D (\partial_{x_j} f)\, g\, dx = \int_\Sigma fg\, \nu_j\, d\sigma - \int_D f(\partial_{x_j} g)\, dx \quad (*)$$

- Utilizziamo questi risultati per dimostrare la generalizzazione n-dim: sia infatti $g = \varphi$, $D = (\overline{\operatorname{supp}\varphi})_\varepsilon \subset \Omega$. Osservando che $\varphi = 0$ in Σ, bordo di D, è sufficiente applicare $(*)$.

- La rilettura dal punto di vista distribuzionale porta a:

  Def. $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $j = 1:n \Rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \ni \partial_{x_j} v(\varphi) := -v(\partial_{x_j}\varphi)$.

  Oss. f derivabile classicamente $\Rightarrow$ derivata classica di f = derivata distribuzionale di f.

- Tale definizione è consistente rispetto alla disuguaglianza di controllo, ovvero, affinchè la derivata sia effettivamente una distribuzione, dovrà essere:

$$|\partial_{x_j} v(\varphi)| = |v(\partial_{x_j}\varphi)| \le C \cdot \sum_{|\alpha|\le k} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \partial_{x_j} \varphi(x)|$$

  Ciò è vero se, come è, $|v(\varphi)| \le C \cdot \sum_{|\alpha|\le k} \max_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$.

  Infatti si può scrivere $\partial^\alpha \partial_{x_j} = \partial^\beta$, con $\beta = \alpha + e_j$.

  Pertanto, se per un fissato K $v(\varphi)$ la verifica per un certo k, allora $\partial_{x_j} v(\varphi)$ la verifica per $k+1$.

- Vediamo ora una derivata distribuzionale di una f non derivabile.

  Sia $H(x) = \mathbb{1}_{\{x \ge 0\}}$; $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, e $H'(0)$ non è classicamente definita.

$$H(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\cdot\varphi(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \int_0^{\pi} \varphi(x)\, dx \quad \text{se } \operatorname{supp}\varphi \subset [-\pi, \pi]$$

$$\partial_x H(\varphi) = -H(\varphi') = -\int_0^{\pi} \varphi'(x)\, dx = -[\varphi(\pi) - \varphi(0)] = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

- Il risultato può essere generalizzato a tutte le funzioni con discontinuità di prima specie.

DERIVATA DISTRIBUZIONALE DI FUNZIONI CON SALTI

- **Teor.** $f \in C^1(\mathbb{R}-\{0\})$, $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = f(0^\pm) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = f'(0^\pm) \in \mathbb{R}$, $f(0+) \neq f(0-)$.
  Allora, visti $f, f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, risulta: $\partial_x f = f' + (f(0+) - f(0-))\,\delta$
- **Prop.** Se $f(0+) = f(0-)$, il teorema resta valido, ma diventa banale.
- **Cor.** Se $f(0+) = f(0-)$, ma $f'(0+) = f'(0-)$, allora derivata classica e derivata distribuzionale coincidono.
- **Dim.** Siano $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi' \subset \operatorname{supp}\varphi \subset [-\pi,\pi]$. Allora:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(\varphi) &= -f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-\pi}^{0} f(x)\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{\pi} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \qquad [f(0) := f(0-) \text{ prima, } f(0+) \text{ dopo}] \\
&= -\left[f(x)\,\varphi(x)\right|_{-\pi}^{0-} - \int_{-\pi}^{0} f'(x)\,\varphi(x)\,dx + f(x)\,\varphi(x)\Big|_{0+}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&= -\left[f(0-)\,\varphi(0) - f(-\pi)\,\varphi(-\pi)\right] - \left[f(\pi)\,\varphi(\pi) - f(0+)\,\varphi(0)\right] + \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&= f(0+)\,\varphi(0) - f(0-)\,\varphi(0) + \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&= (f(0+) - f(0-))\,\varphi(0) + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&= (f(0+) - f(0-))\,\delta(\varphi) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&= (f(0+) - f(0-))\,\delta(\varphi) + f'(\varphi)
\end{aligned}$$

- **Teor.** $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$ definita q.o., $\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
  Vale anche distribuzionalmente: $\partial_x \int_{-\infty}^{+\infty} F'\varphi\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi\,dx$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
- Analoghi risultati valgono nel caso multidimensionale. Sia in dimensione 2:
  $f(x,y) = \mathbb{1}_{\{y>0\}}$, $\partial_y f$ non definita per $y=0$; $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
  Per esse $f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\varphi(x,y)\,dy\right)dx$
  e:

$$\begin{aligned}
\partial_y f(\varphi) &= -f(\partial_y\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \partial_y\varphi(x,y)\,dx\,dy \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \partial_y\varphi(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{se } \operatorname{supp}\varphi \subset [-\pi,\pi]^2 \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\pi}\partial_y\varphi(x,y)\,dy\right)dx \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\left[\varphi(x,\pi) - \varphi(x,0)\right]dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x,0)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,0)\,dx = \delta_\gamma, \text{ con } \gamma \text{ asse } x
\end{aligned}$$

  Poiché $\delta_\gamma\varphi = \int_\gamma \varphi\,d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,0)\,dx$, segue che $\partial_y f = \delta_\gamma$.
- Naturalmente

$$\begin{aligned}
(\partial_x f)(\varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\pi}\partial_x\varphi(x,y)\,dy\right)dx \\
&= \int_0^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\partial_x\varphi(x,y)\,dx\right)dy = 0
\end{aligned}$$

  poiché $\varphi(\pi,y) = \varphi(-\pi,y) = \varphi(\pi,y) - \varphi(-\pi,y) = 0$.
- In senso classico, $\partial_x f \equiv 0$ ovunque, $\partial_y f = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}$.

DERIVATA DI DISTRIBUZIONI CHE NON SONO FUNZIONI

- Es. $\delta'(\varphi) := -\delta(\varphi') = -\varphi'(0)$ delta di Dirac: in fisica, dipolo.
- Oss. È possibile definire le derivate successive di una distribuzione.
  Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, α multi indice, allora $\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \cdot u(\partial^\alpha \varphi)$
  Se $f \in C^m(\Omega)$, allora $\partial^\alpha f$ per $|\alpha| \le m$ coincide con la derivata classica.
- Es. $\cdot\ \partial^\alpha \delta(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \cdot \delta(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \cdot \partial^\alpha \varphi(0)$ in fisica, multipolo.
  $\cdot\ \partial_{x_j} \delta_\Sigma(\varphi) = -\delta_\Sigma(\partial_{x_j} \varphi) = -\int_\Sigma \partial_{x_j} \varphi(x)\, d\sigma$ D(densità di strato) = densità di doppio strato.
  $\cdot\ \partial_x \delta_\gamma(\varphi) = -\delta_\gamma(\partial_x \varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \varphi(x,0)\, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \partial_x \varphi(x,0)\, dx = -(\varphi(\pi,0) - \varphi(-\pi,0)) = 0.$
  Infatti $\Sigma = \gamma = \{y=0\}$ = asse x, di parametrizzazione banale $(x,y) = (t,0)$
  $\partial_y \delta_\gamma(\varphi) = -\delta_\gamma(\partial_y \varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_y \varphi)(x,0)\, dx$ doppio filo

PRODOTTO ARITMETICO DI DISTRIBUZIONI

- Non si può direttamente definire un prodotto in $\mathcal{D}'(\Omega)$, essendo per esempio:
  $\delta = \frac{d}{dx} H^n = n \cdot H^{n-1} \cdot \frac{d}{dx} H = n \cdot H \cdot \delta \Rightarrow \delta H = \frac{1}{n} \delta$ (poichè $H^n = H\ \forall n \ge 2$)
  che rende il prodotto δH non ben definito, facendolo dipendere da n.
- Se una delle due $\in C^\infty(\Omega)$, le cose vanno meglio:
  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow (fu)(\varphi) := u(f\varphi)\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$; $fu \in \mathcal{D}'(\Omega)$
- In particolare, se $u \in C^0(\Omega)$, si riottiene la definizione usuale di prodotto:
  $(fu)(\varphi) := u(f\varphi) = \int_\Omega u(x)\,(f\varphi)(x)\, dx = \int_\Omega (fu)(x)\, \varphi(x)\, dx = (fu)(\varphi)$
- La definizione è consistente rispetto alla disuguaglianza di controllo, infatti:

$$|(fu)(\varphi)| := |u(f\varphi)| \le C \cdot \sum_{|\alpha| \le k} \max_{x \in K} |\partial^\alpha (f\varphi)(x)| \quad \text{(poichè } u \text{ soddisfa essa per ipotesi)}$$

$$\le C \cdot \sum_{|\alpha| \le k} \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \max_{x \in K} |\partial^{\alpha-\beta} f(x)| \cdot \max_{x \in K} |\partial^\beta \varphi(x)|$$

$$\le C \cdot C^* \cdot C^{**} \cdot \sum_{|\alpha| \le k} \sum_{\beta \le \alpha} \max_{x \in K} |\partial^\beta \varphi(x)|$$

$$\le C \cdot C^* \cdot C^{**} \cdot \sum_{|\alpha| \le k} \Big(\sum_{|\beta| \le k} \max_{x \in K} |\partial^\beta \varphi(x)| \Big)$$

$$\le C \cdot C^* \cdot C^{**} \cdot N \cdot \Big(\sum_{|\beta| \le k} \max_{x \in K} |\partial^\beta \varphi(x)| \Big)$$

avendo definito: $\cdot\ C^* := \max_{\beta \le \alpha \le k} \binom{\alpha}{\beta}$ $\cdot\ C^{**} := \max_{|\gamma| \le k} \max_{x \in K} |\partial^\gamma f(x)|$
$\cdot\ N :=$ numero degli α tali che $|\alpha| < k$

Poichè $C' = C \cdot C^* \cdot C^{**} \cdot N$ non dipende da φ, è accettabile come costante.

- Es. $\cdot\ \forall f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f \cdot \delta = f(0) \cdot \delta$: infatti $f \cdot \delta(\varphi) := \delta(f\varphi)$, e $f(0) \cdot \varphi(0) = f(0) \cdot \delta(\varphi)$.
  $\cdot$ derivata: $(f\delta')(\varphi) := \delta'(f\varphi) = -\delta((f\varphi)') = -\delta(f'\varphi + f\varphi')$
  $= -f'(0)\varphi(0) - f(0)\varphi'(0) = -f'(0)\,\delta(\varphi) + f(0)\,\delta'(\varphi)$
  dunque $(f\delta)' = -f'(0)\,\delta + f(0)\,\delta'$

STRUTTURA DEGLI SPAZI DISTRIBUZIONALI

- Abbiamo già definito gli spazi $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{D}'_F(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$ [tra l'altro, $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'_F(\Omega)$]
- Vediamo ora che esistono distribuzioni $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ma $\notin \mathcal{D}'_F(\mathbb{R})$.

  Sia infatti $u = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j^{(j)}$, in dim. 1. Naturalmente $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ma:

  $$u(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j^{(j)}(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \varphi^{(j)}(j) \quad \text{se } \operatorname{supp}\varphi \subset [-j_0, j_0]$$

  $$|u(\varphi)| \leq \Big|\sum_{j=0}^{K} (-1)^j \varphi^{(j)}(j)\Big| \leq \sum_{j \leq K} \max_{x \in K} |\varphi^{(j)}(x)|$$

  e K dipende dalla scelta del compatto K, non mantenendosi limitata.

- Teor. (struttura per $\mathcal{D}'_F(\Omega)$)

  Sia $u \in \mathcal{D}'_F(\Omega)$. Allora $\exists\, f_\alpha \in C^0(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, t.c. $u = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha$ (derivata distribuz.)
- $\mathcal{D}'_F(\Omega)$ è il più piccolo sottoinsieme di $C_0^\infty(\Omega')$ che permette sempre la derivazione.
- Es. $u = \delta^{(k)} = \dfrac{d^k}{dx^k}\delta$; non scrivendo $\dfrac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\delta = \dfrac{d^k}{dx^k}\left(\dfrac{dH(x)}{dx}\right)$, poichè $H(x) \notin C^0(\mathbb{R})$, possiamo però considerare $f(x) = \int_0^x H(t)\,dt$ e scrivere $\dfrac{d^k}{dx^k}\delta = \dfrac{d^{k+2}}{dx^{k+2}} f$.
- Non ci si limita a $\mathcal{D}'_F(\Omega)$, introducendo $\mathcal{D}'(\Omega)$, per motivi topologici: $\mathcal{D}'_F(\Omega)$ non è un chiuso, e $\overline{\mathcal{D}'_F(\Omega)} = \mathcal{D}'(\Omega)$
- Si noti che, nell'esempio di inizio pagina, interrompendo la somma ad un valore finito, si ottiene un elemento di $\mathcal{D}'_F(\Omega)$, mentre il limite non lo è. Infatti $\sum_{j=0}^{s} \delta_j^{(j)}(\varphi) = \sum_{j=0}^{s} \dfrac{d^{(j+2)} f(x-j)}{dx}$, e vale il teorema di struttura.
- Vediamo ora come possiamo porre una topologia in $C_0^\infty(\Omega)'$.
- Def. u_j, $j = 1, 2, \ldots$, $u \in C_0^\infty(\Omega)'$; $\lim_{j\to\infty} u_j = u \iff \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\lim_{j\to\infty} u_j(\varphi) = u(\varphi)$
- Teor. (Banach-Steinhaus) $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots$, $u_j \to u$ in $C_0^\infty(\Omega)' \Rightarrow u \in \mathcal{D}'(\Omega)$
- Def. $A \subset C_0^\infty(\Omega)'$, chiamiamo $\bar{A}$ l'insieme delle $u \in C_0^\infty(\Omega)'$ t.c. $\exists \{u_j\}_j \in A$ con $u_j \to u$
- Def. $A \subset C_0^\infty(\Omega)'$ è detto chiuso se $\bar{A} = A$.

  La topologia può essere definita in quanto sono soddisfatti gli assiomi sugli aperti.
- Cor. $\mathcal{D}'(\Omega)$ è chiuso in $C_0^\infty(\Omega)'$: è conseguenza di Banach-Steinhaus.
- Teor. $\overline{\mathcal{D}'_F(\Omega)} = \mathcal{D}'(\Omega)$; basta dimostrare che $\mathcal{D}'(\Omega) \subseteq \overline{\mathcal{D}'_F(\Omega)}$, anzi solo che $\mathcal{D}'(\Omega) \subseteq \overline{\mathcal{E}'(\Omega)}$, poichè $\overline{\mathcal{E}'(\Omega)} \subseteq \overline{\mathcal{D}'_F(\Omega)}$.

  Ovvero, proviamo che, $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\exists \{u_j\}_j \in \mathcal{E}'(\Omega)$, t.c. $u_j \to u$
  - Sia $\{K_j\}_j$ successione di compatti t.c. $\bigcup_j K_j = \Omega$, $K_j \subseteq K_{j+1}$ (p.es., $K_j = [-j, j]$ in $\mathbb{R}$).
  - Siano anche $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi_j(x) = 1$ in V_{K_j}, $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\operatorname{supp}\psi_j \subset K_{j+1}$
  - Poniamo ora $u_j := \psi_j u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Abbiamo $u_j(\varphi) = \psi_j u(\varphi) = u(\psi_j \varphi)$; $\exists\, j_0$ t.c. $\forall j \geq j_0$ $\operatorname{supp}\varphi \subset K_j$, e dunque $u_j \to u$.

- $C^0(K)$, con la norma $\|f\|_\infty$, è completo: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ t.c., $\forall n, m > n_0$, è $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$
- Def. $U_\varepsilon := \{f, \|f\| < \varepsilon\}$
- Def. V è detto spazio vettoriale topologico se possiede una topologia e:
  - $V \times V \to V$ $\quad (v, w) \to v + w$ $\quad$ - $\mathbb{C} \times V \to V$ $\quad (\lambda, v) \to \lambda v$ sono continue.
- Def. Una seminorma è una specie di norma in cui non è $p(V) = 0 \Rightarrow V = 0$.
- Def. Sia V uno spazio vettoriale, $p \in \mathcal{F}$ famiglia di seminorme.
  Se, $\forall p \in \mathcal{F}$ $p(v) = 0$, $\Rightarrow v = 0$, sia $U_{p,\varepsilon} := \{v \in V, p(v) < \varepsilon\}$, $p \in \mathcal{F}$.
  Ora, $\{p_j\}_{j=1}^m$ seminorme in $\mathcal{F}$, la base $\bigcap_{j=1}^m U_{p_j,\varepsilon}$ definisce intorni dell'origine.
  Definendo per traslazione gli intorni di ogni $v \in V$, la topologia determina uno spazio vettoriale topologico detto spazio localmente convesso.
- Es. $C^0(\Omega)$, $\Omega = (a,b)$, $\forall K$ compatto $\subset \Omega$, sia $p_K(f) = \max_{x \in K} |f(x)| = \|f|_K\|$
- In Ω ci sono almeno $\aleph_1$ compatti, ma con una successione tale che $\bigcup_j K_j = \Omega$, $K_j \subseteq K_{j+1}$, si ottiene un ricoprimento di cardinalità al più $\aleph_0$.
- Può aversi, per un certo K, $p_K(f) = 0$ e $f \neq 0$, ma se $f \neq 0$, allora $\exists K$ t.c. $p_K(f) > 0$.
- Def. V localmente connesso, $|\mathcal{F}| = \aleph_0$, topologia completa $\Rightarrow V$ spazio di Frechet.
  - $v_j \to v$ se, $\forall p_K$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ t.c. $\forall n, m > n_0$ è $p_K(v_n - v_m) < \varepsilon$
  - v_j di Cauchy se, $\forall p_K$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ t.c. $\forall n, m > n_0$ è $p_K(v_n - v_m) < \varepsilon$
  - Uno spazio di Frechet è completo: se v_j è di Cauchy, converge.
- Uno spazio di Frechet è metrizzabile, ponendo $p(v) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \cdot \frac{p_j(v)}{p_j(v) + 1}$
  $p(v) = 0 \Rightarrow v = 0$, ma $p(v)$ non è norma, lo scalare infatti non filtra.
  Tuttavia $p(v - w) = d(v, w)$ è una distanza, e la topologia di V come spazio localmente convesso coincide con quella di spazio metrico.
  Anche convergenza e proprietà di Cauchy possono essere rilette con $p = d$.
- Def. Se $\{K_j\}_j$ è t.c. $\bigcup K_j = \Omega$, $K_j \subseteq K_{j+1}$, si dice esaustiva
- In $C^0(\Omega)$, $\{K_j\}_j$ esaustiva $\Rightarrow$ $p_j(f) = \max_{x \in K_j} |f(x)|$, con completezza.
  $f_j \to f$ in $C^0(\Omega)$ se $f_j \xrightarrow{\text{unif.}} f$ in K_j, ovvero $\lim_{j \to \infty} \max_{x \in K_j} |f_j(x) - f(x)| = 0$.
- In $C^m(\Omega)$, $\{K_j\}_j$ esaustiva $\Rightarrow$ $p_j(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in K_j} |\partial^\alpha f(x)|$ con completezza.
- In $C^\infty(\Omega)$,
  $$p_{m,j}(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in K_j} |\partial^\alpha f(x)|$$
  $$p_j(f) := p_{j,j}(f) = \sum_{|\alpha| \leq j} \max_{x \in K_j} |\partial^\alpha f(x)|$$

TEOREMI DI STRUTTURA

- Teor. $\overline{\mathcal{D}'_F(\Omega)} = \mathcal{D}'(\Omega)$; basta dimostrare che $\mathcal{D}'(\Omega) \subseteq \overline{\mathcal{D}'_F(\Omega)}$, anzi solo che $\mathcal{D}'(\Omega) \subseteq \overline{\mathcal{E}'(\Omega)}$, poichè $\overline{\mathcal{E}'(\Omega)} \subseteq \overline{\mathcal{D}'_F(\Omega)}$.

  Ovvero, proviamo che, $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\exists \{u_j\}_j \in \mathcal{E}'(\Omega)$, t.c. $u_j \to u$

  - Sia $\{K_j\}_j$ successione di compatti esaustiva
  - Siano anche $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi_j(x) = 1$ in V_{K_j}, $0 \le \psi_j \le 1$, $\operatorname{supp} \psi_j \subset K_{j+1}$
  - Poniamo ora $u_j := \psi_j u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Abbiamo $u_j(\varphi) = \psi_j u(\varphi) = u(\psi_j \varphi)$; $\exists j_0$ t.c. $\forall j \ge j_0$ $\operatorname{supp} \varphi \subset K_j$
  - $\psi_j(x)$, $j \ge j_0$, $= 1$ per $x \in K_j$ e quindi per $x \in \operatorname{supp} \varphi$; dunque $\psi_j \varphi = \varphi$.
  - $\exists j_0$ t.c. $j \ge j_0$ $u(\psi_j \varphi) = u(\varphi)$, e $u_j(\varphi) = \psi_j \cdot u(\varphi) = u(\psi_j \varphi) \to u(\varphi)$

  il che verifica la nostra tesi, poichè oltretutto $u_j \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\operatorname{supp} u_j \subset \operatorname{supp} \psi_j$.

- Oss. $\mathcal{D}'(\Omega)$ può contenere $u \in (C_0^\infty(\Omega))'$ non ottenibili derivando fz. continue, ma risultanti da limiti di derivate di funzioni continue.
  - Si può anche elaborare una teoria su $C_0^\infty(\Omega')' \setminus \mathcal{D}'(\Omega)$, ma non lo faremo.

- Teor. $\mathcal{E}'(\Omega)$ è il duale topologico di $C^\infty(\Omega)$

  Oss. Le $C_0^\infty(\Omega)$ sono uno spazio vettoriale topologico, ma non di Frechet.

- Def. (topologia in $C_0^\infty(\Omega)$ tramite la convergenza di successioni)

  Siano $\{\varphi_j\}_j$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Diciamo che $\varphi_j \to \varphi$ in $C_0^\infty(\Omega)$ se:
  - $\exists K$, compatto in Ω, t.c. $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K \Rightarrow \operatorname{supp} \varphi \subset K$;
  - $\forall \alpha$, $\partial^\alpha \varphi_j \xrightarrow{\text{unif.}} \partial^\alpha \varphi$ in K, cioè $\max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi| = \max_{x \in K} |\partial^\alpha (\varphi - \varphi_j)(x)| \to 0$.

- Teor. $\mathcal{D}'(\Omega)$ è il duale topologico di $C_0^\infty(\Omega)$.

  Dim. Proviamo l'equivalenza delle seguenti due affermazioni:
  - (i) $\forall K$, $\exists \kappa, C$ t.c. $|u(\varphi)| \le C \cdot \sum_{|\alpha| \le \kappa} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, $\varphi \in C_0^\infty(K)$
  - (ii) $\varphi_j \to 0$ in $C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow u(\varphi_j) \to 0$ in $\mathbb{C}$.
  - (i) $\to$ (ii): se $\varphi_j \to 0$, $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$, e (i) in K per $\varphi = \varphi_j$ dà (ii).
  - ~~¬~~(i) $\to$ ¬(ii): $\exists K$, t.c. $\forall \kappa, C$, in particolare $\kappa = C = j \to \infty$, $\exists \varphi_j \in C_0^\infty(K)$ t.c. $|u(\varphi_j)| > j \cdot \sum_{|\alpha| \le j} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j(x)|$

    Si normalizzi φ_j: $\tilde{\varphi}_j = \frac{1}{u(\varphi_j)} \varphi_j$, così $u(\tilde{\varphi}_j) = 1$.

    In questo modo $1 = |u(\tilde{\varphi}_j)| > j \cdot \sum_{|\alpha| \le j} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \tilde{\varphi}_j(x)|$

    Segue che $\sum_{|\alpha| \le j} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \tilde{\varphi}_j(x)| < \frac{1}{j}$, e $\max_{x \in K} |\partial^\alpha \tilde{\varphi}_j(x)| < \frac{1}{j}$

    ma allora $\tilde{\varphi}_j \to 0$ in $C_0^\infty(\Omega)$, $u(\tilde{\varphi}_j) = 1 \to 1$, che nega la (ii).

DENSITÀ DI STRATO

- $\delta_\Sigma(\varphi) = \int_\Sigma \varphi(x)\, d\sigma$, con Σ ipersuperficie di dimensione $n-1$ in $\mathbb{R}^n$.

  $\Sigma = \{x_i = x_i(u_j)$, con $i = 1:n$, $j = 1:n-1$, $u = (u_j) \in U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, x_i fz. $C^\infty\}$.

- Sia anche $A(u)$ tale per cui:

  - $B_{1,k}(u) = e_k$, per $k = 1:n$; $B_{\ell,k}(u) = \partial_{u_{\ell-1}} x_k(u)$, per $\ell = 2:n$, $k = 1:n$
  - $A(u) = \text{abs}(\det(B(u))) = \left| \sum_{r=1}^n I_r(u)\, e_r \right| = \sqrt{\sum_{r=1}^n I_r^2(u)}$

  Allora (def.) $\int_\Sigma f(x)\, d\sigma := \int_U f(x(u))\, A(u)\, du$, indipendente da parametrizzazione.

- Alternativa di Minkowski: definire la superficie di un lamierino come limite di volume su spessore, ovvero $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{V_\varepsilon} dx}{\varepsilon} := \int_\Sigma d\sigma$
- Teor. Minkowski: le due definizioni sono equivalenti.

INTEGRALI IMPROPRI N-DIMENSIONALI

- Sappiamo che, in dim. 1, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\, dx < +\infty \iff r > 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^r}\, dx < +\infty \iff r < 1$.
- Ci si chiede come si può generalizzare in dim. n la convergenza o meno di $\int_{|x| \geq 1} \frac{1}{|x|^r}\, dx$ e $\int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x|^r}\, dx$, con $|x|$ norma 2 di $(x_1, \dots, x_n)$, in funzione di r.
- La soluzione è quella di utilizzare le coordinate polari.
  - $n = 2$, $(x, y) = (\rho \cdot \cos\theta, \rho \cdot \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $J = \rho$
  - $n = 3$, $(x, y, z) = (\rho \cdot \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2, \rho \cdot \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2, \rho \cdot \cos\theta_1)$ $\theta_1 \in [0, \pi]$, $\theta_2 \in [0, 2\pi]$, $J = \rho^2 \sin\theta_1$
  - n generico, $(x_1, \dots, x_n) = (\rho \cdot P_1(\theta), \dots, \rho \cdot P_n(\theta))$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$

    $\theta \in U = [0, \pi] \times \dots \times [0, 2\pi]$, $P_1, \dots, P_n$ prodotto di monomi $\cos\theta_i$ o $\sin\theta_i$

    Il relativo jacobiano ha una struttura del tipo (D matrice jacobiana):

    - $D_{k,1} = \partial x_k / \partial \rho$ $\quad$ - $D_{k,\ell} = \partial x_k / \partial \theta_{\ell-1}$ $\quad$ $k = 1:n$ $\quad$ $\ell = 2:n$
    - $D_{k,1} = P_k(\theta)$ $\quad$ - $D_{k,\ell} = \rho \cdot \partial P_k / \partial \theta_{\ell-1}$ $\quad$ "

    da cui $|D| = J = \rho^{n-1} \cdot P(\theta)$, con $P(\theta)$ polinomio in $\cos\theta_i$ e $\sin\theta_i$.

    Nei casi precedenti, per $n = 2$ $P(\theta) = 1$, per $n = 3$ $P(\theta) = \sin\theta_1$.

    Seguono: $\int_{|x| \geq 1} \frac{1}{|x|^r}\, dx = \int_1^{+\infty} \int_U \frac{1}{\rho^r} \rho^{n-1} P(\theta)\, d\rho\, d\theta = \int_U P(\theta)\, d\theta \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{r-n+1}}\, d\rho$

    $\int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x|^r}\, dx =$ come sopra, cambiando gli estremi da $(1, +\infty)$ a $(0, 1)$.

    Applicando ora il risultato in dim. 1, si ottengono rispettivamente $r > n$ ed $r < n$ come condizioni di convergenza.

- $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $|f(x)| \leq \frac{c}{|x|^r}$, $c > 0$, $r > n$ per $|x| \geq 1$ $\Rightarrow$ si ha convergenza.

  Infatti $\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \int_{|x| \leq 1} + \int_{|x| > 1} \leq \int_{|x| \leq 1} + c \cdot \int_{|x| > 1} \frac{dx}{|x|^r} < +\infty$

- $|f(x)| \leq \frac{c}{(1 + |x|^2)^N}$, $N \geq \frac{n}{2}$ $\Rightarrow$ $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$ converge

  Infatti $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|)^\pi}\, dx$ converge se e soltanto se $\pi > n$.

CONVOLUZIONE

- **Def.** $f, g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, almeno una a supporto compatto.
  $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$ è detto prodotto di convoluzione.
- **Prop.**
  - (i) $f * g \in C^0(\mathbb{R}^n)$
  - (ii) $f * g = g * f$

    infatti $(f*g)(x) = \int f(y) g(x-y)\, dy = \int f(x-t) g(t)\, dt = \int f(x-y) g(y)\, dy = (g*f)(x)$

    Inoltre f, g a supporto compatto $\Rightarrow (f*g) \in C^0(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto.
  - (iii) $f, g, h \in C^0(\mathbb{R}^n)$, due a supporto compatto $\Rightarrow (f*g)*h = f*(g*h)$
  - (iv) $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f*g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\partial_{x_j}(f*g) = (\partial_{x_j} f) * g$

    infatti $\partial_{x_j}(f*g)(x) = \partial_{x_j} \int f(x-y) g(y)\, dy = \int (\partial_{x_j} f)(x-y) g(y)\, dy = \partial_{x_j} f * g$
  - (v) $f \in C^j(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^k(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f*g \in C^{j+k}(\mathbb{R}^n)$, $\partial^{\alpha+\beta}(f*g) = \partial^\alpha f * \partial^\beta g$

    nell'ipotesi in cui $|\alpha| \le j$, $|\beta| \le k$
  - (vi) $\operatorname{supp}(f*g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, insieme di tutte le somme possibili.

CONVOLUZIONI TRA DISTRIBUZIONI E FUNZIONI C^∞

- Sostituiamo f con una $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, g con una fz. test $\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

  Risulta $\int f(y) g(x-y)\, dy = f_y(\varphi(x-y))$
- **Def.** $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (v * \varphi)(x) := v(\varphi(x-y))$, con $v * \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$
- **Es.** $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \delta * \varphi = \delta_y(\varphi(x-y)) = \varphi(x-0) = \varphi(x)$; $\delta * \varphi = \varphi$.

  la delta di Dirac riproduce la funzione test in termini di $*$.
- **Es.** $\delta^{(\alpha)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \delta^{(\alpha)} * \varphi = \delta_y^{(\alpha)}(\varphi(x-y)) = (-1)^{|\alpha|} \cdot \partial_y^\alpha (\varphi(x-y))|_{y=0}$

  $= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \varphi)(x-y)|_{y=0} = (\partial^\alpha \varphi)(x-y)|_{y=0} = (\partial^\alpha \varphi)(x)$

  poichè $\delta^{(\alpha)}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0)$; dunque $\delta^{(\alpha)} * \varphi = \partial^\alpha \varphi$
- **Prop.**
  - (i) $v * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
  - (ii) $v * (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 \cdot v * \varphi_1 + \lambda_2 \cdot v * \varphi_2$

    $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) * \varphi = \lambda_1 \cdot v_1 * \varphi + \lambda_2 \cdot v_2 * \varphi$] linearità
  - (iii) $\partial^\alpha (v * \varphi) = \partial^\alpha v * \varphi = v * \partial^\alpha \varphi$
  - (iv) $\operatorname{supp}(v * \varphi) \subset \operatorname{supp} v + \operatorname{supp} \varphi$
  - (v) $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (v * \varphi) * \psi = v * (\varphi * \psi)$
  - (vi) $\varphi_j \to 0$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow v * \varphi_j \to 0$ in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

    dunque su ogni $K \subset \mathbb{R}^n$, $\partial^\alpha (v * \varphi_j)$ converge uniformemente.
- **Def.** $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (v * \varphi)(x) := v_y(\varphi(x-y))$

CONVOLUZIONE TRA DISTRIBUZIONI

- $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $(u * v)(x) = \int u(x-y)\, v(y)\, dy = \int u(y)\, v(x-y)\, dy$
- Per definirlo bene, ricorriamo alla teoria degli operatori negli spazi funzionali. Sia $P: A \to B$ lineare; si scrive anche $P \in \mathcal{L}(A,B)$. Di solito, è $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, oppure $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$
- Un esempio può essere dato, se $P: C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, da $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to f(x)\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$
- Un altro esempio è $P = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha(x)\, \partial^\alpha$, $c_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, eventualmente costanti.
- Ancora, l'operatore di convoluzione: $u*$ da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, φ in $u * \varphi$.
- In particolare, gli operatori P di sopra in cui $c_\alpha(x)$ sono costanti, sono gli unici sia lineari alle derivate parziali, sia di convoluzione.
  Infatti $P\varphi = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \cdot \partial^\alpha \varphi = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \cdot \delta^{(\alpha)} * \varphi = \left(\sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \cdot \delta^{(\alpha)}\right) * \varphi$.
- Una variante in termini di dominio e di codominio può essere posta se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$: in tal caso u può appartenere a $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n))$, o $\mathcal{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$.
- Consideriamo anche l'operatore di traslazione $\tau_{x_0}(\varphi(x)) = \varphi(x - x_0)$. Poichè $(\delta_{x_0} * \varphi)(x) = \delta_{x_0}(\varphi(x - x_0))$, possiamo scrivere $\tau_{x_0} = \delta_{x_0} *$, e vedere l'operatore di traslazione come convoluzione con la rispettiva delta di Dirac.
- <u>Teor.</u> $P \in \mathcal{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C_0^\infty(\mathbb{R}^n)) \Rightarrow \exists\, u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ t.c. $U = u*$ se e soltanto se:
  - (i) P commuta con tutte le traslazioni: $P(\tau_{x_0}\varphi) = \tau_{x_0}(P\varphi)$
  - (ii) P è continuo, cioè se $\varphi_j \to 0$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora $P\varphi_j \to 0$ in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

  <u>Dim.</u> $u*$ soddisfa (i) e (ii), infatti:
  - (i) $u * (\tau_{x_0}\varphi) = u(\varphi(x - x_0)\varphi) = u_y(\varphi(x - x_0 - y)) = u_y(\varphi(x - y) - x_0) = \tau_{x_0}(u * \varphi)(x)$
  - (ii) è la proprietà (vi) delle convoluzioni tra C^∞ e distribuzioni.
- <u>Teor.</u> Se $P \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n))$, allora esiste $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ come prima.
- <u>Teor.</u> $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. $u*(v*) \in \mathcal{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n))$ e verifica:
  - (i) $\tau_{x_0}(u*)(v*) = \tau_{x_0} P = (u*)\,\tau_{x_0}(v*) = (u*)(v*)\,\tau_{x_0} = P\tau_{x_0}$
  - (ii) la composizione di fz continue è continua.
- Dunque $\exists\, w$ t.c. $P = w*$, $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ponendo per definizione poi $u * v := w$. Se $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $w * \varphi := u * (v * \varphi)$
- <u>Es.</u> $\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \delta * (v * \varphi) = v * \varphi$; $\delta * v = v$
- <u>Es.</u> $\delta^{(\alpha)} * (v * \varphi) = \partial^\alpha (v * \varphi) = (\partial^\alpha v) * \varphi$; $\delta^{(\alpha)} * v = \partial^\alpha v$

PROPRIETÀ E RISULTATI SULLA CONVOLUZIONE TRA DISTRIBUZIONI

- Proprietà:
  - (i) $u * v = v * u$ — commutatività
  - (ii) $(u * v) * w = u * (v * w)$ — associatività
  - (iii) $\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v$ — derivazione
  - (iv) $\operatorname{supp}(u * v) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v$ — supporto
  - (v) $u_j \to u$ in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u_j * v \to u * v$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ — continuità
- Oss. $u_j \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $u_j \to \delta \Rightarrow \forall v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $u_j * v \to v$.

  Dim. Si applichi (v) con $u = \delta$. $(u_j * v)$ vengono dette regolarizzazioni di v, o approssimazioni dell'identità. Con u_j opportune, sono molto regolari.
- Teor. $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. $\exists \{f_j\}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ / $f_j \to v$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ovvero, $\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

  Lemma $\exists \{\varphi_j\}_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\varphi_j \to \delta$.

  Per esempio, se φ_j è la campana normalizzata di centro 0, raggio $\frac{1}{j}$.

  In particolare valgono:
  - $\varphi_j(x) = j^n \cdot \varphi_1(jx)$
  - $\operatorname{supp} \varphi_1 = \{|x| \le 1\}$
  - $\operatorname{supp} \varphi_j = \{|jx| \le 1\} = \{|x| \le \frac{1}{j}\}$
  - $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x)\,dx = j^n \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(jx)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(y)\,dy = 1$

  Si prova che $\varphi_j \to \delta$, ovvero $\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_j(\varphi) = \int \varphi_j(x)\varphi(x)\,dx \to \delta(\varphi) = \varphi(0)$

  Dim. $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sia $\varphi_j \to \delta$. Allora $f_j = \varphi_j * v = \delta * v = v$.
- Teor. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. $\exists \{f_j\}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ t.c. $f_j \to f$ in norma p.

  Dim. Basta definire $f_j = f * \varphi_j$ (la convergenza è in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$)
- Teor. Quanto sopra vale anche per $p = \infty$.
- Concludendo, valgono:
  - $\overline{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$
  - $\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$
  - $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ma questo non lo dimostreremo.

TRASFORMATE DI FOURIER

- **Def.** $u \in L^1$, trasformata di Fourier $\hat{u}(\xi) := \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)\,dx$
- **Lemma** (Riemann-Lebesgue) $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $\lim_{\xi\to\infty} f(\xi) = 0$

Dim. $(n=1)$ $|\hat{f}(\xi_0+h) - \hat{f}(\xi_0)| = |\int (e^{-i(\xi_0+h)x} - e^{-i\xi_0 x}) f(x)\,dx| < \varepsilon$

$$\leq |\int_{|x|\geq R} \dots| + |\int_{|x|\leq R} \dots|$$

con $\int_{|x|\geq R} |\dots|\,dx \leq 2\cdot \int_{|x|\geq R} f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$ per R opportunamente grande

Questo prova la continuità, resta da dimostrare il limite agli estremi.

È sufficiente provare che, $\forall \varepsilon>0$, $\exists H$ t.c. $\xi > H \Rightarrow |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx| < \varepsilon$

Lemma 1 (esempio di calcolo di $\hat{f}$)

Sia $\chi_{[a,b]}(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } a\leq x\leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$; $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) f(x)\,dx - i\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x\xi) f(x)\,dx \\
&= \int_a^b \cos(x\xi)\,dx - i\cdot \int_a^b \sin(x\xi)\,dx \\
&= \frac{1}{\xi}\int_a^b \cos(x\xi)\,d(x\xi) - \frac{i}{\xi}\cdot \int_a^b \sin(x\xi)\,d(x\xi) \\
&= \frac{1}{\xi}(\sin(b\xi) - \sin(a\xi)) + \frac{i}{\xi}\cdot(\cos(b\xi) - \cos(a\xi))
\end{aligned}$$

(integrazione elementare)

$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{4}{\xi}$

Lemma 2 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\varepsilon>0$. $\Rightarrow \exists\, \tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \cdot \chi_{[a_j,b_j]}(x)$ t.c. $\|f-\tilde{f}\|_{L^1} < \varepsilon$.

In altre parole, le funzioni step o a gradino sono dense in L^1.

Infatti
$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx| = |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}[(f(x)-\tilde{f}(x)) + \tilde{f}(x)]\,dx| \\
&\leq |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}(f(x)-\tilde{f}(x))\,dx| + |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-ix\xi}|\cdot|f(x)-\tilde{f}(x)|\,dx + \dots \\
&= \|f-\tilde{f}\|_1 + \dots \\
&< \varepsilon/2 + \dots \\
&= \varepsilon/2 + |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \chi_{[a_j,b_j]}(x))\,dx| \\
&= \varepsilon/2 + |\sum_{j=1}^{m} \mu_j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\cdot \chi_{[a_j,b_j]}(x)\,dx| \\
&\leq \varepsilon/2 + \sum_{j=1}^{m} |\mu_j|\cdot|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\cdot \chi_{[a_j,b_j]}(x)\,dx| \\
&\leq \varepsilon/2 + \sum_{j=1}^{m} |\mu_j|\cdot 4/\xi \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

per $\xi > \frac{8}{\varepsilon}\cdot\sum_{j=1}^{m}|\mu_j| = H$.

- **Es.** $\cdot\ \hat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) = 2\cdot\frac{\sin\xi}{\xi}$ $\cdot\ f(x) = e^{-|x|} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$ (integrando $\times$ parti)
- **Oss.** $\cdot\ f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ molto rapidamente $\Rightarrow \hat{f}(\xi)$ molto regolare localmente

$\cdot\ f(x)$ molto regolare localmente $\Rightarrow \hat{f}(\xi) \xrightarrow[\xi\to\infty]{} 0$ molto rapidamente.

$\cdot$ Si veda cosa accade per gli esempi precedenti.

- **Def.** $C_0^0(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^0(\mathbb{R}^n_x),\ \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \}$
- Consideriamo ora F come operatore: $Ff(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)\, dx$

  Si ha $F: L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$, ma si preferisce operare su $F: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

  Tuttavia, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ma $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int e^{-ix\xi} f(x)\, dx$ può non convergere (es: $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$)

  Per risolvere, si può definire l'integrale con il metodo delle troncature, ovvero troncando la funzione ad un certo x e facendo poi il limite.

  L'approccio moderno prevede però l'appoggio alla teoria delle distribuzioni.
- **Def.** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ contiene tutte le funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che, $\forall\, \alpha, \beta$, sia $|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \le c_{\alpha\beta}$ per $x \in \mathbb{R}^n$, cioè $\| x^\alpha \partial^\beta f(x) \|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$.
- **Prop.** $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\exists\, c_N$ t.c. $|f(x)| \le \frac{c_N}{(1+|x|^2)^N}$
- **Dim.** Proviamo che $g(x) := (1+|x|^2)^N \cdot |f(x)|$ è limitata.

  Per Newton: $(1+|x|^2)^N = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} |x|^{2j}$

  inoltre valendo: $|x|^2 = (x_1^2 + (x_2^2 + \dots + x_n^2))$

  si può riapplicare Newton ponendo $A = x_1^2$, $B = x_2^2 + \dots + x_n^2$

  Alla fine si ottiene una forma del tipo: $\sum_{|\alpha| \le N} c_\alpha \cdot x^{2\alpha}$

  e quindi $\sum_{|\alpha| \le N} c_\alpha \cdot x^{2\alpha} |f(x)| = \sum_{|\alpha| \le N} c_\alpha \cdot |x^{2\alpha} \cdot f(x)| \le c_N$

  con $|x^{2\alpha} \cdot f(x)|$ limitata (def. di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, con $\alpha := 2\alpha$, $\beta := 0$)
- **Cor.** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$: infatti $\int |f(x)|\, dx \le \int \frac{c_N}{(1+x^2)^N}\, dx < \infty$, ponendo $N > \frac{n}{2}$
- **Es. 1** $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: infatti $\max_{x \in \operatorname{supp}} |x^\alpha \cdot \partial^\beta \varphi(x)| \le c$, dove $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e $\operatorname{supp} \partial^\beta \varphi(x) \subset \operatorname{supp} \varphi$ (dunque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)
- **Es. 2** $f(x) = e^{-|x|^2} \Rightarrow x^\alpha \cdot \partial^\beta e^{-|x|^2} = x^\alpha \cdot P_\beta(x) \cdot e^{-|x|^2}$, con P_β polinomio in β.

  Poichè $|x^\alpha \cdot P_\beta(x) \cdot e^{-|x|^2}| \le c$, segue che $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- **Es. 3/4** Anche $f_3(x) = (\cosh x)^{-1}$ e $f_4(x) = e^{-(1+|x|^2)^\varepsilon} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- **Prop.** $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \forall\, \gamma, \delta$, è $x^\gamma \partial^\delta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

  Dim. Proviamo che, $\forall\, \alpha, \beta$, è $x^\alpha \partial^\beta (x^\gamma \partial^\delta f) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

  Sviluppando con Leibniz:

$$x^\alpha \cdot \sum_{\theta \le \beta} \binom{\beta}{\theta} \partial^\theta x^\gamma \partial^{\beta-\theta} (\partial^\delta f) = x^\alpha \cdot \sum_{\theta \le \beta} \binom{\beta}{\theta} \partial^\theta x^\gamma \partial^{\beta-\theta+\delta} f$$

$$= x^\alpha \cdot \sum_{\theta \le \beta} \binom{\beta}{\theta} \cdot k \cdot x^{\gamma-\theta} \cdot \partial^{\beta-\theta+\delta} f = \sum_{\text{finita}} c_{uv} \cdot x^u \cdot \partial^v f(x)$$

  Per ipotesi $x^u \partial^v f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, in quanto $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

  Dunque la somma finita è $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, il che prova la tesi.

- **Prop.** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio di Frèchet rispetto a $p_j(f) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\le j} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$
- **Cor.** (alla prop. con dim.) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, γ e δ fissati $\Rightarrow x^\gamma \partial^\delta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
- **Prop.** (convergenza di una successione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Siano $\{f_j\}_j$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
  Si ha che $f_j \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, $\forall \alpha, \beta$, $x^\alpha \partial^\beta f_j \to x^\alpha \partial^\beta f$ unif. in $\mathbb{R}^n$,
  ovvero se $\forall \alpha, \beta$ risulta $\|x^\alpha \partial^\beta (f_j - f)\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta (f_j(x) - f(x))| \to 0$.
- **Prop.** $f_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \|x^\alpha \partial^\beta f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$, $\forall \alpha, \beta$ fissati.

  Dim. La norma in questione è pari a $\int |x^\alpha \partial^\beta f_j(x)|\, dx$, e scriviamo:

$$\begin{aligned}
\int |x^\alpha \partial^\beta f_j(x)|\, dx &= \int \frac{1}{(1+|x|^2)^N} \cdot (1+|x|^2)^N \cdot |x^\alpha \partial^\beta f_j(x)|\, dx \qquad [N > \tfrac{n}{2}] \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^N \cdot x^\alpha \partial^\beta f_j(x)| \cdot \int \frac{dx}{(1+|x|^2)^N} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big| \sum_{|\gamma|\le N} c_\gamma \cdot x^{2\gamma} \cdot x^\alpha \cdot \partial^\beta f_j(x) \Big| \cdot K \quad \text{per opportuni } c_\gamma, K. \\
&\le \sum_{|\gamma|\le N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\alpha+2\gamma} \partial^\beta f_j(x)| \cdot K
\end{aligned}$$

  che $\to 0$, poichè c.l. di $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\alpha+2\gamma} \partial^\beta f_j(x)|$, che $\to 0$.
- **Prop.** $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Risulta ben definita $\hat f(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)\, dx \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, poichè $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.
- **Teor.** (proprietà di Fourier). Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e si denoti $D_{x_j} := -i \cdot \partial_{x_j}$.
  - (1) $\widehat{D_{x_j} f}(\xi) = \xi_j \hat f(\xi) \qquad j = 1:n$
  - (2) $\widehat{x_j f}(\xi) = -D_{\xi_j} \hat f(\xi)$ proprietà di simmetria
  - (1 bis) $\forall \alpha$, $\widehat{D^\alpha f}(\xi) = \xi^\alpha \hat f(\xi)$
  - (2 bis) $\forall \alpha$, $\widehat{x^\alpha f}(\xi) = (-1)^{|\alpha|} \cdot D^\alpha_\xi \hat f(\xi)$
  - (1 ter) $P = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \cdot D^\alpha \qquad p(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m}^{\xi} c_\alpha \cdot \xi^\alpha$

    $\widehat{P(D) f} = p(\xi) \cdot \hat f(\xi)$, ed equazioni differenziali diventano algebriche.

    $P(D) f = g \to \widehat{P(D) f} = \hat g \to p(\xi) \hat f = \hat g$

    $\to \hat f(\xi) = \hat g(\xi) \cdot [p(\xi)]^{-1} \to f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat g(\xi)}{p(\xi)}\right)$
- **Dim.** · Si voglia dimostrare la prima per $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\widehat{D_x f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} D_x f(x)\, dx = -i \cdot \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} f'(x)\, dx \\
&= -i \cdot \lim_{R\to+\infty} \Big[e^{-ix\xi} f(x) \Big|_{x=-R}^{x=R} - \int_{-R}^{R} \frac{d}{dx}(e^{-ix\xi})\, f(x)\, dx \Big] \\
&= -i \cdot \lim_{R\to+\infty} \Big[e^{-iR\xi} f(R) - e^{iR\xi} f(-R) - \int_{-R}^{R} \frac{d}{dx}(e^{-ix\xi})\, f(x)\, dx \Big] \\
&= -i \cdot \lim_{R\to+\infty} \Big[- \int_{-R}^{R} \frac{d}{dx}(e^{-ix\xi})\, f(x)\, dx \Big] \\
&= -i \cdot \lim_{R\to+\infty} - \int_{-R}^{R} -i\xi \cdot e^{-ix\xi} f(x)\, dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \xi \cdot e^{-ix\xi} f(x)\, dx = \xi \cdot \hat f(\xi)
\end{aligned}$$

  dove abbiamo ristretto la quadra poichè $|f(x)| < \frac{C_N}{(1+|x|^2)^N}$ implica che il loro limite sia 0.

• In dimensione n, un accenno di generalizzazione può essere dato da:

$$\widehat{D_{x_j} f}(\xi) = -i \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\, \partial_{x_j} f(x)\, dx = -i \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_1\xi_1} \cdot \ldots \cdot e^{-ix_j\xi_j} \cdot \ldots \cdot e^{-ix_n\xi_n}\, \partial_{x_j} f(x)\, dx_1 \ldots dx_j \ldots dx_n$$

Poichè $|e^{-ix\xi}\, \partial_{x_j} f(x)| = |\partial_{x_j} f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si può integrare per fili con Fubini:

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_j\xi_j}\, \partial_{x_j} f(x)\, dx_j \ldots dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n$$

$$= \xi_j \cdot \hat{f}(x_1, \ldots, \xi_j, \ldots, x_n) = \xi_j \cdot \hat{f}(\xi)$$

• Dimostriamo ora la seconda:

$$-D_{\xi_j} \hat{f}(\xi) = i \cdot \partial_{\xi_j} \left(\int e^{-ix\xi} f(x)\, dx \right) = i \cdot \int (\partial_{\xi_j} e^{-ix\xi} f(x)\, dx) = \int e^{-ix\xi} x_j f(x)\, dx = \widehat{x_j f(\xi)}$$

essendo lecita la derivazione sotto il segno di integrale in quanto:

$$\partial_{\xi_j} (e^{-ix\xi} f(x)) = \partial_{\xi_j} e^{-i(\sum_{k=1}^n x_k \xi_k)} f(x) = -i x_j e^{-ix\xi} f(x) \text{ ha modulo } |x_j f(x)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

• I risultati successivi seguono per applicazione ripetuta.

• <u>Cor.</u> $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$

<u>Dim.</u> Vogliamo provare che, $\forall \alpha, \forall \beta$, $|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi)| \in L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$

Si ha $|\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f}(\xi)| = |\xi^\alpha \cdot ((-1)^{|\beta|} \cdot \widehat{x^\beta f}(\xi))| = |\xi^\alpha \cdot \widehat{x^\beta f}(\xi)|$

$$= |\widehat{D^\alpha (x^\beta f)}| = |\widehat{\partial^\alpha (x^\beta f)}| \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n), \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

• <u>Teor.</u> $F: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è continuo, ovvero $f_j \to 0 \Rightarrow \hat{f}_j \to 0$.

<u>Dim.</u> Hp: $f_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè $\forall \alpha, \beta$, $\|x^\alpha \partial^\beta f_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0$ per $j \to \infty$

Ri: $f_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \forall \alpha, \beta$, $\|x^\alpha \partial^\beta f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$

Th: $\forall \alpha, \beta$, $\|\xi^\alpha \partial^\beta \hat{f}_j(\xi)\|_{L^\infty} \to 0$ per $j \to \infty$

Abbiamo che $\|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f}_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\xi^\alpha \widehat{x^\beta f_j}(\xi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{\partial^\alpha (x^\beta f_j)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$

$$\leq \|\partial^\alpha (x^\beta f_j)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \left\| \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma x^\beta\, \partial^{\alpha-\gamma} f_j \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \left\| \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha \\ (\gamma \leq \beta)}} \binom{\alpha}{\gamma} k_\gamma \cdot x^{\beta-\gamma} \cdot \partial^{\alpha-\gamma} f_j \right\| \leq \sum_{\text{finita}} c_{uv} \cdot \|x^u \partial^v f_j\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

dove ogni termine della c.l. $\to 0$, e dunque la stessa c.l $\to 0$.

• F è dunque una biezione, essendo un isomorfismo bi-continuo.

Ciò permette di definire un'antitrasformata di Fourier come:

$$(F^{-1} g)(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \int e^{ix\xi} g(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-n} \cdot \hat{g}(-x)$$

valendo per F^{-1} le stesse proprietà per F, con le opportune modifiche.

• <u>Teor.</u> $FF^{-1} = F^{-1}F = I$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; in particolare, $f(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$