PARTE A 1-22

CAPITOLO I

CALCOLO VETTORIALE

1.1 - Premesse.

1.1.1 - Equazioni lineari.

Un'**equazione** lineare a coefficienti reali **in una incognita x** è del tipo:

(1) $$\mathbf{ax + b = 0}$$

ossia anche $ax + b - b = -b$ dunque $ax = -b$.
Supposto $a \neq 0$, esiste l'inverso di a che è il numero 1/a. Allora la (1) si può scrivere come $(1/a)ax = (1/a)(-b)$ e quindi la (1) ammette la soluzione (detta anche radice):

(2) $$x = -\frac{b}{a}.$$

Per $a = 0$ e $b = 0$ la (1) diventa un'identità, ogni numero reale è soluzione e l'equazione si dice indeterminata.
Per $a = 0$ e $b \neq 0$ la (1) non ha soluzioni e l'equazione è impossibile.

Un'**equazione** lineare a coefficienti reali **nelle due incognite x ed y** è del tipo:

(3) $$\mathbf{ax + by + c = 0}$$

una sua soluzione è una coppia di numeri che sostituita nella (3) la rende soddisfatta.
Consideriamo ad esempio l'equazione: $2x - y + 4 = 0$ (4).
Scelto un valore per la x, diciamo ad esempio 3, si ha una soluzione se $6 - y + 4 = 0$, ossia se $y = 10$, quindi la coppia (3, 10) è soluzione della (4). Così, scelto un valore per la y, diciamo ad esempio 6, si ha una soluzione se $2x - 6 + 4 = 0$ ossia se $x = 1$; quindi la coppia (1, 6) è una soluzione della (4).
Se nella (3) il termine noto c è nullo, l'equazione lineare si dice **omogenea**

$$\mathbf{ax + by = 0}$$

ed ha come soluzioni $x = \lambda b$ $y = -\lambda a$ dove λ è un fattore, ossia un numero, arbitrario.

Un'**equazione lineare nelle tre incognite x, y, z** è del tipo:

(5) $$\mathbf{ax + by + cz + d = 0.}$$

Una soluzione è una terna di numeri che si ottiene fissando in modo arbitrario due delle tre incognite e determinando quindi il corrispondente valore della terza.

Un'**equazione lineare nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$** si scrive

(6) $$\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0}$$

ove con a_i si intende il coefficiente dell'incognita x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) e con b il termine noto.
Una soluzione della (6) è una n-pla che si ottiene nel seguente modo: si fissano $n - 1$ incognite, si sostituiscono nell'equazione data ottenendo un'equazione con una sola incognita e si determina quest'ultima risolvendo l'equazione ottenuta.
Se $b = 0$, l'equazione si dice **omogenea**. In tal caso se $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ è una soluzione anche $(\lambda c_1, \lambda c_2, \ldots, \lambda c_n)$ lo è, qualunque sia λ reale.

1.1.2 - Determinanti.

La teoria dei determinanti e dei sistemi lineari verrà sviluppata nei capitoli successivi.
Ci limitiamo qui ad alcuni cenni.

Dati quattro numeri reali $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, si dice **matrice quadrata di ordine 2** la tabella:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Alla matrice quadrata A è associato il numero reale $\mathbf{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, che si dice **determinante del 2° ordine** (determinante della matrice A) e si indica con il simbolo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathbf{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

In modo analogo si definisce **matrice quadrata di ordine 3** la tabella:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

e si dice **determinante del 3° ordine** (determinante della matrice A), e si indica con il simbolo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

il numero reale $\mathbf{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}}$.
E' facile verificare che tale numero si può ottenere anche nel seguente modo che utilizza determinanti del 2° ordine:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

I numeri a_{ij} si dicono elementi della matrice e sono disposti in tre righe e tre colonne. Righe e colonne si dicono linee.

1 2- Vettori del piano.

1.2.1 - Premesse.

In Fisica vi sono grandezze scalari e grandezze vettoriali. Per individuare le prime basta un numero, eventualmente con segno quando abbia senso parlare di valori positivi o negativi delle grandezze, come ad esempio la temperatura; le altre, come ad esempio la velocità, sono individuate oltre che da un numero positivo, detto modulo, dalla direzione e dal verso, ossia da un vettore.
Quando interviene anche il punto di applicazione del vettore si parla di vettore applicato, altrimenti di vettore libero o più semplicemente di vettore.
Anche se la teoria dei vettori è un capitolo della Fisica, vedremo che il calcolo vettoriale è uno strumento molto utile per la Geometria Analitica.
I vettori che verranno utilizzati sono vettori liberi. La loro definizione ha bisogno di alcune premesse.
Consideriamo nel piano le coppie ordinate di punti (A, B) ove A viene detto primo estremo e B secondo estremo.

Una coppia ordinata, detta anche **segmento orientato** (A, B) individua:

i) un numero non negativo d(A, B) = d(B, A) che rappresenta la distanza di A da B rispetto ad una data unità di misura;

se d(A, B) ≠ 0, ossia A non coincide con B:

ii) una retta: quella che contiene i punti A e B;
iii) un verso sulla retta: quello che va da A al punto B.

Nell'insieme dei segmenti orientati del piano introduciamo una relazione, detta di **equipollenza**. Diciamo:

(A, B) equipollente (C, D) o, più semplicemente, **(A, B) σ (C, D)**

se si verifica una delle seguenti condizioni:
1) se B coincide con A, anche D coincide con C;
oppure
2) (A, B) e (C, D) appartengono alla stessa retta sono uguali e concordi;
oppure
3) (A, B) e (C, D) appartengono a due rette parallele e la retta AC che congiunge i primi estremi è parallela alla retta BD che congiunge i secondi estremi.
Quindi: *due segmenti orientati si dicono equipollenti se hanno lunghezza nulla oppure hanno stessa lunghezza, stessa direzione e stesso verso.*

Tale relazione σ è:
riflessiva se comunque scelta (A, B) si ha (A, B) σ (A, B);
simmetrica se (A, B) σ (C, D) → (C, D) σ (A, B);
transitiva se (A, B) σ (C, D) e (C, D) σ (E, F) → (A, B) σ (E, F).
Possiamo suddividere l'insieme dei segmenti orientati in sottoinsiemi che diremo **classi di equivalenza**. Se in ogni classe mettiamo tutti i segmenti equipollenti ad un dato segmento orientato, per individuare una classe basta un qualsiasi elemento che si può scegliere come rappresentante.

DEFINIZIONE 1.2.1 - *Si dice **vettore libero** o semplicemente **vettore** una classe di segmenti orientati equipollenti.*

1.2.2 - Nomenclatura e notazioni.

Considerato un vettore, che indicheremo con **u** oppure con $\vec{u}$, se (A, B) è un suo rappresentante si pone **u** = B – A od anche B = A + **u**.
La distanza di A da B dice **norma** o **modulo** del vettore **u** = B – A e si indica con

$$\|\mathbf{u}\| \text{ o } \|\mathbf{B}-\mathbf{A}\| \text{ o } |\mathbf{u}| \text{ o } |\mathbf{B}-\mathbf{A}|.$$

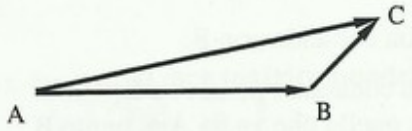
Il vettore nullo **0** ha modulo zero, direzione e verso indeterminati.
I vettori con norma 1 sono detti **versori**.

OSSERVAZIONE. Nel seguito verranno introdotte diverse operazioni fra vettori utilizzando dei segmenti che li rappresentano. Occorre verificare che le operazioni siano indipendenti dalla scelta dei rappresentanti. Lasciamo al lettore la verifica.

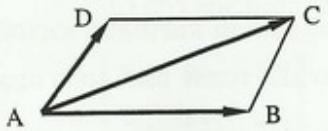
1.2.3 - Somma di due vettori.

La somma di due vettori si definisce su due rappresentanti dei vettori:

scelto un punto A se B – A è un rappresentante del vettore **u** e C – B un rappresentante del vettore **v** allora C – A è un rappresentante del vettore **u** + **v**. L'operazione è indipendente dalla scelta del punto A.



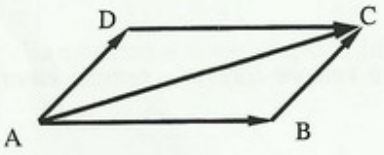
La costruzione di un rappresentante del vettore **u** + **v** può essere fatta anche mediante la regola del parallelogramma se **u** e **v** non hanno rappresentanti sulla stessa retta.
Ossia se B – A è un rappresentante del vettore **u** e D – A un rappresentante del vettore **v**, si costruisce il parallelogramma ABCD, il segmento orientato AC rappresenta **u** + **v**.



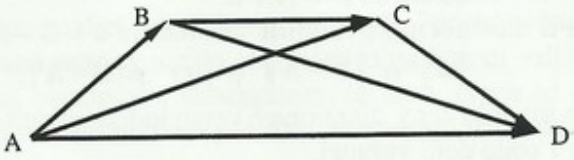
PROPRIETÀ 1.2.1 - *L'insieme dei vettori con l'operazione di somma forma un gruppo commutativo.*

Dimostrazione. Ricordiamo anzitutto che un gruppo commutativo è una struttura algebrica dotata di un'operazione binaria interna (nel nostro caso la somma di vettori) che gode delle proprietà commutativa, associativa, esistenza dell'elemento neutro ed esistenza dell'opposto di ogni vettore.
La somma dei vettori sopra definita gode infatti delle proprietà dette:

- Proprietà commutativa: **u** + **v** = **v** + **u** infatti se **u** = B – A = C – D e C – B è un rappresentante di **v**, per un noto criterio, il convesso ABCD è un parallelogramma.



- Proprietà associativa: (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**) infatti si ha che
(B – A) + (C – B) + (D – C) = D – A comunque si raggruppino gli addendi.



- Esistenza dell'elemento neutro: il vettore nullo **0** è elemento neutro: **u** + **0** = **0** + **u** = **u** ovvio vista la definizione di **0**.

- Esistenza dell'opposto: per ogni vettore **u** esiste il vettore opposto –**u** tale che:

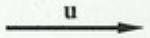
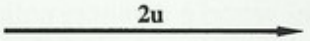
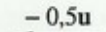
$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0};$$

infatti per costruire l'opposto di **u** basta considerare un suo rappresentante A – B; un rappresentante di –**u** sarà B – A perché (B – A) + (A – B) = **0**.

1.2.4 - Prodotto di un numero reale per un vettore.

Introduciamo ora una legge di composizione, detta **prodotto**, che ad ogni coppia ordinata formata da un numero reale ed un vettore associa un unico vettore.

DEFINIZIONE 1.2.2 - *Se λ è un numero reale ed $\mathbf{u}$ un vettore, per prodotto $\lambda\mathbf{u}$ si intende il vettore $\mathbf{w}$ tale che:*
è per definizione il vettore nullo se $\lambda = 0$ oppure $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ossia $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$
altrimenti è il vettore tale che:
- $\|\mathbf{w}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{u}\|$;
- *$\mathbf{w}$ ha la direzione di $\mathbf{u}$;*
- *$\mathbf{w}$ ha il verso di $\mathbf{u}$ se $\lambda > 0$, verso contrario se $\lambda < 0$.*

ESEMPIO 1.2.1
Dato il vettore $\mathbf{u}$  se $\lambda = 2$ risulta 
se $\lambda = -0{,}5$ risulta 

PROPRIETÀ 1.2.2
Scelti comunque i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ed i numeri reali λ e μ valgono le seguenti eguaglianze:
$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$;
$(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$;
$(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$;
$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.
La giustificazione segue dalla Definizione 1.2.2.
In particolare, dalla seconda e quarta relazione, segue che se n è un numero naturale si ha:
$n\mathbf{u} = (1 + 1 + \ldots + 1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + 1\mathbf{u} + \ldots + 1\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{u} + \ldots + \mathbf{u}$ (n volte).

DEFINIZIONE 1.2.3 - *Due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si dicono **paralleli** se hanno rappresentanti sulla stessa retta, ossia $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$.*

L'insieme dei vettori, definiti come classi di segmenti del piano orientati equipollenti con la somma e il prodotto per un numero reale prima definiti è un caso particolare di **spazio vettoriale** sul campo dei numeri reali, che indicheremo con S_2.

1.2.5 - Dipendenza ed indipendenza lineare. Basi di S_2.

DEFINIZIONE 1.2.4 - *Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ m vettori di S_2 ed $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ m numeri reali: il vettore*

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m$$

*si dice **combinazione lineare** (in breve c.l.) dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ con coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.*

DEFINIZIONE 1.2.5 - *In S_2 p vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ si dicono **linearmente dipendenti** (brevemente l.d.) se esiste una loro combinazione lineare con scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ non tutti nulli che dà il vettore nullo:*

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_p\mathbf{v}_p.$$

*In S_2 p vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ si dicono **linearmente indipendenti** (brevemente l.i.) se l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella con gli scalari tutti nulli.*

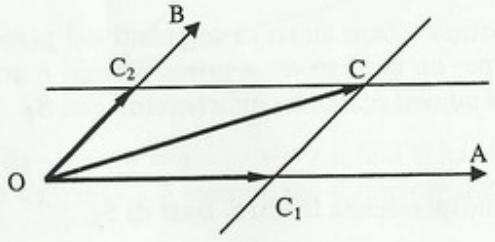
Valgono le seguenti proprietà:
- se uno dei p vettori $\mathbf{v}_1,.., \mathbf{v}_p$ è il vettore nullo, i vettori sono l.d., come prova la relazione
$$\mathbf{0} = 0\,\mathbf{v}_1 + \ldots\ldots + 1\,\mathbf{0} + \ldots\ldots + 0\,\mathbf{v}_p;$$
- i vettori $\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_p$ sono l.d. se e solo se uno di essi è esprimibile come c.l. dei rimanenti;
- se il sistema di vettori $\{\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_p\}$ è l.d. anche ogni suo soprainsieme lo è.

PROPRIETÀ 1.2.3 - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due vettori di S_2 siano linearmente dipendenti è che siano paralleli.*

In S_2 il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 2, in quanto vale la:

PROPRIETÀ 1.2.4 - *Tre qualunque vettori di S_2 sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione - Siano **u**, **v**, **w** i tre vettori dati.
Se uno dei vettori è il vettore nullo i vettori sono l.d. per quanto visto.
Se due dei vettori sono paralleli per la proprietà 1.2.3 sono linearmente dipendenti e quindi lo è anche ogni loro soprainsieme.
Supponiamo ora che due dei tre vettori non siano paralleli, ad esempio **u** e **v**. Scegliamo rappresentanti dei tre vettori con origine comune O: $\mathbf{u} = A - O$, $\mathbf{v} = B - O$ e $\mathbf{w} = C - O$ e cerchiamo di esprimere **w** come combinazione lineare di **u** e **v** cioè come somma di due vettori paralleli rispettivamente ad **u** e **v**.
Conducendo per C la parallela alla retta OB ed indicando con C_1 la sua intersezione con la retta OA ed in modo analogo indicando con C_2 l'intersezione della retta per C parallela alla retta OA con la retta OB si decompone il vettore w nella somma di due vettori $C_1 - O$ e $C_2 - O$ paralleli rispettivamente ad **u** ed a **v**:
$$\mathbf{w} = C - O = (C_1 - O) + (C_2 - O).$$
Per la proprietà 1.2.3 il vettore $C_1 - O$, essendo parallelo ad **u**, si può scrivere come $C_1 - O = x_1\mathbf{u}$, per un opportuno x_1 reale, ed il vettore $C_2 - O$ essendo parallelo a **v**, si può scrivere come $C_2 - O = x_2\mathbf{v}$, per un opportuno x_2 reale.
Risulta $\mathbf{w} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$ e quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti.



COROLLARIO - *Quattro o più vettori di S_2 sono linearmente dipendenti.*

Poiché per la proprietà 1.2.4, considerati in S_2 due qualunque vettori non paralleli, ogni vettore di S_2 si può esprimere come loro combinazione lineare, si dà la seguente:

DEFINIZIONE 1.2.6 - *Si dice **base** dello spazio vettoriale S_2 ogni coppia ordinata $\{e_1, e_2\}$ di vettori linearmente indipendenti.*

1.2.6 - Espressioni in componenti.

Introdotta nello spazio vettoriale S_2 una base, ogni vettore di S_2 si può scrivere in un unico modo come combinazione lineare dei vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2\,, \qquad \mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2.$$

E' possibile dare le espressioni in componenti delle operazioni di somma di vettori e di prodotto di un numero reale per un vettore, tenuto conto delle relative proprietà:
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) = (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2$;
- $\lambda\mathbf{u} = \lambda(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) = \lambda u_1\mathbf{e}_1 + \lambda u_2\mathbf{e}_2$.

ESEMPIO 1.2.2 - Se $\mathbf{u}$ ha componenti (2, 3) e $\mathbf{v}$ ha componenti (–1, – 4);
- $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ha componenti $(2 - 1, 3 - 4) = (1, -1)$;
- $3\mathbf{u}$ ha componenti (6, 9);
- $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$ ha componenti (–2, –3).

Due vettori sono paralleli se $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ ossia $u_1 = \lambda v_1$ e $u_2 = \lambda v_2$ ossia se $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$.

Ad esempio $\mathbf{u} = (-1, 2)$ è parallelo a $\mathbf{v} = (+0{,}5\,, -1)$.

1.3 - Vettori dello spazio ordinario.

1.3.1 - Prime definizioni.

Come nel caso del piano, considerati i segmenti orientati dello spazio, si può definire tra essi la relazione di equipollenza data nel § 1.2.1 e definire vettore dello spazio una classe di segmenti orientati equipollenti. Indichiamo con S_3 l'insieme dei vettori dello spazio.
In modo del tutto analogo a quanto fatto in S_2, in S_3 si definiscono la somma di vettori ed il prodotto di un numero reale per un vettore: tali operazioni danno ad S_3 la struttura di spazio vettoriale reale.
Le definizioni di combinazione lineare (1.2.4) e di indipendenza e dipendenza lineare (1.2.5) si estendono ai vettori di S_3 e valgono le seguenti proprietà:

PROPRIETÀ 1.3.1 - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè tre vettori di S_3 siano linearmente dipendenti è che siano complanari, cioè ammettano rappresentanti contenuti nello stesso piano.*

PROPRIETÀ 1.3.2 - *Quattro vettori qualunque di S_3 sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione - Indicati con $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ i quattro vettori possiamo scegliere dei punti O, A; B, C, D tali che risulti $\mathbf{u} = A - O$, $\mathbf{v} = B - O$, $\mathbf{w} = C - O$, $\mathbf{z} = D - O$.
Supponiamo che $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ non siano complanari O e cerchiamo di esprimere $\mathbf{z}$ come combinazione lineare di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ cioè come somma di tre vettori paralleli rispettivamente ad $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Conduciamo per D la parallela alla retta OC che incontra il piano individuato da A, B, O in un punto D', risulta

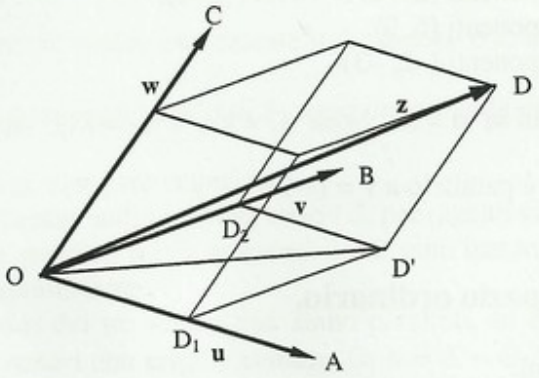
(1) $$\mathbf{z} = D - O = (D - D') + (D' - O).$$

Il vettore $D - D'$ è per costruzione parallelo a $\mathbf{w}$ quindi esiste un opportuno scalare x_3 tale che sia $D - D' = x_3\mathbf{w}$.
Il vettore $D' - O$ è, per costruzione, complanare con $A - O$ e $B - O$ quindi procedendo come nella dimostrazione della proprietà 1.2.4 è possibile esprimerlo come somma di due vettori paralleli ad $A - O$ e $B - O$ conducendo per D' la parallela ad OB ed indicando con D_1 la sua intersezione con la retta OA e conducendo per D' la parallela ad OA ed indicando con D_2 la sua intersezione con la retta OB: $D' - O = (D' - D_1) + (D' - D_2)$.
$D' - D_2$ è parallelo ad $\mathbf{u}$ quindi si può esprimere come $x_1\mathbf{u}$ per un opportuno x_1 reale,

$D' - D_1$ è parallelo a $\mathbf{v}$ quindi si può esprimere come $x_2\mathbf{v}$ per un opportuno x_2 reale.
Sostituendo nella relazione precedente risulta $D' - O = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$; sostituendo ancora tale eguaglianza nella (1) si ottiene:

$$\mathbf{z} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w}.$$

Il quarto vettore si esprime come combinazione lineare degli altri tre e quindi quattro vettori sono linearmente dipendenti.
Se tre vettori, ad esempio $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, sono complanari, per la proprietà 1.3.1 sono linearmente dipendenti ed ogni soprainsieme di $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è formato da vettori l.d.



Poiché per la proprietà 1.3.2, considerati in S_3 tre qualunque vettori non complanari, ogni vettore di S_3 si può esprimere come loro combinazione lineare, si dà la seguente:

DEFINIZIONE 1.3.1 - *Si dice* ***base*** *dello spazio vettoriale S_3 ogni terna ordinata $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di vettori linearmente indipendenti.*

Come per S_2, introdotta nello spazio vettoriale S_3 una base, ogni vettore di S_3 si può scrivere in un unico modo come combinazione lineare dei vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$

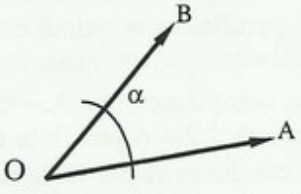
e le espressioni in componenti delle operazioni di spazio vettoriale, risultano:
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 + v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{e}_3$,
$\lambda\mathbf{u} = \lambda(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) = \lambda u_1\mathbf{e}_1 + \lambda u_2\mathbf{e}_2 + \lambda u_3\mathbf{e}_3$.

Se ad esempio $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$ risulta $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$ e scelto $\lambda = -3$ si ottiene $\lambda\mathbf{u} = -3(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3) = -6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3$.

1.3.2 - Angolo di due vettori non nulli.

Fissato un arbitrario punto O e considerati i vettori $\mathbf{u} = A - O$ e $\mathbf{v} = B - O$, l'angolo $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ è l'angolo convesso (eventualmente piatto) delle semirette AO, OB.

$0 \le \alpha \le \pi$



Se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = \pi$ i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli, se $\alpha = \pi/2$ i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali.

1.3.3 - Prodotto scalare.

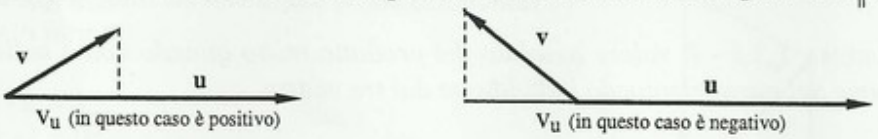
DEFINIZIONE 1.3.2 - *Considerati due vettori* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *di* S_3 *si dice* ***prodotto scalare*** *di* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$, *e si indica* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, *il* ***numero reale*** *che si ottiene moltiplicando il prodotto dei moduli dei vettori per il coseno del loro angolo:*

(1) $$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

Tale numero è zero se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ossia se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali. Questo fatto si esprime dicendo:

Condizione necessaria e sufficiente affinché due vettori $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *siano ortogonali è che* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Se si considerano le proiezioni ortogonali di segmenti su una retta orientata dotati di segno, allora il prodotto scalare è semplicemente il prodotto della norma del primo vettore per la proiezione con segno del secondo vettore sul primo, che indichiamo con v_u: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, v_u$.



V_u (in questo caso è positivo) V_u (in questo caso è negativo)

Se $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ la formula (1) diventa $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{u}\| = (\|\mathbf{u}\|)^2$ ossia la norma di un vettore $\mathbf{u}$ è la radice quadrata del numero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

Inoltre se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono diversi dal vettore nullo si ha $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$.

PROPRIETÀ 1.3.3 - *Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:*

i) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$;

ii) $(\lambda \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot (\lambda \boldsymbol{v})$;

iii) $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$;

iv) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$ *e vale zero se e solo se* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

In Geometria 2 si proverà che il prodotto scalare è un esempio di forma bilineare simmetrica definita positiva. Uno spazio vettoriale in cui è definita una forma bilineare simmetrica definita positiva si dice **spazio vettoriale euclideo**.

1.3 4 - Il prodotto vettoriale o prodotto esterno di due vettori dello spazio S_3.

Consideriamo i vettori dello spazio S_3 e introduciamo, oltre a quelle già viste per i vettori del piano, un'ulteriore operazione.

DEFINIZIONE 1.3.4 - *Dati due vettori* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *di* S_3 *si dice loro* ***prodotto vettoriale*** *od* ***esterno*** *un vettore, che si indica* $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$, *e si legge* $\boldsymbol{u}$ *vettore* $\boldsymbol{v}$ *oppure* $\boldsymbol{u}$ *esterno* $\boldsymbol{v}$, *così definito:*
se i vettori sono paralleli, in particolare uno è il vettore nullo: $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$;
se $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *non sono paralleli:*
- $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ *è ortogonale sia ad* $\boldsymbol{u}$ *che a* $\boldsymbol{v}$;
- *il modulo di* $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ *è* $\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \, sen(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$;
- *il verso è quello indicato in figura, ossia è il verso piedi-testa dell'uomo che posto sul piano individuato da* $\boldsymbol{u} = B - A$ *e* $\boldsymbol{v} = C - A$, *vede la minima rotazione di* $\boldsymbol{u}$ *per sovrapporsi a* $\boldsymbol{v}$ *avvenire in senso antiorario.*

Si verifica facilmente che il modulo di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ rappresenta l'area del parallelogramma di lati consecutivi due rappresentanti di **u** e **v**.

PROPRIETÀ 1.3.4 - *Per il prodotto vettoriale valgono le seguenti proprietà:*

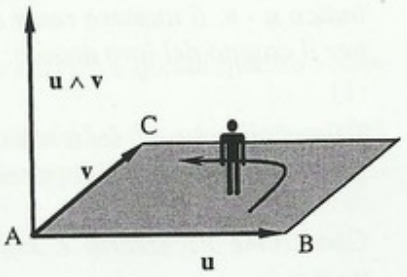
i) $(u + u') \wedge v = u \wedge v + u' \wedge v$;

ii) $u \wedge (v + v') = u \wedge v + u \wedge v'$;

iii) $(\lambda u) \wedge v = u \wedge (\lambda v) = \lambda(u \wedge v)$ *ove* λ *è un numero reale;*

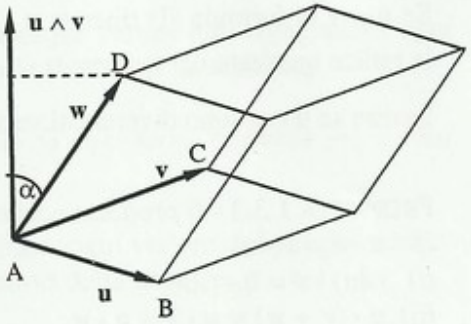
iv) $u \wedge v = -v \wedge u$;

v) $u \wedge u = 0$.



DEFINIZIONE 1.3.5 - *Considerati tre vettori* x, y, z *di* S_3 *si definisce* ***prodotto misto*** *dei tre vettori è il numero reale* $(x \wedge y) \cdot z$ *e poiché l'ordine in cui vengono eseguite le operazioni è solo quello indicato, si scrive semplicemente* $x \wedge y \cdot z$.

TEOREMA 1.3.1 - *Il valore assoluto del prodotto misto quando non è nullo, rappresenta il volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori.*



Dimostrazione. Se $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - A$ e $\mathbf{w} = D - A$ sono tre vettori non complanari, ossia che non hanno rappresentanti su uno stesso piano, individuano un parallelepipedo avente come base il parallelogramma di lati **u** e **v**, la cui area è il modulo del vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e come altezza relativa a tale base il valore assoluto della proiezione del vettore **w** su $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.
Quindi $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ rappresenta, a meno del segno, il volume del parallelepipedo.

OSSERVAZIONE - Il volume del tetraedro individuato da tre vettori è 1/6 del valore assoluto del loro prodotto misto.

PROPRIETÀ 1.3.5 - *Se almeno uno dei tre vettori è nullo il loro prodotto misto è nullo.*
Se i tre vettori sono complanari il loro prodotto misto è nullo.

Dimostrazione - Per definizione $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a **u** ed a **v**. Se **w** è complanare con **u** e **v** risulta ortogonale ad $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ quindi il loro prodotto scalare è zero.

1.3.5 - Espressioni in componenti.

Introdotta nello spazio vettoriale S_2 una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, e considerati i vettori:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 \,, \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$$

è possibile esprimere il loro prodotto scalare in componenti:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) = u_1v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + u_1v_2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2v_1\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2.$$

Per semplificare tale espressione del prodotto scalare in componenti è opportuno scegliere una base particolare, detta **base ortonormale**, formata da due versori fra loro ortogonali

$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. In questa ipotesi si ha $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, da cui:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) = u_1v_1 + u_2v_2$$

Due vettori sono ortogonali se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, quindi in una base ortonormale sono ortogonali se $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$. Ad esempio $\mathbf{u} = (-1, 2)$ è ortogonale a $\mathbf{v} = (4, 2)$.

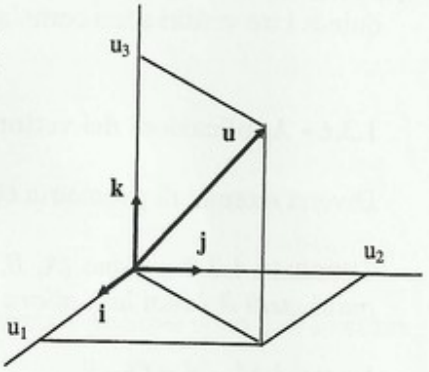
Analogamente, introdotta nello spazio vettoriale S_3 una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, e considerati i vettori $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ è possibile esprimere il loro prodotto scalare in componenti:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) = u_1v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + u_1v_2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_1v_3\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + u_2v_1\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2v_3\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 + u_3v_1\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 + u_3v_2\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 + u_3v_3\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3$.

Anche in questo caso per ottenere un'espressione più semplice del prodotto scalare si introduce una base opportuna.

DEFINIZIONE 1.3.6 - *$\{i, j, k\}$ è una **base ortonormale positiva** per S_3 se i, j, k sono versori a due a due ortogonali cioè, espresso in formule:*

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1;$$
$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0;$$
$$i \wedge j = -j \wedge i = k;$$
$$j \wedge k = -k \wedge j = i;$$
$$k \wedge i = -i \wedge k = j.$$



Considerati due vettori qualsiasi nella base ortonormale:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

utilizzando le proprietà del prodotto scalare si ha:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

ESEMPIO 1.3.1 - Se $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ il loro prodotto scalare risulta:
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 1 + 2 + (-3)(-1) = 6.$

Esprimendo i vettori nella base ortonormale è anche possibile ottenere un'espressione semplice del prodotto vettoriale in componenti:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \wedge (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

che possiamo scrivere, con abuso di scrittura, come sviluppo del determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

ESEMPIO 1.3.2 - Se $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ il loro prodotto vettoriale risulta:
$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (-1 + 6)\mathbf{i} + (-3 + 1)\mathbf{j} + (2 - 1)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$

Il **prodotto misto** di tre vettori $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ è il numero reale $(\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$.
In una base ortonormale positiva è lo sviluppo del determinante delle componenti.
Infatti posto $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$, utilizzando le proprietà del prodotto scalare si ha:

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$

ossia lo sviluppo del determinante del terzo ordine:

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Il valore assoluto del prodotto misto, quando non è nullo, rappresenta il volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori (Teorema 1.3.1); da tale significato geometrico seguono diverse proprietà dei determinanti del terzo ordine, ma non tutte.
Ad esempio che il valore di un determinante non cambia se si scambiano ordinatamente le righe con le colonne va verificato in altro modo, ad esempio direttamente con il calcolo.

ESEMPIO 1.3.3 - Verificare che i seguenti tre vettori sono complanari:
$\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
Poiché si ha $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = 0$ il volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori è nullo, quindi i tre vettori sono complanari, ossia l.d.

1.3.6 - Applicazioni dei vettori alla geometria elementare ed alla trigonometria.

Diversi teoremi di geometria elementare si possono giustificare coi vettori, per esempio:

TEOREMA 1.3.2 - *Siano (A, B, C, D) un quadrilatero convesso qualsiasi ed M, N, P, Q i punti medi dei suoi lati, allora (M, N, P, Q) è un parallelogramma.*

La tesi è $M - N = Q - P$.
Ma $M - B = (A - B)/2$ $N - B = (C - B)/2$ per cui $M - N = (A - C)/2$.
Analogamente si prova che $Q - P = (A - C)/2$.

TEOREMA 1.3.3 (Teorema di Carnot) - *In un triangolo qualunque il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due, diminuita del doppio prodotto di questi per il coseno dell'angolo da essi compreso.*

Dimostrazione - Sia (A,B,C) un triangolo qualsiasi. Posto $\mathbf{u} = B - A$ e $\mathbf{v} = C - A$ risulta $B - C = \mathbf{u} - \mathbf{v}$; il teorema segue dalle uguaglianze:

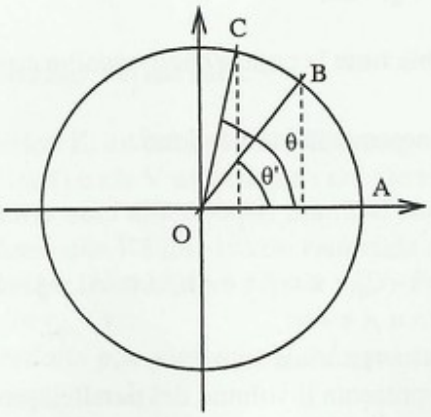
$$(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

DEFINIZIONE 1.3.7 - *Dicesi baricentro di n punti $P_1, P_2, \ldots, P_n$ di S_3 il punto G tale che* $G - O = \frac{1}{n}[(P_1 - O) + \ldots + (P_n - O)]$ *dove O è un punto arbitrario.*

Per n = 2 il baricentro di due punti A e B è il punto medio del segmento AB.
Per n = 3 il baricento di tre punti A, B, C è il punto di incontro delle mediane del triangolo ABC.

Vediamo anche, ad esempio, come si possa ricavare una delle formule trigonometriche di addizione e sottrazione.
Sul cerchio unitario di centro O si considerino tre punti A, B, C e sia $A - O = \mathbf{i}$. Poniamo l'angolo $AOC = \theta$, l'angolo $AOB = \theta'$: quindi $BOC = \theta - \theta'$. Risulta:
$B - O = \cos\theta'\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\theta'\,\mathbf{j}$
$C - O = \cos\theta\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\theta\,\mathbf{j}$
Per la definizione di prodotto scalare:

$(B - O) \cdot (C - O) = (1)\,(1)\cos(BOC) = \cos(\theta - \theta')$.
Esprimendo il prodotto scalare in componenti si ha:
$(B - O) \cdot (C - O) = \cos\theta\cos\theta' + \text{sen}\theta\,\text{sen}\theta'$.
da cui: $\cos(\theta - \theta') = \cos\theta\cos\theta' + \text{sen}\theta\,\text{sen}\theta'$.



1.4 - Esercizi proposti.

I.1 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E}_3$, rispetto ad una base ortonormale positiva sono dati i vettori $\mathbf{u}(1, -1, 2)$ e $\mathbf{v}(3, 2, -1)$. Verificare che:
i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -1$;
ii) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{6}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{14}$;
iii) $(2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - 3\mathbf{v}) = -25$.

I.2 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E}_3$, rispetto ad una base ortonormale positiva, sono dati i vettori $\mathbf{u}(-3, 2, 1)$, $\mathbf{v}(-2, 1, 3)$ e $\mathbf{w}(1, 1, -7)$. Determinare le componenti di un vettore $\mathbf{x}$ che sia perpendicolare ad $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e tale che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 10$. ($\mathbf{x} = (10, 14, 2)$)

I.3 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E}_3$, rispetto ad una base ortonormale positiva sono dati i vettori $\mathbf{u}(1, -1, 0)$ e $\mathbf{v}(0, 1, 2)$. Verificare che:
i) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (-2, -2, 1)$;
ii) $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = 3$;
iii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) = (6, 6, -3)$.

I.4 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E}_3$, rispetto ad una base ortonormale positiva sono dati i vettori $\mathbf{a}(1, -2, 1)$, $\mathbf{b}(3, 0, -1)$ e $\mathbf{c}(1, 1, 0)$. Verificare che:
i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 6$;
ii) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = 12$.

I.5 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E}_3$, rispetto ad una base ortonormale positiva sono dati i vettori $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(0, 1, -2)$ e $\mathbf{c}(2, 0, 3)$. Calcolare:
i) l'area del triangolo di lati $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$; ($s = \sqrt{6}/2$)
ii) il volume con segno del tetraedro di spigoli $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. ($V = 5/6$)

I.6 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E}_3$, rispetto alla base ortonormale positiva $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, sono dati i vettori $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Determinare:
i) il loro prodotto vettoriale ed il loro prodotto scalare; ($\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7$)

ii) i loro moduli; ($\|\mathbf{u}\| = 3$; $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{11}$)

iii) un vettore complanare con $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. ($a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ per ogni a, b reale)

I.7 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E_3}$, rispetto alla base ortonormale positiva $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, sono dati i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$;

i) calcolare $(\mathbf{u} - 3\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$; (3)

ii) trovare un vettore che abbia tutte le componenti eguali e come modulo il modulo di $\mathbf{u}$; ($\mathbf{x} = \pm\sqrt{2}\,(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$)

iii) dire se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti. (si)

I.8 - Nello spazio S_3 dei vettori ordinari, rispetto alla base ortonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sono dati i vettori:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 3\,\mathbf{i} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

i) calcolare il prodotto misto $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$; ($\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2$)

ii) calcolare il doppio prodotto vettoriale $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$; ($(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$)

iii) provare che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ rappresenta il volume del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

I.9 - Nello spazio S_3 dei vettori ordinari, rispetto alla base ortonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ considerati i vettori: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$ determinare il volume del tetraedro avente spigoli $\mathbf{u}$, $2\mathbf{v}$ e $3\mathbf{w}$. (0)

I.10 - Nello spazio S_3 dei vettori ordinari, rispetto alla base ortonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ considerati i vettori: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ determinare un vettore ortogonale ad $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ed avente modulo 2. $\left(\pm\frac{2\sqrt{11}}{11}(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})\right)$

I.11 - Nello spazio S_3 dei vettori ordinari, rispetto alla base ortonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sono dati i vettori :

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 3\,\mathbf{i} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

i) calcolare $(\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$; (17)

ii) determinare un vettore ortogonale ad $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ed avente modulo uguale al modulo di $\mathbf{w}$.

$$\left(\pm\sqrt{\frac{3}{116}}(-8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k})\right)$$

CAPITOLO II

SPAZI VETTORIALI

2.1 - Definizione di spazio vettoriale.

Fissiamo un campo numerico K, ad esempio K = **R** (campo dei numeri reali) oppure K = **C** (campo dei numeri complessi) e sia V un insieme i cui elementi denotiamo con $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,....

DEFINIZIONE 2.1.1 - *Diciamo che V è uno* ***spazio vettoriale*** *su K se in V sono date:*
- un'operazione, detta ***somma****, che ad ogni coppia v_1, v_2 di elementi di V associa un unico elemento di V denotato con $v_1 + v_2$;*
- un'operazione, detta ***prodotto per scalare****, che ad ogni coppia $\lambda \in K$ e $v \in V$ associa un unico elemento di V denotato con λv.*
Le due operazioni devono soddisfare i seguenti assiomi:
(I) $\{V, +\}$ è un gruppo commutativo, cioè:
I_1 - per ogni scelta di v_1 e v_2 in V si ha: $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (proprietà commutativa);
I_2 - per ogni scelta di v_1, v_2 e v_3 in V si ha: $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ (proprietà associativa);
I_3 - esiste un elemento $\mathbf{0}$ in V tale che $v + \mathbf{0} = v$ per ogni $v \in V$;
I_4 - per ogni $v \in V$ esiste v' (oppposto di v) tale che $v + v' = \mathbf{0}$.
(II) la legge di prodotto per scalari gode delle seguenti proprietà, per ogni scelta di λ e μ in K e per ogni scelta di v_1, v_2 e v in V:
II_1 - $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$;
II_2 - $(\lambda + \mu)\, v = \lambda v + \mu v$;
II_3 - $(\lambda\mu)\, v = \lambda(\mu v)$;
II_4 - $1v = v$, dove 1 è l'unità moltiplicativa di K.
Gli elementi di K vengono detti **scalari**, gli elementi di V vengono detti **vettori**.

Vediamo ora alcuni esempi di spazi vettoriali.

ESEMPIO 2.1.1 - L'insieme dei vettori del piano (dello spazio), definiti come classi di segmenti orientati equipollenti, con le operazioni di somma di vettori e prodotto di un numero reale per un vettore definite in 1.2.3 e 1.2.4 (nel § 1.3), è uno spazio vettoriale sui reali che viene indicato con S_2 (S_3).

ESEMPIO 2.1.2 - Sia $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ ($n \geq 1$) l'insieme delle n-ple di numeri reali.
La somma di due elementi di $\mathbf{R}^n$ è definita da:

$$(a_1,\ldots, a_n) + (b_1,\ldots, b_n) = (a_1 + b_1,\ldots, a_n + b_n).$$

Il prodotto di un numero reale λ per un elemento di $\mathbf{R}^n$ è definito da:

$$\lambda(a_1,\ldots, a_n) = (\lambda a_1,\ldots, \lambda a_n).$$

Si verifica che $\mathbf{R}^n$ rispetto alle operazioni sopra definite è uno spazio vettoriale su **R** che viene detto **esempio fondamentale**.

ESEMPIO 2.1.3 - Sia $\mathbf{R}_n[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale ad n con le usuali operazioni di somma di polinomi e di prodotto di un reale per un polinomio. Si verifica che $\mathbf{R}_n[x]$ è uno spazio vettoriale su **R**.
Se si considera invece l'insieme dei polinomi di grado n rispetto alle stesse operazioni, non

si ottiene uno spazio vettoriale in quanto, ad esempio, manca il polinomio nullo.

DEFINIZIONE 2.1.2 - *Un sottoinsieme non vuoto V' di uno spazio vettoriale V si dice* ***sottospazio vettoriale*** *di V se è, a sua volta, spazio vettoriale per le restrizioni delle operazioni di V a V'.*

Esistono due criteri equivalenti per stabilire quando un sottoinsieme non vuoto è un sottospazio.

PROPRIETÀ 2.1.1 - **I° criterio.**
V' è un sottospazio di V se è chiuso rispetto alle due operazioni. Ossia:
1) $\forall \boldsymbol{u} \in V' \ e \ \forall \boldsymbol{v} \in V' \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V'$;
2) $\forall \boldsymbol{u} \in V' \ e \ \forall \lambda \in \boldsymbol{R} \Rightarrow \lambda \boldsymbol{u} \in V'$.
Si osservi che la 2) implica che $0\mathbf{u} = \mathbf{0} \in V'$ e che $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \in V'$.
Tutte le altre proprietà della definizione di spazio vettoriale sono verificate anche in V' in quanto proprietà di tipo universale.

PROPRIETÀ 2.1.2 - **II° criterio.**
V' è un sottospazio di V se: $\forall \boldsymbol{u} \in V', \ \forall \boldsymbol{v} \in V' \ e \ \forall \alpha \in \boldsymbol{R}, \ \forall \beta \in \boldsymbol{R} \Rightarrow \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} \in V'$.

Per la verifica dell'equivalenza dei due criteri si veda Quaderno #38 Esercizio 1.16.

ESEMPIO 2.1.4 - L'insieme formato dal solo vettore nullo è sottospazio vettoriale di qualsiasi spazio vettoriale; per verificarlo basta usare uno dei due criteri.

ESEMPIO 2.1.5 - Il sottoinsieme H di $\mathbf{R}^4$ formato dalle quaterne del tipo $(a_1, a_2, 0, 0)$ è sottospazio vettoriale. Infatti usando il I° criterio si ha:
$(a_1, a_2, 0, 0) + (b_1, b_2, 0, 0) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 0, 0) \in H$,
$\lambda(a_1, a_2, 0, 0) = (\lambda a_1, \lambda a_2, 0, 0) \in H$.
Non è sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$ il sottoinsieme K delle quaterne $(a_1, 1, 0, 0)$ in quanto non contiene il vettore nullo.

Tenendo conto dei criteri visti si dimostra facilmente la:

PROPRIETÀ 2.1.3 - *L'intersezione insiemistica di due sottospazi H e K di V è supporto di un sottospazio di V.*

DEFINIZIONE 2.1.3 - *Due sottospazi H e K di V si dicono disgiunti se* $H \cap K = \{0\}$.

Invece l'unione insiemistica di due sottospazi non è, in generale, un sottospazio.

ESEMPIO 2.1.6 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ siano H il sottospazio vettoriale delle quaterne $(0, a_2, a_3, 0)$ e K il sottospazio vettoriale delle quaterne $(a_1, 0, 0, a_4)$. La loro unione insiemistica contiene gli elementi (0, 1, 2, 0) e (2, 0, 0, 3) ma non (0, 1, 2, 0) + (2, 0, 0, 3) = = (2, 1, 2, 3) e quindi non è un sottospazio.

PROPRIETÀ 2.1.4 - *Siano H e K due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Il sottoinsieme S i cui elementi sono del tipo* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ *al variare di* $\boldsymbol{x}$ *in H e di* $\boldsymbol{y}$ *in K è un sottospazio vettoriale di V che si dice* ***sottospazio somma*** *di H e K e si indica con* $S = H + K$.

Per la dimostrazione si veda Quaderno #38 Esercizio 1.15.

2.2 - Dipendenza ed indipendenza lineare. Basi e dimensione.

Le nozioni di dipendenza ed indipendenza lineare definite per i vettori di S_2 ed S_3 si generalizzano ad un qualunque spazio vettoriale V su R mediante la:

DEFINIZIONE 2.2.1 - *Siano $v_1,\ldots, v_m$ m vettori di uno spazio vettoriale V su **R** (campo dei numeri reali) ed $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ m numeri reali: il vettore*

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$$

*si dice **combinazione lineare** (in breve c.l.) dei vettori $v_1,\ldots, v_m$ con coefficienti $\alpha_1,\ldots, \alpha_m$.*

Fissati m vettori di V, $\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_m$ l'insieme dei vettori loro combinazioni lineari è un sottospazio vettoriale F di V che viene anche indicato con $L < \mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_m >$.
$L < \mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_m >$ non dipende dall'ordine con cui si considerano i vettori per la proprietà commutativa della somma.

DEFINIZIONE 2.2.2 - *Un insieme di vettori $\{v_1,\ldots, v_m\}$ si dice un sistema di **generatori** di V se ogni vettore **u** di V è c.l. di $v_1,\ldots, v_m$.*

DEFINIZIONE 2.2.3 - *Sia V uno spazio vettoriale. Un sistema di vettori $\{v_1,\ldots, v_p\}$ si dice **linearmente dipendente** o **legato** (brevemente l.d.) se esiste una combinazione lineare con scalari $\alpha_1,\ldots, \alpha_p$ non tutti nulli che dà il vettore nullo:*

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_p\mathbf{v}_p.$$

In questo caso i vettori $v_1,\ldots, v_p$ sono detti l.d.
*Un sistema di vettori $\{v_1,\ldots, v_p\}$ si dice **linearmente indipendente** o **libero** (brevemente l.i.) se l'unica combinazione lineare dei vettori $v_1,\ldots, v_p$ che dà il vettore nullo è quella con gli scalari tutti nulli. In tal caso i vettori $v_1,\ldots, v_p$ sono detti l.i.*

Valgono le seguenti proprietà:
- se uno dei p vettori $\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_p$ è il vettore nullo, i vettori sono l.d., come prova la relazione
$$\mathbf{0} = 0\,\mathbf{v}_1 + \ldots\ldots + 1\,\mathbf{0} + \ldots\ldots + 0\,\mathbf{v}_p;$$
- i vettori $\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_p$ sono l.d. se e solo se uno di essi è esprimibile come c.l. dei rimanenti;
- se il sistema di vettori $\{\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_p\}$ è l.d. anche ogni suo soprainsieme lo è;
- un vettore **v** non nullo è l.i.;
- se il sistema di vettori $\{\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_p\}$ è l.i. nessuno dei vettori è nullo;
- se il sistema di vettori $\{\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_p\}$ è l.i. anche ogni suo sottoinsieme lo è.

DEFINIZIONE 2.2.4 - *Sia V uno spazio vettoriale. Diciamo che l'insieme ordinato di vettori $v_1,\ldots, v_n$ forma una **base** di V se i vettori formano un sistema di generatori ed inoltre sono l.i.*

TEOREMA 2.2.1 - *Un sistema di vettori $\{v_1,\ldots, v_n\}$ di uno spazio vettoriale V è una base di V se e solo se ogni vettore v di V si scrive in modo unico come c.l. di $\{v_1,\ldots, v_n\}$.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $\{\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_n\}$ sia una base di V e proviamo che ogni vettore **v** di V si scrive in modo unico come c.l. di $\{\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_n\}$.
Se **v** avesse due scritture: $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x'_n\mathbf{v}_n$ si avrebbe
$(x_1 - x'_1)\mathbf{v}_1 + (x_2 - x'_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (x_n - x'_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.
Poiché $\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella a coefficienti tutti 0. Ne segue che $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2,\ldots, x_n = x'_n$.

Viceversa se ogni vettore $\mathbf{v}$ di V si scrive in modo unico come c.l. di $\{\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_n\}$ è immediato che $\{\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_n\}$ sia un sistema di generatori.
Inoltre esprimendo il vettore nullo mediante $\{\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_n\}$ si ha:

$$\mathbf{0} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 +\ldots+ x_n\mathbf{v}_n = 0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_n.$$

Per l'unicità della scrittura deve essere $x_1 = 0$, $x_2 = 0,\ldots, x_n = 0$ e quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

DEFINIZIONE 2.2.5 - *Se $\{\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base di uno spazio vettoriale V l'espressione:*

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 +\ldots+ x_n\mathbf{e}_n$$

è detta ***decomposizione*** *del vettore rispetto alla base.*

Gli scalari sono univocamente determinati dal vettore e si dicono **componenti** rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_n\}$.

OSSERVAZIONE - Il vettore nullo ha componenti (0, 0,..., 0). Il vettore $\mathbf{e}_1$ ha componenti (1, 0,..., 0) nella base $\{\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_n\}$ infatti si ha:

$$\mathbf{e}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 +\ldots+ 0\mathbf{e}_n$$

e così $\mathbf{e}_2$ ha componenti (0, 1, 0,..., 0),..., $\mathbf{e}_n$ ha componenti (0,..., 0, 1).

DEFINIZIONE 2.2.6 - *Uno spazio vettoriale V si dice* ***finitamente generato*** *se esiste un numero finito r di vettori $v_1,\ldots, v_r$ tali che $V = L\langle v_1,\ldots, v_r\rangle$.*

Nel seguito supporremo che V sia finitamente generato.
Dimostriamo due teoremi relativi a spazi vettoriali finitamente generati detti rispettivamente *teorema della base incompleta* e *teorema della dimensione* che permettono di dare la definizione di dimensione di uno spazio vettoriale (finitamente generato).

TEOREMA 2.2.2 (della base incompleta) - *Se V è uno spazio vettoriale avente per base $B\{\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_n\}$ e se $\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_r$ $(r \leq n)$ sono r vettori linearmente indipendenti di V, possiamo formare una nuova base di V sostituendo r vettori $\mathbf{e}_i$ con i vettori $\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_r$.*

Dimostrazione - Dimostriamo questo teorema per ricorrenza ed indichiamo con p l'indice variabile: proviamo cioè che il teorema è vero quando p = 1 e che se il teorema è vero per p – 1 vettori è vero anche per p vettori ($p \leq n$), da questo segue che il teorema è vero per ogni r vettori con $r \leq n$.

Proviamo il teorema per p = 1: consideriamo un solo vettore libero $\mathbf{v}$, cioè non nullo,di V. Il vettore $\mathbf{v}$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori della base B con coefficienti non tutti nulli:

(1) $$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 +\ldots+ x_n\mathbf{e}_n.$$

Supponendo che sia $x_1 \neq 0$, moltiplicando ambo i membri della (1) per x_1^{-1} si ha:

$$x_1^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + x_1^{-1}x_2\mathbf{e}_2 +\ldots+ x_1^{-1}x_n\mathbf{e}_n$$

da cui:

$$\mathbf{e}_1 = x_1^{-1}\mathbf{v} - x_1^{-1}x_2\mathbf{e}_2 -\ldots- x_1^{-1}x_n\mathbf{e}_n.$$

Proviamo che i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_n$ formano una base di V.
Ogni combinazione lineare di $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_n$ è anche combinazione lineare di $\mathbf{v}, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_n$ infatti se $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 +\ldots+ \alpha_n\mathbf{e}_n$, sostituendo ad $\mathbf{e}_1$ l'espressione trovata prima risulta:

$$\mathbf{w} = \alpha_1(x_1^{-1}\mathbf{v} - x_1^{-1}x_2\mathbf{e}_2 -\ldots- x_1^{-1}x_n\mathbf{e}_n) + \alpha_2\mathbf{e}_2 +\ldots+ \alpha_n\mathbf{e}_n =$$
$$= (\alpha_1x_1^{-1})\mathbf{v} + (\alpha_2 - \alpha_1x_1^{-1}x_2)\mathbf{e}_2 +\ldots+(\alpha_n - \alpha_1x_1^{-1}x_n)\mathbf{e}_n.$$

I vettori $\mathbf{v}, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_n$ formano quindi un sistema di generatori di V.
Dimostriamo ora che essi sono linearmente indipendenti, cioè che l'unica loro combina-

zione lineare che dà il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli. Sia:

(2) $$\alpha_1\mathbf{v} + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Se $\alpha_1 \neq 0$ moltiplicando la relazione precedente per α_1^{-1} si ottiene:

$$\mathbf{v} + \alpha_1^{-1}\alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_1^{-1}\alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v} = -\alpha_1^{-1}\alpha_2\mathbf{e}_2 - \ldots - \alpha_1^{-1}\alpha_n\mathbf{e}_n$$

il che è assurdo perché nella (1) $\mathbf{v}$ è espresso nella base B con coefficiente $x_1 \neq 0$ rispetto ad $\mathbf{e}_1$ e la decomposizione di un vettore in una base è unica. Deve quindi essere $\alpha_1 = 0$ e sostituendo nella (2) risulta: $\alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ che è una combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti. Essa dà il vettore nullo solo se tutti i coefficienti sono nulli: $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ quindi, in definitiva, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ ed i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ sono linearmente indipendenti ed essendo anche generatori formano una base di V.

Supponiamo ora che il teorema sia vero per $p - 1$ vettori e proviamolo per p vettori ($p \leq n$). Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ p vettori linearmente indipendenti di V. Applicando il teorema ai primi p−1 vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}$, che sono linearmente indipendenti, esistono $n - (p - 1)$ cioè $n - p + 1$ vettori opportunamente scelti nella base B, supponiamo per semplicità che siano $\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$, tali che $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ formino una base per V.
In particolare il vettore $\mathbf{v}_p$ si può esprimere come loro combinazione lineare:

(3) $$\mathbf{v}_p = y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_{p-1}\mathbf{v}_{p-1} + y_p\mathbf{e}_p + y_{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \ldots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Ma $\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_p$ sono linearmente indipendenti quindi $\mathbf{v}_1$ non è combinazione lineare di $\mathbf{v}_2, .., \mathbf{v}_p$ e perciò $y_p\mathbf{e}_p + y_{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \ldots + y_n\mathbf{e}_n \neq \mathbf{0}$.
Poiché anche questi vettori sono linearmente indipendenti almeno uno degli scalari $y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n$ è non nullo: supponiamo ad esempio che sia $y_p \neq 0$ e procediamo come nel caso p = 1. Moltiplicando ambo i membri della (3) per y_p^{-1} si ricava:
$\mathbf{e}_p = y_p^{-1}\mathbf{v}_p - y_p^{-1}(y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_{p-1}\mathbf{v}_{p-1} + y_{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \ldots + y_n\mathbf{e}_n)$.
Ogni vettore combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ è anche combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$.
Infatti $\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_{p-1}\mathbf{v}_{p-1} + \beta_p\mathbf{e}_p + \beta_{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n = \beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_{p-1}\mathbf{v}_{p-1} +$
$+ \beta_p[y_p^{-1}\mathbf{v}_p - y_p^{-1}(y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_{p-1}\mathbf{v}_{p-1} + y_{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \ldots + y_n\mathbf{e}_n)] + \beta_{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n =$
$(\beta_1 - \beta_p y_p^{-1} y_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (\beta_{p-1} - \beta_p y_p^{-1} y_{p-1})\mathbf{v}_{p-1} + \beta_p y_p^{-1}\mathbf{v}_p + (\beta_{p+1} - \beta_p y_p^{-1} y_{p+1})\mathbf{e}_{p+1} +$
$\ldots + (\beta_n - \beta_p y_p^{-1} y_n)\mathbf{e}_n$
quindi $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ formano un sistema di generatori di V.
Come nel caso p = 1 si dimostra che $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ sono linearmente indipendenti e formano quindi una base di V. Ciò prova il teorema nel caso generale.

TEOREMA 2.2.3 (della dimensione) - *Sia V uno spazio vettoriale in cui esiste una base composta da n vettori. Allora:*
- n è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di V;
- ogni altra base di V è formata da n vettori.

Dimostrazione
1) Supponiamo per assurdo che esistano in V p vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ con $p > n$. Il sottoinsieme formato dai vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ è costituito da vettori linearmente indipendenti e per il teorema 2.2.2 formano una base di V. Possiamo allora esprimere il vettore $\mathbf{v}_{n+1}$ in tale base come:

$$\mathbf{v}_{n+1} = y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_n\mathbf{v}_n$$

il che è assurdo perché i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \ldots, \mathbf{v}_p$ sono linearmente indipendenti e quindi uno non è combinazione lineare degli altri.

2) Detta $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ la base di V data, sia $\{\mathbf{f}_1, .., \mathbf{f}_m\}$ un'ulteriore base di V. I vettori $\mathbf{f}_1, .., \mathbf{f}_m$

sono linearmente indipendenti e per quanto provato al punto 1) deve essere $m \leq n$.
Considerando ora come base data in V $\{\mathbf{f}_1,.., \mathbf{f}_m\}$ scegliendo come ulteriore base $\{\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_n\}$ con ragionamento analogo risulta $n \leq m$ quindi $n = m$ e tutte le basi sono formate dallo stesso numero di vettori.

DEFINIZIONE 2.2.6 - *Si dice* ***dimensione*** *di uno spazio vettoriale V finitamente generato il numero n di vettori che ne costituiscono una qualunque base.*

Per indicare che la dimensione di V è n si scrive $\dim V = n$ oppure V_n.
Se $V = \{\mathbf{0}\}$ si pone $\dim V = 0$.

OSSERVAZIONE 1 - La dimensione n di V è anche il massimo numero di vettori l.i. di V per il teorema 2.2.3.

OSSERVAZIONE 2 - In vari esercizi è nota la dimensione n dello spazio V. In tal caso per decidere se n vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,\ldots, \mathbf{u}_n$ costituiscono una base di V basta verificare se gli n vettori sono l.i. oppure se generano V, perché una proprietà implica l'altra.

ESEMPIO 2.2.1 - Lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$ ha dimensione n ed una sua base è formata dalle n-ple: (1, 0, 0,..., 0), (0, 1, 0,..., 0), ..., (0, 0,..., 0, 1).

ESEMPIO 2.2.2 - Lo spazio vettoriale $\mathbf{R}_n[x]$ ha dimensione n + 1 e una sua base è formata dai polinomi: $1, x, x^2,\ldots, x^n$.

2.3 - Esercizi proposti.

II.1 - In $\mathbf{R}^3$ sono dati i vettori: **a**(2, 1, 2), **b**(1, 1, –1), **c**(0, –1, 4):
i) provare che **a** e **b** sono linearmente indipendenti;
ii) provare che **a**, **b** e **c** sono linearmente dipendenti. (**c** = **a** – 2**b**)

II.2 - Dire se i seguenti vettori dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$ sono linearmente indipendenti oppure linearmente dipendenti:
i) **u** = (1, 2, –3), **v** = (–1, 1, 2), **w** = (0, 3, –1); (linearmente dipendenti **w** = **u** + **v**)
ii) **u** = (0, 1, 1), **v** = (2 ,1, 1), **w** = (1, 2, 3); (linearmente indipendenti)
iii) **u** = (1, 2, 0), **v** = (1, –1, 3), **w** = (0, 2, 0), **t** = (8, 5, 7). (linearmente dipendenti)

II.3 - Dire se i seguenti vettori dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^4$ sono linearmente indipendenti oppure linearmente dipendenti:
i) **u** = (0, –1, 2, 3), **v** = (0, –3, 6, 9); (linearmente dipendenti **v** = 3**u**)
ii) **u** = (1,–2, 1, 1), **v** = (0, 1, 2, 3), **w** = (–1, 0, 2, 0). (linearmente indipendenti)

II.4 - Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^2$ sono dati i vettori **u** = (1, 2) e **v** = (a, 1) dove a è un numero reale; dire per quali valori di a **u** e **v** sono linearmente indipendenti. ($a \neq 1/2$)

II.5 - Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$ stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$:
i) $F = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) / x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$; (si)
ii) $G = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) / 2x_1 + x_3 - 1 = 0\}$; (no)
iii) $H = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0\}$. (no)

II.6 - Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^4$ si considerino i sottoinsiemi:

i) $F = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ e } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$;

ii) $G = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 = x_2 \text{ e } x_3 = -x_4\}$.

Dimostrare che sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^4$.

Determinare una base e la dimensione di F e G. (dim F = 2, base ((1, 0, −1, 0),(0, 1, 0, −1))
(dim G = 2, base ((1, 1, 0, 0),(0, 0, 1 ,−1))

II.7 - Nello spazio vettoriale E_3, rispetto alla base canonica $B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sono dati i vettori: $\mathbf{a}(1, 2, -1)$, $\mathbf{b}(2, 3, 1)$, $\mathbf{c}(0, -1, 4)$.

Determinare i numeri reali r,s,t in modo che il vettore $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ sia:

i) eguale ad $\mathbf{e}_1$; (r = −13, s = 7, t = −5)

ii) parallelo al vettore $\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. (r = −25k, s = 14k, t = −10k $\forall k \in \mathbf{R}$)

II.8 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[t]$ dei polinomi di grado minore od uguale a 3 a coefficienti reali su $\mathbf{R}$ con le consuete operazioni si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$A = \{p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 / p_2 = p_1 + p_3, p_0 = 0\}$

$B = \{p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 / p_1 = 2p_0, p_3 = p_2 + 1\}$.

i) Quale tra A e B è un sottospazio vettoriale? (A)

ii) Considerato il sottospazio vettoriale trovato, individuarne una base e la dimensione; (dim A = 2)

iii) costruire una base di $\mathbf{R}_3[t]$ contenente i polinomi della base scelta per il sottospazio.

II.9 - Dati in $\mathbf{R}^4$ i sottospazi vettoriali:

$H = \{(x, y, z, t) / 2x - z = 0, y = 0\}$ e $K = L\langle(0, 2, 1, -1), (1, -2, 1, 1), (1, 0, 2,0)\rangle$:

i) determinare una base e la dimensione di H; ($B_H = \{(1, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 1)\}$; dim H = 2)

ii) determinare una base e la dimensione di K; ($B_K = \{(0, 2, 1, -1), (1, -2, 1, 1)\}$; dim K = 2)

iii) determinare una base e la dimensione di $H \cap K$; ($B_{H\cap K} = \{(1, 0, 2, 0)\}$; dim $H\cap K$ = 1)

iv) determinare una base e la dimensione di H + K.
($B_{H+K} = \{(0, 0, 0, 1), (0, 2, 1, -1), (1, -2, 1, 1)\}$; dim H + K = 3)

II.10 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ dire se i seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti e se formano una base di $\mathbf{R}^4$:

$A = \{(1, 2, 0, -1), (0, 0, 0, 0), (3, 1, 0, 2), (2, 1, 0, 3)\}$ (lin. dip.; no base)

$B = \{(0, -1, -1, 0), (1, 0, 0, 0), (2, 3, 1, 2), (-1, 0, 1, 1)\}$ (lin. indip.; base)

$C = \{(0, 1, 5 ,3), (2, 0, 0, 0), (0, 0, 0, -3), (0, 2, 0, 0), (0, 0, -1, 0)\}$ (lin. dip.; no base)

$D = \{(0, 1, 0, 2), (1, 2, 0, -3), (2, 0, 0, 0)\}$ (lin. indip.; no base)

Determinare la dimensione ed una base del sottospazio:

$H = L\langle(1, 0, 1, 0), (-2, 0, 2, -1), (-3, 0, -3, 0), (3, 0, -1, 1)\rangle$.
($B_H = \{(1, 0, 1, 0), (-2, 0, 2, -1)\}$; dim H = 2)

II.11 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_2[t]$ dei polinomi di grado minore od uguale a 2 a coefficienti reali su $\mathbf{R}$ con le consuete operazioni si considerino i seguenti sottospazi:

$A = \{p_0 + p_1 t + p_2 t^2 / p_1 = 2p_0 - p_2\}$

$B = L\langle1 + t + t^2, 2 - 3t^2, 2t + 5t^2\rangle$. Determinare:

i) una base e la dimensione di A; ($B_A = \{1 + 2t, -t + t^2\}$, dim A = 2)

ii) una base e la dimensione di B; ($B_B = \{2 - 3t^2, 2t + 5t^2\}$, dim B = 2)

iii) una base e la dimensione di $A \cap B$; ($B_{A\cap B} = \{1 + t + t^2\}$, dim $A \cap B$ = 1)

iv) una base e la dimensione di A + B. ($B_{A+B} = \{1 + 2t, -t + t^2, 2 - 3t^2\}$, dim A + B = 3)

II.12 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_2[t]$ dei polinomi di grado minore od uguale a 2 a coefficienti reali su $\mathbf{R}$ con le consuete operazioni dire se i seguenti sottoinsiemi sono formati da vettori linearmente indipendenti, se formano un insieme di generatori, se formano una base di $\mathbf{R}_2[t]$:

$A = \{1 + 2t, 3 + t^2, 2 - 2t + t^2\}$ (lin. dip.; no generatori, no base)
$B = \{3 - 2t + t^2, 2 + 3t - t^2, 2 + 4t^2\}$ (lin. indip.; generatori, base)
$C = \{t - 7t^2, \ 2 - t + t^2\}$ (lin. indip.; no generatori, no base)
$D = \{3 + t^2, 4 - 2t + t^2, 1 - 2t - t^2, 1 + t + t^2\}$. (lin. dip.; generatori, no base)

II.13 - Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}_2[t]$ dei polinomi di grado minore o eguale a due a coefficienti reali su $\mathbf{R}$, si consideri il sottoinsieme A formato dai polinomi del tipo:
$at^2 + bt + (a + 2b)$ con a e b reali.

i) provare che A è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[t]$
ii) verificare che i vettori di A: $p_1 = t^2 + t + 3$, $p_2 = t^2 - t - 1$, $p_3 = t^2 + 1$ formano un sistema di generatori di A ed estrarre da tale sistema una base. (base $\{p_1, p_2\}$)

II.14 - Nello spazio S_3 dei vettori ordinari, rispetto alla base ortonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sono dati i vettori: $\mathbf{a}_1 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{a}_3 = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{a}_4 = 5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$:

i) provare che tra essi ve ne sono al più due linearmente indipendenti e trovarne due ortogonali; $(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$
ii) a partire da tali vettori ortogonali costruire una base ortonormale.

$$\left(\left\{\frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{11}}, \frac{\mathbf{a}_2}{\sqrt{10}}, \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|}\right\}\right)$$

II.15 - Nello spazio S_3 dei vettori ordinari rispetto alla base ortonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sono dati i vettori: $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

i) Dire se sono linearmente indipendenti; (no)
ii) dire se generano S_3 od individuare la dimensione del sottospazio da essi generato; (si)
iii) calcolare $(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3) \cdot (3\mathbf{a}_2)$; (15)
iv) costruire il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \wedge 2\mathbf{a}_2$; $(10\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$
v) determinare la dimensione del sottospazio generato da $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\}$. (3)

CAPITOLO III

MATRICI E DETERMINANTI

3.1 - Matrici.

3.1.1 - Definizione di matrice.

Sia **R** il campo dei numeri reali con le consuete operazioni di somma e prodotto.

DEFINIZIONE 3.1.1 - *Si dice **matrice** a coefficienti in **R** una tabella rettangolare del tipo:*

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \| a_{ij} \|$$

dove a_{11}, a_{12},..., a_{mn} sono numeri reali.

Ogni termine che compare in A ha due indici: a_{ij} appartiene alla riga i-esima ed alla colonna j-esima, ad esempio a_{23} indica il termine appartenente alla seconda riga ed alla terza colonna.
Una matrice con m righe ed n colonne (come A) si dice **matrice m × n** o **matrice (m, n)** a coefficienti in **R**.
Le matrici si dicono **quadrate** se n = m, cioè se hanno ugual numero di righe e colonne.
Due matrici $A = \| a_{ij} \|$ e $B = \| b_{ij} \|$ si dicono **uguali** se hanno ordinatamente uguali tutti i loro elementi.

ESEMPIO 3.1.1 - Date le matrici $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & \sqrt{3} & 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & h & 2 \\ 3 & \sqrt{3} & 1 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & \sqrt{3} & 1 \end{Vmatrix}$, si ha che A = B se e solo se h = −1 mentre A e C sono sempre distinte qualunque sia il valore di k.

La matrice **nulla** ha tutti i termini uguali a zero, ad esempio la matrice nulla di tipo (2, 3) è la matrice $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

3.1.2 - Somma di due matrici.

DEFINIZIONE 3.1.2 - Siano $A = \| a_{ij} \|$ e $B = \| b_{ij} \|$ due matrici di tipo (m, n) a coefficienti in **R**. Diciamo **somma di A e B** la matrice $C = \| a_{ij} + b_{ij} \|$ i cui termini sono la somma dei termini aventi la stessa posizione in A ed in B.

Ad esempio $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$ mentre non ha senso sommare le matrici

$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$ e $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & \sqrt{3} & 1 \end{Vmatrix}$ perché non sono dello stesso tipo.

3.1.3 - Prodotto di un numero reale per una matrice.

DEFINIZIONE 3.1.3 - Siano $A = \| a_{ij} \|$ una matrice (m, n) e λ un numero reale. Diciamo **prodotto di λ per A** la matrice $\lambda A = \| \lambda a_{ij} \|$ i cui elementi sono gli elementi di A moltiplicati per λ.

Ad esempio: $5 \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & -5 & 40 \\ 0 & 5\sqrt{3} & 5 \end{Vmatrix}$.

Applicando le definizioni di somma di matrici e di prodotto di un numero reale per una matrice e le proprietà delle operazioni fra numeri reali si dimostra la:

PROPRIETÀ 3.1.1 - L'insieme $M_{m,n}(\mathbf{R})$ delle matrici di tipo (m, n) a coefficienti in **R** è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma di matrici e di prodotto di un numero reale per una matrice.

Nel caso in cui n = m, cioè quando il numero delle righe coincide con il numero delle colonne, lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n si indica con $M_n(\mathbf{R})$.

3.1.4 - Trasposta di una matrice.

DEFINIZIONE 3.1.4 - *Sia $A = \| a_{ij} \|$ una matrice di tipo (m, n), cioè un elemento di $M_{m,n}(R)$. Si dice **trasposta** di A, e si indica con ${}^tA$, la matrice di tipo (n, m) ottenuta da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne.*

Ad esempio se $A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$ si ha ${}^tA = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$, se $B = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}$ si ha ${}^tB = \| x_1 \quad \dots \quad x_n \|$

DEFINIZIONE 3.1.5 - *Una matrice quadrata si dice **simmetrica** se ${}^tA = A$ cioè se coincide con la sua trasposta; si dice **antisimmetrica** se ${}^tA = -A$.*

DEFINIZIONE 3.1.6 - *Una matrice quadrata si dice **diagonale** se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$ cioè se solo gli elementi della diagonale possono essere non nulli.*

DEFINIZIONE 3.1.7 - La matrice diagonale avente tutti gli elementi $a_{ii} = 1$ si dice **matrice identica** e si indica con I_n.

Esempio 3.1.2

$\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$ è matrice diagonale, quindi anche simmetrica;

$\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$ è matrice simmetrica, ma non diagonale;

$\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$ è matrice non simmetrica;

$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$ è matrice antisimmetrica.

$I_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ è la matrice identica di ordine 2.

3.1.5 - Prodotto di matrici.

DEFINIZIONE 3.1.8 - *Date due matrici* $A = \| a_{ij} \| \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ *e* $B = \| b_{hk} \| \in M_{n,p}(\boldsymbol{R})$ *(tali che il numero di colonne della prima sia uguale al numero di righe della seconda) si dice* ***prodotto righe per colonne*** *di A e B la matrice* $AB = C = \| c_{ij} \| \in M_{m,p}(\boldsymbol{R})$ *i cui elementi* c_{ij} *sono dati dalla formula* $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Per ottenere l'elemento c_{ij} in pratica:
- si considerano la riga i-esima di A e la colonna j-esima di B,
- si fanno i prodotti dei termini corrispondenti,
- si sommano i prodotti così ottenuti.

Risulta dalla definizione che la matrice AB, se esiste, ha lo stesso numero di righe di A e lo stesso numero di colonne di B.

ESEMPIO 3.1.3 - Date le matrici $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$ e $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ si ha:

$$A\,B = \begin{Vmatrix} 1+2-1 & 2+2-3 & -1 & 2+8-1 \\ 2-1 & 4-1 & -2 & 4-4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Si noti che non si può fare il prodotto B A perché il numero delle colonne di B, cioè 4, non è uguale al numero delle righe di A, cioe 2.

Date le matrici $A = \| 1 \quad 2 \quad 3 \|$ e $B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}$ risulta $A\,B = \| 5 \|$ e $B\,A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

Si noti che $A\,B \neq B\,A$: per il prodotto di matrici non vale la proprietà commutativa.

3.1.6 - Lo spazio delle righe, lo spazio delle colonne ed il rango di una matrice.

Sia data una matrice $A = \| a_{ij} \| \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ ed indichiamo con $R_1, R_2, \ldots, R_m$ le righe che consideriamo come n-ple ossia elementi di $\mathbf{R}^n$ e con $C_1, C_2, \ldots, C_n$ le colonne che consideriamo come m-ple ossia elementi di $\mathbf{R}^m$.
Il sottospazio $L< R_1, R_2, \ldots, R_m >$ di $\mathbf{R}^n$ generato dalle righe di A è detto **spazio delle righe di A** e si denota con R_A; il sottospazio $L< C_1, C_2, \ldots, C_n >$ di $\mathbf{R}^m$ generato dalle colonne di

A è detto **spazio delle colonne di A** e si denota con C_A.

ESEMPIO 3.1.4 - Considerata la matrice $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$:

l'insieme delle righe è formato da $\{(1, 0), (2, 1), (3, 1)\}$ e lo spazio da esse generato è $\mathbf{R}^2$; l'insieme delle colonne è formato da $\{(1, 2, 3), (0, 1, 1)\}$ e lo spazio da esse generato è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2.

Come visto nell'esempio, lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne sono in generale diversi, ma si dimostra che hanno la stessa dimensione.

TEOREMA 3.1.1 - *Considerata una matrice* $A = \| a_{ij} \| \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ *lo spazio delle righe di A e lo spazio delle colonne di A hanno la stessa dimensione. In simboli: dim* R_A = *dim* C_A.

Dimostrazione - Indichiamo con r la dimensione di R_A: esistono quindi r vettori di $\mathbf{R}^n$ che generano R_A. Siano:

$$\mathbf{v}_1 = (d_{11},\ldots, d_{1n})$$
$$\mathbf{v}_2 = (d_{21},\ldots, d_{2n})$$
$$\ldots$$
$$\mathbf{v}_r = (d_{r1},\ldots, d_m).$$

I vettori riga sono combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots, \mathbf{v}_r$ quindi:

$$\mathbf{R}_1 = p_{11}\mathbf{v}_1 +\ldots+ p_{1r}\mathbf{v}_r$$
$$\mathbf{R}_2 = p_{21}\mathbf{v}_1 +\ldots+ p_{2r}\mathbf{v}_r$$
$$\ldots$$
$$\mathbf{R}_m = p_{m1}\mathbf{v}_1 +\ldots+ p_{mr}\mathbf{v}_r.$$

Nella base canonica di $\mathbf{R}^n$ le espressioni precedenti danno per la prima componente di ogni riga:

$$a_{11} = p_{11}d_{11} + p_{12}d_{21} +\ldots+ p_{1r}d_{r1}$$
$$a_{21} = p_{21}d_{11} + p_{22}d_{21} +\ldots+ p_{2r}d_{r1}$$
$$\ldots$$
$$a_{m1} = p_{m1}d_{11} + p_{m2}d_{21} +\ldots+ p_{mr}d_{r1}.$$

Il primo vettore colonna di A si scrive:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{Vmatrix} = d_{11}\begin{Vmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{m1} \end{Vmatrix} +\ldots+ d_{r1}\begin{Vmatrix} p_{1r} \\ p_{2r} \\ \vdots \\ p_{mr} \end{Vmatrix} = d_{11}\mathbf{w}_1 +\ldots+ d_{r1}\mathbf{w}_r = C_1.$$

Allo stesso modo si prova che $C_2, C_3,\ldots, C_n$ sono combinazioni lineari di $\mathbf{w}_1,\ldots, \mathbf{w}_r$, pertanto dim $C_A \le r$ = dim R_A.
Scambiando il ruolo delle righe con quello delle colonne, ossia considerando la matrice trasposta di A si prova dim $R_A \le r$ = dim C_A da cui segue dim C_A = r = dim R_A.

DEFINIZIONE 3.1.9 - *Si dice* ***rango di una matrice*** *A, e si indica con r(A), il numero che rappresenta la dimensione comune degli spazi delle righe e delle colonne di A.*

La matrice dell'esempio 3.1.4 ha rango 2.

3.1.7 - Matrici ridotte.

DEFINIZIONE 3.1.10 - *Una matrice* $A = \| a_{ij} \| \in M_{m,n}(R)$ *si dice* ***ridotta per righe (per colonne)*** *se in ogni riga (colonna) esiste un elemento non nullo, che diremo speciale, al di sotto (a destra) del quale gli elementi di A sono tutti nulli.*

Gli elementi dell'ultima riga (colonna) sono tutti speciali.
In una riga (colonna) nulla non ci sono elementi speciali.

ESEMPIO 3.1.5. Consideriamo le seguenti matrici:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}, D = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}.$$

La matrice A è ridotta per righe e per colonne, B è ridotta per righe ma non per colonne, C è ridotta per colonne ma non per righe, D non è ridotta né per righe né per colonne.

TEOREMA 3.1.2 - *Se* $A = \| a_{ij} \| \in M_{m,n}(R)$ *è una matrice ridotta per righe (per colonne) il numero delle righe (colonne) non nulle coincide con il rango della matrice.*

Dimostrazione - Dimostriamo la proprietà nel caso in cui la matrice A sia ridotta per righe in quanto il caso delle colonne è analogo.
Supponiamo per semplicità che A abbia la forma seguente:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$$

dove $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0, \dots, a_{rr} \neq 0$.
Quindi:

$$\mathbf{R}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r}, a_{1r+1}, \dots, a_{1n})$$
$$\mathbf{R}_2 = (0, a_{22}, \dots, a_{2r}, a_{2r+1}, \dots, a_{2n})$$
$$\dots$$
$$\mathbf{R}_r = (0, 0, \dots, a_{rr}, a_{rr+1}, \dots, a_{rn})$$
$$\mathbf{R}_{r+1} = \mathbf{R}_{r+2} = \dots = \mathbf{R}_m = \mathbf{0}$$

ed R_A è generato dai primi r vettori riga che sono tutti diversi dal vettore nullo perché hanno almeno un elemento non nullo; proviamo ora che tali vettori sono linearmente indipendenti.
Considerata la combinazione lineare $\lambda_1\mathbf{R}_1 + \lambda_2\mathbf{R}_2 + \dots + \lambda_r\mathbf{R}_r = \mathbf{0}$, passando alle componenti si ottiene:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 = 0 \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 = 0 \\ \dots \\ a_{1r}\lambda_1 + \dots + a_{rr}\lambda_r = 0 \end{cases}$$

Poiché $a_{11} \neq 0$ dalla prima equazione si ottiene $\lambda_1 = 0$. Sostituendo nella seconda equazione si ottiene $\lambda_2 = 0$ in quanto $a_{22} \neq 0$ e procedendo risulta $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$.

ESEMPIO 3.1.6 - La matrice $A = \begin{Vmatrix} 0 & \underline{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \underline{0} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{2} & 0 & 3 & 0 & 2 \\ \underline{0} & 0 & \underline{1} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ è ridotta ed ha tre righe non nulle, pertanto ha rango 3.

3.1.8 - Metodo di riduzione.

Ridurre una matrice $A = \| a_{ij} \| \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ per righe (o per colonne) significa trovare una matrice B tale che:

- $B \in M_{m,n}(\mathbf{R})$;
- B sia ridotta per righe (o per colonne);
- A e B abbiano lo stesso spazio delle righe (o delle colonne).

Il metodo di riduzione si basa sul seguente **fondamento teorico del metodo di riduzione**:

TEOREMA 3.1.3 - *Sia V uno spazio vettoriale su* $\mathbf{R}$ *e sia* $H = L\langle w_1, w_2, \ldots, w_m\rangle$ *il sottospazio di V generato dai vettori* $w_1, w_2, \ldots, w_m$. *Scegliamo due generatori* w_i *e* w_j *di H con* $i \neq j$ *e poniamo:*

$$w_i' = w_i + aw_j$$

dove a è uno scalare qualsiasi.
Allora il sottospazio H' generato da $w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, w_i', w_{i+1}, \ldots, w_m$ *coincide con H.*

Dimostrazione - Supponiamo ad esempio i = 1, j = 2: risulta $H' = L\langle \mathbf{w}_1 + a\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\rangle$.
Dimostriamo che H' = H con la doppia inclusione.
Proviamo che $H' \subseteq H$.
Se $\mathbf{v}' \in H'$ allora: $\mathbf{v}' = \lambda_1(\mathbf{w}_1 + a\mathbf{w}_2) + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{w}_m = \lambda_1\mathbf{w}_1 + (\lambda_1 a + \lambda_2)\mathbf{w}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{w}_m$.
Quindi $\mathbf{v}' \in H$.
Proviamo ora che $H \subseteq H'$.
Se $\mathbf{v} \in H$ allora: $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{w}_m = \lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_1 a\mathbf{w}_2 - \lambda_1 a\mathbf{w}_2 + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{w}_m =$
$= \lambda_1(\mathbf{w}_1 + a\mathbf{w}_2) + (\lambda_2 - \lambda_1 a)\mathbf{w}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{w}_m$, dunque $\mathbf{v} \in H$.
Osserviamo che, poiché H coincide con H', H ed H' hanno la stessa dimensione.

Descriviamo ora il metodo di riduzione per righe di una matrice A. Il metodo di riduzione per colonne è analogo.
Sia a_{ij} un elemento <u>non nullo</u> della riga R_i della matrice $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$: se vogliamo annullare un qualsiasi elemento della colonna j-esima, ad esempio a_{kj} $(k \neq i)$ è sufficiente considerare la trasformazione $R_k \rightarrow R_k + xR_i$ con $a_{kj} + xa_{ij} = 0$ ossia $x = -\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}}$.

Vediamo su un esempio il procedimento, riducendo per righe la matrice $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

Applicando le trasformazioni $R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1$ e $R_3 \to R_3 - \frac{3}{2}R_1$ si annullano i termini al di sotto di a_{11}.

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1-\frac{1}{2}2 & 2-\frac{1}{2} & 1 \\ 3-\frac{3}{2}2 & 1-\frac{3}{2} & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{Vmatrix}.$$

Applicando la trasformazione $R_3 \to R_3 + \frac{1}{3}R_2$ si annulla il termine al di sotto di a_{22}.

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{3}{2} & 2+\frac{1}{3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{Vmatrix} = B \text{ è una matrice ridotta per righe.}$$

Notiamo la trasformazione effettuata sopra non è l'unica possibile: si potrebbe anche applicare la trasformazione $R_3 \to R_3 - 2R_2$ si annulla il termine al di sotto di a_{23}.

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}-2\frac{3}{2} & 2-2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 0 \end{Vmatrix} = B' \text{ è una matrice ridotta per righe.}$$

Dai risultati ottenuti segue che:

a) la dimensione dello spazio R_A delle righe di A è 3, infatti in B vi sono tre righe non nulle;

b) una base di R_A è data dai seguenti vettori $(2, 1, 0)$, $\left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$, $\left(0, 0, \frac{7}{3}\right)$ o anche dai vettori $(2, 1, 0)$, $\left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$, $\left(0, -\frac{7}{2}, 0\right)$.

c) i vettori $(2, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(3, 1, 2)$ sono linearmente indipendenti.

Si osservi che la riduzione permette di trasformare una matrice in una matrice ridotta (in cui il calcolo del rango è immediato) senza cambiare lo spazio delle righe (o delle colonne).

OSSERVAZIONE - Ci sono altri tipi di trasformazioni elementari che non cambiano lo spazio delle righe (o delle colonne). Esse sono:

- scambiare fra loro due righe (indicato con $R_i \leftrightarrow R_j$);
- moltiplicare una riga per una costante non nulla (indicato con $R_i \to aR_i$).

Diamo ora alcuni esempi di applicazioni della riduzione delle matrici al calcolo del rango, al calcolo della dipendenza ed indipendenza lineare di vettori, al calcolo di una base estratta da un sistema di generatori.

ESEMPIO 3.1.7 - $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{Vmatrix} R_1 \leftrightarrow R_3 \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix} R_3 \to R_3 - R_2 \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. La matrice ha rango 3.

ESEMPIO 3.1.8 - La matrice $A = \begin{Vmatrix} \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{3} & 0 \\ 0 & 2 & \underline{1} \end{Vmatrix}$ è ridotta per colonne, il rango è uguale al massimo numero di colonne non nulle di A quindi è uguale a 3.

ESEMPIO 3.1.9 - Nello spazio vettoriale $V = \mathbf{R}^4$ dire se sono linearmente indipendenti i vettori:

$$\mathbf{u} = (1, -1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 3, 1, -1), \quad \mathbf{w} = (3, 2, 1, 0).$$

Si costruisce la matrice delle componenti dei vettori rispetto alla base standard di $\mathbf{R}^4$ e se ne calcola il rango con il metodo di riduzione.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix} R_2 \to R_2 + R_1 \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix} R_3 \to R_3 - R_2 \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Il rango di A è 2 ed i tre vettori sono linearmente dipendenti.

ESEMPIO 3.1.10 - Nello spazio vettoriale $V = \mathbf{R}^4$ riferito alla base standard sono dati i vettori:

$$\mathbf{u} = (1, -1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 1, 1, 0), \quad \mathbf{w} = (3, 0, 1, 1), \mathbf{t} = (0, 1, -1, 0).$$

Determinare una base del sottospazio $W = L< \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{t} >$.
E' sufficiente ridurre per righe la matrice A delle componenti dei vettori.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} R_3 \to R_3 - R_1 \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} R_3 \to R_3 - R_2 \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} = A'.$$

A' è ridotta per righe ed ha rango 3, i vettori $\mathbf{u} = (1,-1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{t} = (0, 1,-1, 0)$ costituiscono una base di W.

3.2 - Determinanti.

3.2.1 - Determinante di una matrice quadrata.

Come visto nel § 1.1 per matrici quadrate di ordine 2 e 3, ad ogni matrice quadrata è associato un numero reale detto **determinante della matrice** che definiremo per induzione dopo aver dato la seguente:

DEFINIZIONE 3.2.1 - *Data la matrice quadrata* $A = \| a_{ij} \| \in M_n(\boldsymbol{R})$ *si dice* ***complemento algebrico*** *o* ***cofattore*** *dell'elemento* a_{ij}, *e si indica con* A_{ij}, *il numero definito da:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Si noti che la matrice è ottenuta dalla matrice A eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima.

ESEMPIO 3.2.1 - Data la matrice $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$ il complemento algebrico di a_{32} è

$A_{23} = (-1)^{3+2} \det \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix} = -8.$

Per definire il determinante per induzione sull'ordine della matrice:

- nel caso della matrice quadrata di ordine 1 si pone $\det \| a_{11} \| = a_{11}$;
- nel caso della matrice quadrata di ordine 2 si pone:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

- nel caso della matrice quadrata di ordine n si ha lo sviluppo del determinante secondo la **prima regola di Laplace**: *il determinante di una matrice quadrata di ordine n si ottiene sommando i prodotti degli elementi di una riga (o di una colonna) per i rispettivi complementi algebrici. In simboli:*

$$det \| a_{ij} \| = | a_{ij} | = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, det A_{ij}. \qquad i = 1, \dots, n.$$

Si può dimostrare che la definizione è indipendente dalla linea, cioè riga o colonna, scelta.

Nel caso della matrice quadrata di ordine 3: $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$ dalla definizione segue

$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ ossia:

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Per calcolare i determinanti sono utili le seguenti proprietà:

1) Il determinante di una matrice con gli elementi di una linea tutti nulli ha valore zero.
2) Se gli elementi di una riga si moltiplicano per uno stesso numero, il determinante risulta moltiplicato per il numero.
3) Se si scambiano tra loro due righe di una matrice, il determinante cambia segno.
4) Il determinante di una matrice con due righe uguali è nullo.
5) Se gli elementi della i-esima riga di una matrice sono della forma $a_{ij} + b_{ij}$, il suo deter-

minante è la somma di due determinanti, quello della matrice con la i-esima riga formata dalle a_{ij}, e quello della matrice con la i-esima riga formata dalle b_{ij}.
6) Se gli elementi di una riga di una matrice si ottengono come combinazione lineare (con gli stessi coefficienti) di elementi corrispondenti delle rimanenti righe, il suo determinante è nullo, e viceversa.
7) Il valore del determinante di una matrice non cambia se agli elementi di una riga vengono aggiunti gli elementi corrispondenti di un'altra riga moltiplicati per una costante.
8) Il valore del determinante di una matrice non cambia se si scambiano ordinatamente le righe con le colonne.

Per la proprietà (8) segue che valgono proprietà analoghe alle precedenti sostituendo alle righe le colonne.

PROPRIETÀ 3.2.1 (seconda regola di Laplace) - *La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) di una matrice quadrata per i complementi algebrici dei corrispondenti elementi di un'altra riga (o colonna) è zero.*

Dimostrazione - E' sufficiente osservare che l'espressione che si ottiene equivale allo sviluppo di un determinante con due righe (o colonne) uguali, che è nullo per la proprietà 4).

3.2.2 - Matrici invertibili.

Per il prodotto di matrici quadrate vale il seguente teorema di Binet di cui omettiamo la dimostrazione:

TEOREMA 3.2.1 (Binet) - *Se A e B sono due matrici quadrate di ordine n su* $\boldsymbol{R}$ *vale la seguente relazione:* $\boldsymbol{det(AB) = (det\ A)(det\ B) = det(BA)}$, *anche se* $B\,A \neq A\,B$.

ESEMPIO 3.2.2 - Date le matrici: $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}$ e $B = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ risulta $AB = \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}$ e $BA = \begin{Vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}$; per i determinanti $\det A = 7$, $\det B = -2$, $\det(AB) = \det(BA) = -14$.

DEFINIZIONE 3.2.2 - *Una matrice quadrata* $A \in M_n(\boldsymbol{R})$ *si dice* ***invertibile*** *se esiste una matrice detta matrice inversa di A ed indicata con* A^{-1} *appartenente ad* $M_n(\boldsymbol{R})$ *tale che:*

$$A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

TEOREMA 3.2.2 - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice quadrata* $A \in M_n(\boldsymbol{R})$ *sia invertibile è che il suo determinante sia diverso da zero.*

Dimostrazione - Condizione necessaria: se una matrice A è invertibile, cioè se esiste una matrice inversa A^{-1} tale che $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_n$, applicando il teorema di Binet risulta $(\det A)(\det A^{-1}) = \det I_n = 1$ e quindi i fattori non possono essere nulli, $\det A \neq 0$.
Condizione sufficiente: supponiamo $\det A \neq 0$ ed eseguiamo il prodotto:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix} = A\,A'.$$

Esso, per la seconda regola di Laplace, risulta $\begin{Vmatrix} \det A & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \det A \end{Vmatrix} = (\det A)^n\, I_n$

Si è quindi ottenuto:

$A\,A' = (\det A)^n\, I_n$ da cui $A\dfrac{A'}{(\det A)^n} = I_n$ ossia: $A \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{Vmatrix} = I_n$

e la matrice scritta nell'ultima uguaglianza è la matrice inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}.$$

REGOLA PRATICA - Per calcolare la matrice inversa di una matrice invertibile A (matrice quadrata con $\det A \neq 0$):

- si scrive la matrice trasposta ${}^tA$;
- si sostituisce ogni elemento di ${}^tA$ con il suo cofattore;
- si divide ogni elemento per det A.

3.2.3 - Rango di una matrice.

E' possibile dare una definizione equivalente di rango di una matrice utilizzando i determinanti.

DEFINIZIONE 3.2.3 - *Data la matrice A di tipo (m, n) definiamo* ***sottomatrice quadrata di ordine p*** *($p \leq m,n$) una matrice quadrata che si ottiene da A considerando gli elementi che appartengono contemporaneamente a p righe ed a p colonne fissate.*

ESEMPIO 3.2.3 - Data la matrice $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{Vmatrix}$ sono sue sottomatrici di ordine 2, ad esempio, $\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$, ottenuta cancellando la seconda riga e prima e terza colonna;

$\begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}$, ottenuta cancellando la prima riga e prima e quarta colonna.

TEOREMA 3.2.3 - *Il rango r di una matrice A (che è stato definito come il massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti) coincide con il massimo fra gli ordini delle sottomatrici quadrate di A aventi determinante diverso da zero.*

Dimostrazione - Sia p il massimo tra gli ordini delle sottomatrici quadrate con determinante diverso da zero. Vogliamo provare che p = r mediante le diseguaglianze $p \leq r$ ed $r \leq p$.
Proviamo dapprima che $p \leq r$.
Supponiamo per semplicità che la sottomatrice B di ordine p formata dalle prime p righe e p colonne abbia $\det B \neq 0$ e dimostriamo che le prime p righe sono linearmente indipendenti, da cui segue $p \leq r$. Se, per assurdo, le prime p righe non fossero linearmente indipendenti esisterebbe una loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli che dia il vettore nullo: $\lambda_1(a_{11}, a_{12},\ldots, a_{1p},\ldots, a_{1n}) + \lambda_2(a_{21}, a_{22},\ldots, a_{2p},\ldots, a_{2n}) +\ldots+ \lambda_p(a_{p1}, a_{p2},\ldots, a_{pp},\ldots, a_{pn}) = (0, 0,\ldots, 0)$ con non tutte le λ_i nulle. Effettuando il calcolo al primo membro ed uguagliando le n componenti dei due membri si ottiene:

$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} +\ldots+ \lambda_p a_{p1} = 0$
$\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} +\ldots+ \lambda_p a_{p2} = 0$
$\ldots$
$\lambda_1 a_{1p} + \lambda_2 a_{2p} +\ldots+ \lambda_p a_{pp} = 0$
$\ldots$
$\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} +\ldots+ \lambda_p a_{pn} = 0$

Se consideriamo le prime p uguaglianze individuiamo un vettore:
$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} +\ldots+ \lambda_p a_{p1}, \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} +\ldots+ \lambda_p a_{p2},\ldots, \lambda_1 a_{1p} + \lambda_2 a_{2p} +\ldots+ \lambda_p a_{pp}) =$
$= (0,\ldots, 0)$ ossia
$\lambda_1(a_{11}, a_{12},\ldots, a_{1p}) + \lambda_2(a_{21}, a_{22},\ldots, a_{2p}) +\ldots+ \lambda_p(a_{p1}, a_{p2},\ldots, a_{pp}) = (0, 0,\ldots, 0)$
con almeno un λ non nullo. Allora le prime p righe di B sono linearmente dipendenti quindi una di esse è combinazione lineare delle altre e, per la proprietà 6 dei determinanti, $\det B = 0$ contro quanto supposto.

Proviamo ora che $r \leq p$.
Supponiamo che le prime r righe della matrice a siano linearmente indipendenti. Allora la matrice $C = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{Vmatrix}$ ha rango r, quindi per il Teorema 3.1.1 ci sono r colonne di C linearmente indipendenti: supponiamo siano le prime r.
Allora la matrice $B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{Vmatrix}$ ha rango r poiché le colonne sono linearmente indipendenti e, per la proprietà 6 dei determinanti, $\det B \neq 0$. Segue che l'ordine r di una sottomatrice a determinante non nullo è minore od uguale del massimo p di tali ordini.
Si noti che si devono considerare le r colonne linearmente indipendenti di C e non una qualunque sottomatrice di C perché potrebbe essere $C = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$.

3.3 - Esercizi proposti.

III.1 - Considerate le matrici:

$$A=\begin{Vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{Vmatrix},\ B=\begin{Vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix},\ C=\begin{Vmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{Vmatrix},\ D=\begin{Vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{Vmatrix},\ E=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{Vmatrix},\ F=\begin{Vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{Vmatrix}$$

calcolare le matrici prodotto A B, A C, B C, D E, D F, E F.

$$(AB=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -3 & 0\end{Vmatrix},\quad AC=\begin{Vmatrix}3 & -6\\ 3 & -6\end{Vmatrix},\ BC=\begin{Vmatrix}3 & -6\\ -1 & 2\end{Vmatrix},$$

$$DE=\begin{Vmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{Vmatrix},\ DF=\begin{Vmatrix}2 & 1 & -3\\ 2 & 5 & -1\\ -2 & 0 & 4\end{Vmatrix},\quad EF=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 7 & 4\end{Vmatrix}).$$

III.2 - Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 2 & 5\end{Vmatrix}\qquad B=\begin{Vmatrix}0 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 5 & 4\\ 4 & 8 & 13 & 12\end{Vmatrix}\qquad C=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 4 & 5\end{Vmatrix}$$

(rg A = 3; rg B = 2; rg C = 3)

III.3 - Verificare che:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 1\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix}=-11\qquad\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 4\\ 8 & 13 & 12\end{vmatrix}=0\qquad\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 1\\ 6 & 0 & 8\end{vmatrix}=0.$$

III.4 - Verificare che:

$$\begin{vmatrix}3 & 5 & 7 & 2\\ 2 & 4 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=156\qquad\begin{vmatrix}3 & 5 & -14 & 2\\ 2 & 4 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -6 & 4\end{vmatrix}=-312\qquad\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 5 & 1 & 0 & 4\\ 3 & 1 & -2 & 3 & 7\\ 3 & 7 & -1 & 3 & 4\\ 5 & -8 & 2 & 8 & 0\end{vmatrix}=0.$$

III.5 - Date le matrici: $A=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix}1\\ 2\\ 3\end{Vmatrix}$ determinare la matrice C tale che A C = B.

$$\left(C=\frac{1}{4}\begin{Vmatrix}3\\ 5\\ -3\end{Vmatrix}\right).$$

III.6 - Determinare, se possibile, le matrici inverse delle matrici dell'esercizio II.1

$$(A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{Vmatrix},\quad B^{-1}=\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{Vmatrix},\quad C\text{ non invertibile.}$$

$$D^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$$, E non invertibile, $F^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{Vmatrix}$).

III.7 - Data la matrice $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & h \end{Vmatrix}$ determinare per quale valore di h è invertibile e calcolare A^{-1}.

$$(h \neq 9;\ A^{-1} = \frac{1}{-9+h}\begin{Vmatrix} -8+h & 12-2h & 1 \\ -2 & 3+h & -2 \\ 1 & -6 & 1 \end{Vmatrix})$$

III.8 - Data la matrice $A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{Vmatrix}$ determinare per quale valore di h è invertibile e calcolare A^{-1}.

$$(h \neq 0;\ A^{-1} = \frac{1}{h}\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h & 0 \\ h & 2 & -3h & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix})$$

CAPITOLO IV

EQUAZIONI VETTORIALI E SISTEMI LINEARI

4.1 - Equazioni vettoriali.

DEFINIZIONE 4.1.1 - *Diciamo* ***equazione vettoriale lineare*** *una equazione del tipo:*

(1) $$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = b$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ *appartengono ad uno stesso spazio vettoriale* $\mathbf{R}^m$ *delle m-ple di numeri reali ed* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sono incognite scalari.*

Risolvere l'equazione vettoriale significa determinare le incognite in modo che sostituendole nella (1) si abbia un'identità.

Se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$: l'equazione si dice **omogenea** ed ha sempre la soluzione nulla $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$.

DEFINIZIONE 4.1.2 - *Si dice* ***rango*** *di un sistema di vettori* $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ *la dimensione dello spazio vettoriale da essi generato, che coincide con il massimo numero di vettori linearmente indipendenti contenuto nel sistema, ossia*

$$rango\ \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} = dim\ L\langle u_1, u_2, \ldots, u_m\rangle.$$

TEOREMA 4.1.1 (di Rouché-Capelli per le equazioni vettoriali) - *L'equazione vettoriale*

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = b$$

ha soluzioni se e solo se $rango\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = rango\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b\}$.

Dimostrazione - Se l'equazione vettoriale è compatibile esiste una soluzione $x_1^0, \ldots, x_n^0$ tale che $x_1^0\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n^0\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ quindi $\mathbf{b}$ è combinazione lineare di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.
Proviamo che $L\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle = L\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \rangle$.
Ovviamente $L\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle \subseteq L\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \rangle$.
Viceversa se $\mathbf{x} \in L\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \rangle$ risulta $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n + \mu\mathbf{b}$ e, sostituendo a $\mathbf{b}$ la sua espressione mediante la soluzione dell'equazione, si ottiene:
$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n + \mu(x_1^0\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n^0\mathbf{a}_n) = (\lambda_1 + \mu x_1^0)\mathbf{a}_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu x_n^0)\mathbf{a}_n$.
Segue $\mathbf{x} \in L\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ quindi $L\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \rangle \subseteq L\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ ed in particolare $\dim L\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \rangle = \dim L\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$.
Supponiamo ora che:

$$\text{rango}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \text{rango}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\} = r = \text{rango}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$$

ossia che $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ sia una base per $L\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \rangle$.
Allora $\mathbf{b} = \mu_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \mu_r\mathbf{a}_r$ quindi l'equazione vettoriale è compatibile ed una sua soluzione è $\mathbf{b} = \mu_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \mu_r\mathbf{a}_r + 0\mathbf{a}_{r+1} + \ldots + 0\mathbf{a}_n$.

PROPRIETÀ 4.1.1 - *Se l'equazione vettoriale (1) ha al massimo r vettori linearmente indipendenti, le* $n - r$ *incognite corrispondenti agli altri* $n - r$ *vettori possono essere assegnate ad arbitrio e, in corrispondenza ad ogni scelta di tali incognite, le restanti r sono univocamente determinate.*

Dimostrazione - Supponiamo che il massimo numero di vettori linearmente indipendenti tra gli $\mathbf{a}_i$ sia r e che i primi r vettori siano linearmente indipendenti. Allora $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ formano una base B per lo spazio vettoriale $L< \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n >$.
L'equazione vettoriale si può quindi riscrivere: $x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_r\mathbf{a}_r = \mathbf{b} - x_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} - \ldots - x_n\mathbf{a}_n$.
Ora, scelti a caso $x_{r+1}, \ldots, x_n$, ponendo $\mathbf{v} = \mathbf{b} - x_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} - \ldots - x_n\mathbf{a}_n$ si individua un vettore appartenente a $L<\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r>$. Sono quindi individuate in modo unico le sue componenti $x_1, \ldots, x_r$ rispetto alla base B.
I valori così ottenuti $x_1, \ldots, x_r$ uniti a quelli arbitrariamente fissati delle n – r **incognite libere** $x_{r+1}, \ldots, x_n$ danno origine ad una soluzione dell'equazione vettoriale.
Esistono perciò ∞^{n-r} soluzioni che dipendono dalla scelta delle n – r incognite libere.

4.2 - Sistemi lineari.

4.2.1 - Equivalenza tra equazioni vettoriali e sistemi lineari.

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sul campo **R** è un insieme di m equazioni lineari del tipo:

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove le a_{ij} e le b_i (con i = 1,…, m e j = 1,…, n) sono numeri reali: soluzione del sistema è un qualunque insieme di n numeri reali che verifica ogni equazione del sistema.
Un sistema che ammette soluzioni si dice **compatibile**, se non ammette soluzioni si dice **incompatibile**.

ESEMPIO 4.2.1 - Dato il sistema $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ la terna (1, –1, 1) è una sua soluzione in quanto verifica entrambe le equazioni, il sistema è dunque compatibile.
La terna (0, 0, 0) verifica solo la prima equazione ma non la seconda quindi non è una soluzione del sistema.

Il sistema lineare (2) si può rappresentare in forma sintetica usando il prodotto di matrici (riga per colonna). Infatti le equazioni di (2) equivalgono a:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{Vmatrix}$$ che si può scrivere $A\,X = B$

dove $A = \| a_{ij} \|$, $X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{Vmatrix}$.

Oppure utilizzando le operazioni lineari fra matrici il sistema si può anche scrivere nella forma:

$$x_1\begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{Vmatrix} + \dots + x_n \begin{Vmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{Vmatrix}$$. Infatti si ha $$\begin{Vmatrix} x_1a_{11} \\ x_1a_{21} \\ \dots \\ x_1a_{m1} \end{Vmatrix} + \dots + \begin{Vmatrix} x_na_{1n} \\ x_na_{2n} \\ \dots \\ x_na_{mn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{Vmatrix}$$.

E' importante osservare che ponendo $\mathbf{a}_1 = (a_{11},\dots, a_{m1}),\dots, \mathbf{a}_n = (a_{1n},\dots, a_{mn})$, $\mathbf{b} = (b_1,\dots,b_m)$ il sistema lineare si può trasformare nell'**equazione vettoriale** $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ che ha le stesse soluzioni e viceversa si può passare da un'equazione vettoriale al suo sistema lineare associato.

ESEMPIO 4.2.2 - L'equazione vettoriale $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{a}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 0)$, $\mathbf{b} = (4, 5)$ è equivalente al sistema $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$. Infatti ricordando le operazioni su $\mathbf{R}^2$ l'equazione vettoriale si scrive: $x_1(1, 1) + x_2(-1, 2) + x_3(2, 0) = (4, 5)$ ossia $(x_1, x_1) + (-x_2, 2x_2) + (2x_3, 0) = (4, 5)$ da cui $(x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2) = (4, 5)$. Ma due elementi di $\mathbf{R}^2$ sono uguali se hanno uguali le componenti da cui il sistema.

ESEMPIO 4.2.3 - Il sistema lineare $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$ è equivalente all'equazione vettoriale $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 4, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$. La verifica è ovvia.

Quindi per il Teorema di Rouché-Capelli (4.1.1) dimostrato per le equazioni vettoriali possiamo enunciare l'analogo per i sistemi lineari:

TEOREMA 4.2.1 (di Rouché-Capelli per i sistemi lineari) - *Il sistema lineare (2) ha soluzioni se e solo se rango$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\dots, \mathbf{a}_n\}$ = rango$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$.*

Ricordando che il rango del sistema di vettori $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ è la dimensione dello spazio vettoriale da essi generato ossia il rango della matrice A dei coefficienti e che il rango di $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ è il rango della matrice completa $B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}$ il teorema 4.2.1 si può anche enunciare come:

Il sistema lineare (2) ha soluzioni se e solo se il rango della matrice A dei coefficienti ed il rango della matrice completa B sono uguali.

Si ha una sola soluzione se il numero delle incognite è uguale al rango delle due matrici. Detto r tale numero se le equazioni sono più di r (cioè m > r) allora m – r equazioni sono combinazione lineare delle rimanenti e si possono trascurare: si ottiene un sistema di r equazioni in r incognite avente la matrice A quadrata con determinante diverso da zero, per il teorema 3.2.3, che si dice **sistema di Cramer**.

4.2.2 - Regola di Cramer.

Consideriamo un sistema di n equazioni in n incognite $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

che, ponendo $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$, $X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Vmatrix}$ e $B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{Vmatrix}$ si può scrivere, con notazione matriciale, $AX = B$.

Supponiamo che la matrice A sia invertibile,ossia che det A sia diverso da zero, moltiplicando ambo i membri della relazione precedente per A^{-1} si ha $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ ossia $(A^{-1}A)X = I_nX = X = A^{-1}B$, ricordando che il prodotto di una matrice per la sua inversa è la matrice identica I_n ed utilizzando la proprietà asociativa del prodotto di matrici.

Esplicitando le matrici la relazione ottenuta si esprime:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Vmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{Vmatrix}.$$

Il generico termine x_k è quindi dato da

$$x_k = \frac{1}{\det A}(A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \ldots + A_{nk}b_n) = \frac{1}{\det A} \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

dove la colonna contenente le b è la k-esima, ricordando lo sviluppo del determinante secondo la k-esima colonna per la prima regola di Laplace. Si è così ottenuta la:

Regola di Cramer: *un sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice A dei coefficienti abbia determinante non nullo ha una sola soluzione.Il valore dell'incognita di posto k è dato da una frazione avente per denominatore det A e per numeratore il determinante della matrice che si ottiene da A sostituendo la colonna k con la colonna dei termini noti.*

OSSERVAZIONE - Un sistema omogeneo di n equazioni in n incognite ha solo la soluzione nulla se $\det A \neq 0$ ed ha soluzioni non nulle se e solo se $\det A = 0$.

ESEMPIO 4.2.2 - Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$.

Si tratta di un sistema di due equazioni in due incognite il cui determinante dei coefficienti è $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0$ quindi è un sistema di Cramer. La sua soluzione si ottiene con la regola di Cramer: $x_1 = \frac{1}{-5}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{14}{5}$, $x_2 = \frac{1}{-5}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}$.

4.2.3 - Casi particolari.

1 - Sistema lineare di due equazioni in tre incognite.

Considerato il sistema $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d' \end{cases}$ e la relativa matrice dei coefficienti

$A = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix}$ si distinguono i seguenti casi:

I - le righe di A non sono proporzionali quindi rangoA = 2 che coincide con il rango della matrice completa B e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è risolubile ed ha ∞^1 soluzioni.

ESEMPIO 4.2.3 - Dato il sistema: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$, i coefficienti di x_1 ed x_2 formano una matrice il cui determinante è non nullo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1.$

Il sistema dato si può scrivere: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = x_3 + 1 \\ 5x_1 + 8x_2 = -2x_3 + 3 \end{cases}$ che è un sistema nelle due incognite x_1 ed x_2, mentre x_3 si può considerare come parametro.
Poiché, come calcolato, il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, si può determinare la soluzione con la regola di Cramer:

$$x_1 = \begin{vmatrix} x_3 + 1 & 3 \\ -2x_3 + 3 & 8 \end{vmatrix} = 14x_3 - 1 \qquad x_2 = \begin{vmatrix} 2 & x_3 + 1 \\ 5 & -2x_3 + 3 \end{vmatrix} = -9x_3 + 1.$$

Il sistema dato ha quindi le infinite soluzioni: $x_1 = 14k - 1$, $x_2 = -9k + 1$, $x_3 = k$ al variare di k in **R**.

II - le righe di A sono in proporzione ed anche i termini noti sono nello stesso rapporto: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$. In tal caso risulta rango A = 1 che coincide con il rango B e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è risolubile ed ha ∞^2 soluzioni, in quanto le due equazioni che costituiscono il sistema sono la stessa equazione a meno di un coefficiente di proporzionalità.

ESEMPIO 4.2.4 - Dato il sistema: $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 - 21x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$ tutti i determinanti delle matrici formate dai coefficienti di due tra le incognite sono nulli; i coefficienti sono in proporzione ed anche i termini noti sono in proporzione: il sistema si può ridurre ad una sola equazione: $2x_1 - 7x_2 - x_3 = 1$ ed ha infinite soluzioni: $x_1 = h$, $x_2 = k$, $x_3 = 2h - 7k - 1$ al variare di h e k in **R**.

III - le righe di A sono in proporzione ma i termini noti non sono nello stesso rapporto: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$. In tal caso risulta rangoA = 1 e rangoB = 2 e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è incompatibile.

ESEMPIO 4.2.5 - Dato il sistema: $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 1 \\ -6x_1 + 21x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$ tutti i determinanti delle matrici formate dai coefficienti di due tra le incognite sono nulli; i coefficienti sono in proporzione ma i termini noti non sono nello stesso rapporto di proporzione: si ottiene quindi un assurdo:

$$4 = -6x_1 + 21x_2 + 3x_3 = -3(2x_1 - 7x_2 - x_3) = -3(1) = -3.$$

Il sistema risulta quindi incompatibile.

2 - Sistema lineare di tre equazioni in tre incognite.

ESEMPIO 4.2.6 - Risolvere il sistema: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$.

Calcoliamo $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 9 - 1 - 6 - 2 - 6 = -14 \neq 0.$

Si tratta di un sistema di Cramer e le soluzioni si possono calcolare con la regola di Cramer:

$$x_1 = \frac{1}{-14}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{10}{7},\ x_2 = \frac{1}{-14}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{9}{7},\ x_3 = \frac{1}{-14}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Come si vede al crescere del numero di equazioni e di incognite la regola di Cramer comporta calcoli sempre più pesanti: in pratica si usano quindi altri metodi.

4.2.4 - Risoluzione di sistemi lineari con il metodo di riduzione.

Il sistema lineare AX = B si dice **ridotto** se la matrice A è ridotta per righe. Se il sistema è ridotto le sue soluzioni si trovano facilmente per sostituzione.

ESEMPIO 4.2.7 - Consideriamo il sistema lineare $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$ nelle incognite x_1, x_2, x_3 la cui matrice $A = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ è ridotta per righe.

Il sistema si risolve per sostituzione: dall'ultima equazione risulta $x_3 = 3$, sostituendo nella seconda si ottiene $2x_2 - 3 = 2$ da cui $x_2 = \frac{5}{2}$. Sostituendo tali valori nella prima equazione si ottiene $2x_1 - 5 + 3 = 1$ da cui $x_1 = \frac{3}{2}$. Il sistema ha l'unica soluzione $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$.

Poiché è più semplice risolvere sistemi ridotti vediamo che è possibile trasformare un sistema lineare qualunque in un opportuno sistema ridotto usando il metodo di riduzione. Premettiamo alcune considerazioni per poter sostituire un sistema con un altro.

DEFINIZIONE 4.2.1 - *Due sistemi di equazioni lineari si dicono* ***equivalenti*** *se hanno le stesse soluzioni.*

PROPRIETÀ 4.2.1 - *Le trasformazini elementari:*

1) scambiare fra loro due equazioni;

2) moltiplicare primo e secondo membro di un'equazione per uno stesso scalare non nullo;

3) sostituire un'equazione con quella ottenuta sommando ad essa un'altra equazione moltiplicata per una costante

trasformano un sistema lineare in un sistema equivalente.

Dimostrazione - Per le trasformazioni di tipo 1) e 2) la proprietà è ovvia.
Consideriamo le trasformazioni del tipo 3): dato un sistema A costruiamo un sistema B che differisce dal sistema A per la seconda equazione che è ottenuta dalla seconda e dalla prima equazione del sistema A con una trasformazione di tipo 3). In simboli:

$$A = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \qquad\qquad = \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p + k(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p) = b_2 + kb_1 \\ \ldots\ldots\ldots \qquad\qquad = \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Dobbiamo provare che i due sistemi hanno le stesse soluzioni.
Se $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$ è una soluzione del sistema A, sostituita nel secondo sistema lo rende identicamente soddisfatto.
Viceversa se $(x_1', \ldots, x_p')$ è una soluzione del sistema B, sostituendola nella seconda equazione si ottiene:
$a_{21}x_1' + \ldots + a_{2p}x_p' + k(a_{11}x_1' + \ldots + a_{1p}x_p') = b_2 + kb_1$.
Ma $(x_1', \ldots, x_p')$ è soluzione anche della prima equazione cioè $a_{11}x_1' + \ldots + a_{1p}x_p' = b_1$. Sostituendo nell'espressione precedente si ottiene $a_{21}x_1' + \ldots + a_{2p}x_p' + kb_1 = b_2 + kb_1$ ossia $a_{21}x_1' + \ldots + a_{2p}x_p' = b_2$ cioè $(x_1', \ldots, x_p')$ è soluzione anche della seconda equazione di A ed i due sistemi risultano equivalenti.

Per risolvere un sistema con il metodo di riduzione lo si trasforma in un sistema ridotto considerando la matrice completa B del sistema ed eseguendo trasformazioni elementari sulle righe fino ad avere una matrice B' tale che la sua sottomatrice A', che si ottiene escludendo l'ultima colonna, sia ridotta.

Vediamo su alcuni esempi come si può trasformare un sistema lineare in un sistema ridotto ad esso equivalente.

ESEMPIO 4.2.8 - Dato il sistema $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$:

scriviamo la matrice completa B formata dai coefficienti delle incognite e dai termini noti:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right\|;$$

per avere come termine di posto (1, 1) il numero 1 che rende più agevoli i calcoli, scambiamo tra loro la prima e la terza riga, operazione che indichiamo con $R_3 \leftrightarrow R_1$:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right\|;$$

affinchè il termine di posto (2, 1) sia zero sostituiamo alla seconda riga la differenza tra la seconda riga ed il doppio della prima, in simboli $R_2 \to R_2 - 2R_1$;
affinchè il termine di posto (3, 1) sia zero sostituiamo alla terza riga la differenza tra la terza riga ed il triplo della prima, in simboli $R_3 \to R_3 - 3R_1$.

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & -7 & -16 \\ 0 & 5 & -11 & -26 \end{array}\right\|;$$

affichè il numero 5 di posto (3, 2) sia zero e rimangano zero i termini precedentemente trasformati in zero, sostituiamo infine alla terza riga la differenza tra la terza riga e la seconda riga moltiplicata per $\frac{5}{3}$, cioè $R_3 \to R_3 - \frac{5}{3}R_2$ (si otterrebbe risultato analogo con la trasformazione $R_3 \to 5R_2 - 3R_3$):

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & -7 & -16 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right\|.$$

Questa è la matrice B' cercata in quanto la sottomatrice A' è ridotta, il sistema ridotto, equivalente al sistema dato, ottenuto dalla matrice B' è $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_2 - 7x_3 = -16 \\ \frac{2}{3}x_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Risolvendo, come nell'esempio precedente per sostituzione, si ottiene la soluzione: $x_3 = 1$, $x_2 = -3$, $x_1 = 2$.

Vediamo ora altri esempi indicando le trasformazioni sulle righe in simboli.

ESEMPIO 4.2.9 - Risolvere il sistema $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$.

Scriviamo la matrice completa B e trasformiamola $\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right\|$ $\begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array}$ ▷

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & & 1 \\ 0 & 0 & 3 & & -2 \\ 0 & 0 & 3 & & -2 \end{array}\right\| \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & & 1 \\ 0 & 0 & 3 & & -2 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right\|$$. Il sistema dato è equivalente al sistema ridotto $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_3 = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$ che ha le infinite soluzioni $\begin{cases} x_1 = -x_2 + \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

ESEMPIO 4.2.10 - Risolvere il sistema $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

Scriviamo la matrice completa B e trasformiamola:

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right\| \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right\| \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right\| \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_3} \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right\|$$. Il sistema dato è equivalente al sistema ridotto $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ che ha l'unica soluzione $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$. Notiamo che in questo caso il sistema dato è un sistema omogeneo di quattro equazioni in quattro incognite: ha sempre la soluzione nulla ed ha altre soluzioni solo se non è di Cramer, cioè se $\det A = 0$.

Si poteva quindi calcolare $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$:

il sistema ha solo la soluzione nulla.

ESEMPIO 4.2.11 - Risolvere il sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_4 = 1 \\ 3x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$.

Scriviamo la matrice completa B e trasformiamola:

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right\| \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3R_1} \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right\| \xrightarrow{R_5 \to R_5 - 3R_2}$$

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right\| \xrightarrow[R_5 \to R_5 + R_3]{R_4 \to R_4 - 2R_3} \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right\|$$

. La quarta riga corrisponde all'equazione $0 = -4$ che è impossibile quindi il sistema non ha soluzioni.

4.3 - Esercizi proposti.

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

IV.1 - $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ (sistema incompatibile)

IV.2 - $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -3 \end{cases}$ $(x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1)$

IV.3 - $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \\ -4x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$

IV.4 - $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ $(x_1 = 2k, x_2 = -k, x_3 = k, \forall k \in \mathbf{R})$

IV.5 - $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ (sistema incompatibile)

IV.6 - $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$ $\left(x_1 = \frac{24}{19},\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{32}{19},\ x_4 = -\frac{4}{19}\right)$

IV.7 - $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ (sistema incompatibile)

IV.8 - $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ ($x_1 = 4k + 6$, $x_2 = k$, $x_3 = 3k + 6$, $\forall k \in \mathbf{R}$)

IV.9 - $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ (sistema incompatibile)

Discutere e risolvere al variare dei parametri i seguenti sistemi lineari:

IV.10 - $\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + -x_2 - x_3 = 0 \\ kx_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$.

(se $k \neq 0$ e $k \neq -2$ una soluzione: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$;
se $k = 0$ infinite soluzioni: $x_1 = t$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$ $\forall t \in \mathbf{R}$;
se $k = -2$ infinite soluzioni: $x_1 = h$, $x_2 = h$, $x_3 = 0$ $\forall h \in \mathbf{R}$).

IV.11 - $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = k \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + kx_3 = k + 1 \end{cases}$

(se $k \neq 0$ e $k \neq 1$ una soluzione: $x_1 = k$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$;
se $k = 0$ infinite soluzioni: $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 1 + 2t$, $x_3 = t$ $\forall t \in \mathbf{R}$;
se $k = 1$ infinite soluzioni: $x_1 = 1$, $x_2 = t$, $x_3 = t$ $\forall t \in \mathbf{R}$).

IV.12 - $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = k \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ (se $k \neq 1$ sistema impossibile; se $k = 1$: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{11}{3}$, $x_3 = -\frac{10}{3}t$).

IV.13 - $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + kx_4 = 0 \\ -x_1 + (k-2)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + kx_4 = 0 \end{cases}$

(se $k \neq 0$ una soluzione: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$;
se $k = 0$ infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere).

IV.14 - $\begin{cases} kx_1 - x_2 + kx_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -k - 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + (k+2)x_3 = -k - 2 \end{cases}$

(se $k \neq -2$, $k \neq 1$ una soluzione: $x_1 = 3$, $x_2 = 1 - k$, $x_3 = -4$;
se $k = -2$ infinite soluzioni: $x_1 = t$, $x_2 = t$, $x_3 = \frac{1-3t}{2}$ t $\forall t \in \mathbf{R}$;
se $k = 1$ infinite soluzioni: $x_1 = -1 - t$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$ $\forall t \in \mathbf{R}$).

€ 0,60
113

CAPITOLO V

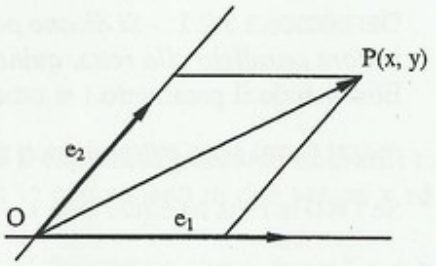
ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA PIANA

5.1 - Riferimento cartesiano.

Siano E_2 il piano affine euclideo, O un punto di E_2 e $B\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base dello spazio vettoriale S_2 associato ad E_2. Diciamo che il punto P ha coordinate (x, y) nel riferimento $R\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ se il vettore P – O ha componenti x ed y rispetto alla base $B\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e viceversa:

$$P = (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad P - O = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

Il punto O viene detto **origine** del sistema di riferimento ed ha coordinate (0, 0).
La retta per O parallela ad $\mathbf{e}_1$ viene detta **asse delle x** o **asse delle ascisse**, un suo punto ha coordinate (x, 0); la retta per O parallela ad $\mathbf{e}_2$ viene detta **asse delle y** o **asse delle ordinate**, un suo punto ha coordinate (0, y).
Se $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ sono versori e sono ortogonali il riferimento viene detto **riferimento cartesiano ortonormale** ed i versori sono indicati con **i** e **j.**



Le coordinate del punto medio di due punti dati sono le semisomme delle coordinate (v. Definizione 1.3.7 per n = 2).

ESEMPIO 5.1.1 - Il punto medio del segmento di estremi A(–2, –5) e B(0, 3) è il punto M di coordinate (–1, –1).

Se $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ sono **simmetrici rispetto all'origine**, si ha: $\mathbf{x_2 = -x_1}$, $\mathbf{y_2 = -y_1}$; infatti si verifica che l'origine è il loro punto medio. Se P_2 e P_1 sono **simmetrici rispetto all'asse x,** si ha: $\mathbf{x_2 = x_1}$, $\mathbf{y_2 = -y_1}$ ed analogamente per l'asse y.

Le componenti del vettore differenza di due punti sono date dalla differenza delle componenti, infatti si ha:

$$P_2 - P_1 = (P_2 - O) - (P_1 - O)$$

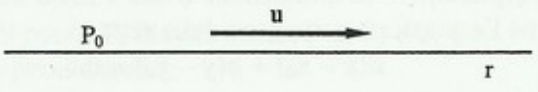
quindi se $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$

$$P_2 - P_1 = (x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) - (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2) = (x_2 - x_1)\mathbf{e}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{e}_2.$$

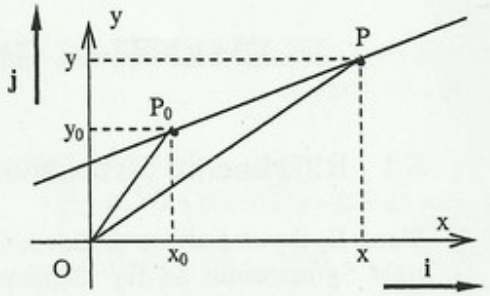
5.2 - Equazioni della retta.

Esistono più modi per rappresentare una retta del piano.
La retta per un punto P_0 parallela ad un vettore **u** è formata dai punti P tali che il vettore $P - P_0$ sia parallelo al vettore **u**, ossia

(1) $$P - P_0 = t\mathbf{u} \quad \text{ove t varia in } \mathbf{R}.$$



Tale formula, detta **equazione vettoriale della retta**, è indipendente dalla dimensione dello spazio vettoriale, ossia vale in dimensione 2, 3,..., n.



Fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, ossia un punto O detto origine ed una base ortonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ indichiamo con (x, y) le coordinate del punto P e con (x_0, y_0) le coordinate del punto P_0.
Risulta:
$P - P_0 = (P - O) - (P_0 - O) = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j}$.
Se $\mathbf{u} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j}$ la (1) diventa: $(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} = t(l\mathbf{i} + m\mathbf{j})$ ed eguagliando le componenti si ottengono le **equazioni parametriche della retta**:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

DEFINIZIONE 5.2.1. - *Si dicono **parametri direttori** della retta le componenti di un qualsiasi vettore parallelo alla retta, quindi la coppia (l, m) e le coppie ad essa proporzionali.*
Eliminando il parametro t si ottiene **l'equazione cartesiana della retta**. Se i parametri direttori (l, m) sono entrambi non nulli la retta ha equazione: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$.
Se $l = 0$ la retta ha equazione $x = x_0$, se $m = 0$ la retta ha equazione $y = y_0$.

ESEMPIO 5.2.1 - Scrivere le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta per P_0 di coordinate (2, –1) e parallela al vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$ eliminando il parametro t si ha: $3x - y - 7 = 0$.

Anche la retta per due punti P_0 e P_1 si può pensare come retta per un punto (per esempio P_0) e parallela al vettore $P_1 - P_0$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{ove} \quad x_1 \neq x_0 \text{ ed } y_1 \neq y_0.$$

Se $x_1 = x_0$ la retta ha equazione parametriche $x = x_0$, $y = y_0 + (y_1 - y_0)t$ e la sua equazione cartesiana è semplicemente: $x - x_0 = 0$, (infatti è un'equazione lineare in x ed y soddisfatta dalle coordinate di P_1 e P_0).

ESEMPIO 5.2.2 - Scrivere le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta per P_0 di coordinate (2, 3) e per P_1 di coordinate (3, –2).

Risulta $P_1 - P_0 = (1, -5)$ quindi: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$. Eliminando il parametro t si ha: $5x + y - 13 = 0$.

Una retta può anche essere individuata come retta per un punto P_0 ed ortogonale ad un vettore $\mathbf{n}$: è quindi formata dai punti P tali che:

$$(P - P_0) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

(L'espressione precedente rappresenta in dimensione 2 una retta, in dimensione 3 un piano, in dimensione 4 un iperpiano,..... in dimensione n una varietà lineare di dimensione n – 1).
Se $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ si ottiene l'equazione cartesiana della retta:

$$\mathbf{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

che è del tipo: $\mathbf{ax + by + c = 0}$ se si pone $c = -ax_0 - by_0$.
Un'equazione lineare in x ed y rappresenta una retta ed i coefficienti a, b della x e della y hanno il significato di componenti di un vettore ortogonale alla retta.
L'equazione di una retta è determinata a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Si osservi che la retta scritta nella forma cartesiana precedente ha come parametri direttori $(-b, a)$; se invece la retta è scritta in forma esplicita $\mathbf{y = mx + p}$, ha $(m, -1)$ come componenti di un vettore ortogonale, mentre i parametri direttori sono proporzionali alla coppia $(1, m)$.

ESEMPIO 5.2.3 - La retta per P_0 di coordinate $(2, -3)$ ed ortogonale ad $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ ha come equazione cartesiana:

$$2(x - 2) + 5(y + 3) = 0 \quad \text{cioé} \quad 2x + 5y + 11 = 0.$$

Notiamo che l'asse x essendo ortogonale al vettore $\mathbf{j}(0, 1)$ha equazione cartesiana $y = 0$, e l'asse y essendo ortogonale al vettore $\mathbf{i}(1, 0)$ ha equazione cartesiana $x = 0$.

5.3 - Cenni su questioni angolari.

Date due rette r ed s, dalle loro equazioni parametriche o cartesiane possiamo ricavare i parametri direttori (l, m) e (l', m'). In tal modo abbiamo le componenti di due vettori $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ che danno le direzioni delle rette.
Considerato come angolo α delle due rette uno qualsiasi dei quattro angoli (uguali a due a due) che esse formano, dalla formula del prodotto scalare: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{s}\| \cos(\mathbf{r}, \mathbf{s})$
si ricava il coseno dell'angolo α:

$$\cos \alpha = \pm \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2 + m^2}\sqrt{l'^2 + m'^2}}.$$

I coseni degli angoli che una retta forma con gli assi coordinati si dicono **coseni direttori** e sono definiti a meno di un segno.

ESEMPIO 5.3.1 - Date le rette r: $3x - y + 2 = 0$ ed s: $x - y + 7 = 0$ si ricava che il coseno del loro angolo è dato da: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{20}}{5}$ oppure $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{20}}{5}$.

In particolare si ricava la **condizione di ortogonalità fra due rette:**

$$\mathbf{ll' + mm' = 0} \qquad \mathbf{aa' + bb' = 0}$$

mentre dalla nozione di vettori paralleli si ricava la **condizione di parallelismo**:

$$\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{l'}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{m'}}, \quad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a'}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b'}}.$$

Se le rette sono scritte in forma esplicita come $y = mx + p$ ed $y = m'x + p'$ (cioè si sono scelti come parametri direttori rispettivamente $(1, m)$ ed $(1, m')$) le condizioni precedenti assumono la forma più semplice:
- condizione di parallelismo: $\mathbf{m = m'}$:
- condizione di perpendicolarità: $\mathbf{mm' + 1 = 0}$.

ESEMPIO 5.3.2 - Dato il punto P_0 di coordinate $(-2, 3)$ e la retta r: $2x + 5y + 1 = 0$, determinare: i) la retta per P_0 parallela ad r;

ii) la retta per P_0 ortogonale ad r.

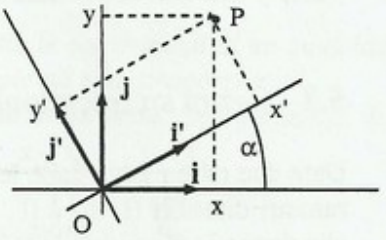
i) Una retta parallela ad r è del tipo $2x + 5y + h = 0$; dovendo passare per il punto $P_0(-2, 3)$ risulta $h = 4 - 15 \quad h = -11 \rightarrow 2x + 5y - 11 = 0$.

ii) Una retta ortogonale ad r è del tipo $5x - 2y + h = 0$; dovendo passare per il punto $P_0(-2, 3)$ risulta $h = 10 + 6 \quad h = 16 \rightarrow 5x - 2y + 16 = 0$.

Dopo aver osservato che $x \geq 0$ è un semipiano, come anche $y \geq 0$, considerando l'equazione vettoriale della retta sotto forma di prodotto scalare $(P - P_0) \cdot \mathbf{n} = 0$ si può notare che risulta $(P - P_0) \cdot \mathbf{n} \geq 0$ per tutti i punti P del semipiano verso cui è orientato $\mathbf{n}$, mentre $(Q - P_0) \cdot \mathbf{n} \leq 0$ è l'altro semipiano.

5.4 - Rotazioni degli assi cartesiani.

Una rotazione è un cambiamento di riferimento in cui non varia l'origine, ossia si passa da $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ a $R'(O, \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ ruotando di un angolo α. Usando note formule trigonometriche, i versori $\mathbf{i}'$ e $\mathbf{j}'$ della nuova base si possono esprimere nella base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$mediante le relazioni:



$$\mathbf{i}' = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}' = -\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j}$$

Si ha allora $P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' = x'(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}) + y'(-\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j}) =$
$= (x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)\,\mathbf{i} + (x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha)\,\mathbf{j}$ da cui segue:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha \\ y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Queste relazioni esprimono le coordinate di P nel riferimento R mediante le coordinate nel riferimento R'. Per esprimere le coordinate nel riferimento R' note quelle nel riferimento R si può risolvere il sistema (1) considerando x' ed y' come incognite e si ottiene:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ y' = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}.$$

ESEMPIO 5.4.1 - Il punto A ha coordinate $(\sqrt{2}, 2)$ nel riferimento $R(O, x, y)$ dopo la rotazione degli assi di 135° attorno all'origine ha coordinate:

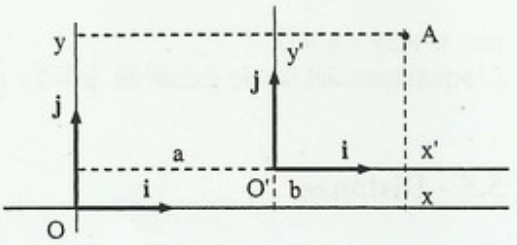
$$\begin{cases} x' = \sqrt{2}\cos 135° + 2\operatorname{sen}135° = -1 + \sqrt{2} \\ y' = -\sqrt{2}\operatorname{sen}135° + 2\cos 135° = -1 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

5.5 - Traslazione degli assi cartesiani.

Una traslazione è un cambiamento di riferimento in cui varia solo l'origine, mentre i versori degli assi restano fissi ossia si passa da $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ a $R'(O', \mathbf{i}, \mathbf{j})$.
Se il punto A ha coordinate (x, y) rispetto a $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ e ha coordinate (x', y') rispetto a $R'(O', \mathbf{i}, \mathbf{j})$, indicando con (a, b) le coordinate di O' poiché si ha:

$$A - O = (A - O') + (O' - O)$$

passando alle componenti si trova: $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$.



5.6 - Mutua posizione di due rette.

Due rette possono avere:
i) un punto comune e allora si dicono **incidenti**;
ii) infiniti punti comuni e allora si dicono **coincidenti**;
iii) nessun punto comune e allora si dicono **parallele**.

ESEMPIO 5.6.1 -
i) Le rette seguenti hanno in comune il punto (–1, 2):
$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ ed $s: 2x - y + 4 = 0$
ii) Le rette seguenti coincidono: $2x - y + 3 = 0$, $4x - 2y + 6 = 0$.
iii) Le rette seguenti sono parallele: $2x - y + 3 = 0$, $4x - 2y = 0$.
Le verifiche si fanno risolvendo i sistemi delle equazioni delle rette.

5.7 - Fasci di rette.

Si dice fascio **proprio** di rette l'insieme di tutte le rette del piano che passano per un dato punto, fascio **improprio** l'insieme di tutte le rette del piano parallele ad una data direzione.
Date due rette distinte r ed s di equazioni:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

una loro combinazione lineare con coefficienti λ e μ:

$$\mathbf{\lambda(ax + by + c) + \mu(a_1x + b_1y + c_1) = 0}$$

è l'equazione della generica retta del fascio; infatti essendo un'equazione lineare in x ed y rappresenta una retta, inoltre passa per il punto comune P_0 ad r ed s, oppure è parallela alla loro direzione comune.
Se $P_1 = (x_1, y_1)$ è diverso da P_0 vi è una ed una sola retta del fascio che passa per P_1, la sua equazione è:

$$(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)(ax + by + c) - (ax_1 + by_1 + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0.$$

ESEMPIO 5.7.1 - Scrivere l'equazione della retta appartenente al fascio individuato da
$s: \; x + 2y - 4 = 0$ ed $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ e passante per il punto $P_0 = (3, 1)$.
Dopo aver scritto r in forma cartesiana, $x - 2y + 5 = 0$, si scrive l'equazione del fascio:

$$\lambda(x + 2y - 4) + \mu(x - 2y + 5) = 0.$$

Si impone il passaggio per il punto $P_0 = (3, 1)$ e si ha:

$$\lambda(3 + 2 - 4) + \mu(3 - 2 + 5) = 0 \qquad \lambda + 6\mu = 0.$$

Tale equazione ha infinite soluzioni, si può scegliere ad esempio $\lambda = 6$ e $\mu = -1$ e si ottiene: $5x + 14y - 29 = 0$.

ESEMPIO 5.7.2 - Scrivere l'equazione del fascio improprio di rette parallele ad r di equazio-

ne: $x + 2y - 4 = 0$.
L'equazione del fascio è data da $x + 2y + k = 0$ al variare di k in **R**.

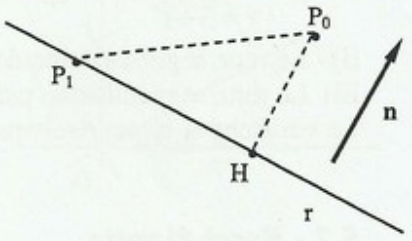
5.8 - Distanze.

a) **Distanza di due punti.**
Dati due punti $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ la loro distanza è il modulo del vettore $P_2 - P_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$ quindi:

$$d(P_2, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \ .$$

ESEMPIO 5.8.1 - La distanza del punto A(–3, 4) dall'origine è 5.

b) **Distanza di un punto da una retta.**
Considerati il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e la retta r di equazione $ax + by + c = 0$, siano $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto di r ed $\mathbf{n} = (a, b)$ un vettore ortogonale ad r.
Per definizione $\mathbf{n} \cdot (P_1 - P_0)$ è il prodotto del modulo di **n** per la proiezione con segno di $P_1 - P_0$ su **n**, ossia è il prodotto del modulo di **n** per la distanza di P_0 da r, a meno del segno perché qui si considerano distanze positive:



$$d(P_0, r) = \frac{|\mathbf{n} \cdot (P_0 - P_1)|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Esprimendo il prodotto scalare in componenti e ricordando che $c = -ax_1 - by_1$, perché P_1 verifica l'equazione di r si ottiene:

$$\mathbf{d(P_0, r)} = \frac{|\mathbf{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)}|}{\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}} = \frac{|\mathbf{ax_0 + by_0 + c}|}{\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}}.$$

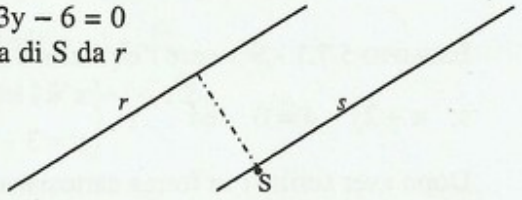
ESEMPIO 5.8.2 - La distanza di P(1, –2) dalla retta r di equazione $3x + 4y - 20 = 0$ è:

$$d(P, r) = \frac{|3 - 8 - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-25|}{5} = 5.$$

c) **Distanza di due rette parallele.**
La distanza di due rette parallele *r* ed *s* è la distanza di un qualsiasi punto di *s* da *r*.

ESEMPIO 5.8.3 - Siano *r*: $x + 3y + 1 = 0$, *s*: $x + 3y - 6 = 0$ ed il punto S(0, 2) appartenente ad *s*. La distanza di S da *r* sarà:

$$d(r, s) = d(S, r) = \frac{|0 + 6 + 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{10}}.$$



d) **Area del triangolo.**
L'area del triangolo di vertici P_1 P_2 P_3 si può calcolare, utilizzando i vettori, come la metà del modulo del prodotto vettoriale di $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$.

ESEMPIO 5.8.4 - Calcolare l'area *A* del triangolo di vertici $P_1(1, 2)$ $P_2(-1, 3)$ $P_3\left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

Poiché $P_2 - P_1 = (-2, 1, 0)$ e $P_3 - P_1 = \left(-\frac{1}{3}, -1, 0\right)$ si ha:

$(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) = \frac{7}{3}\mathbf{k}$ per cui A vale $\frac{7}{6}$.

5.9 - Esercizi proposti.

V.1 - Dati i punti A(1, 2) e B(–1, 3), determinare le coordinate del punto medio M del segmento AB e le coordinate del punto A' simmetrico di A rispetto a B. (M(0,5/2) A'(–3, 4))

V.2 - Di un triangolo ABC sono noti i vertici A(3, 4), B(1, 2) ed il baricentro G(2, 1). Determinare le coordinate del vertice C. (C(2, –3))

V.3 - Scrivere l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche della retta congiungente i punti A e B nei seguenti casi:

i) A(2, 1), B(3, –2); ($x = 2 + t$, $y = 1 - 3t$; $3x + y - 7 = 0$)

ii) A(2, 1), B(2, –3)). ($x = 2$, $y = 1 + 4t$; $x = 2$)

V.4 - Scrivere l'equazione cartesiana della retta r passante per il punto A(3, –5) e parallela alla retta $x + 2y - 4 = 0$. ($x + 2y + 7 = 0$)

V.5 - Date le rette r: $x + ky + k = 0$ ed s: $kx + y + k = 0$, determinare per quali valori di k:

i) le rette sono parallele; ($k = -1$ e $k = 1$ (coincidenti))

ii) il loro punto comune appartiene alla retta $t : x + y + 3 = 0$. ($k = -3$)

V.6 - Dati i punti A(0, 0), B(2, –1) e la retta r: $4x - 3y = 0$, determinare i punti C di r tali che il triangolo ABC sia isoscele sulla base BC. (C $(3\sqrt{5}/5, 4\sqrt{5}/5)$ e C'$(-3\sqrt{5}/5, -4\sqrt{5}/5)$)

V.7 - Date le rette r: $2x - y + 1 = 0$ ed s: $x - y = 0$, determinare l'equazione della retta r' simmetrica di r rispetto ad s. ($x - 2y - 1 = 0$)

V.8 - Dati i punti M(1, 1) e C(1, 0), determinare:

i) le coordinate dei punti A e B, vertici del triangolo ABC avente M come baricentro e tale che i vettori $A - C$ e $B - C$ siano paralleli rispettivamente ai vettori $\mathbf{u}(1, 1)$ e $\mathbf{v}(1, -2)$; (A(2, 1), B(0, 2))

ii) le coordinate dei punti P della retta MC tali che l'angolo APB sia retto. (P(1, $(3+\sqrt{5})/2$); P'(1, $(3-\sqrt{5})/2$))

V.9 - Date le rette r: $2x + by + 1 = 0$ ed s: $x - y + c = 0$, con b e c parametri reali, dire per quali valori dei parametri le rette sono:

i) incidenti; ($b \neq -2$)

ii) parallele non coincidenti; ($b = -2$ e $c \neq 1/2$)

iii) coincidenti. ($b = -2$ e $c = 1/2$)

V.10 - Date le rette r: $4x + 3y - 10 = 0$, s: $x + 5y + 6 = 0$, t: $3x - 2y + 1 = 0$, determinare:

i) perimetro ed area del triangolo da esse individuato ($2p = 5 + \sqrt{13} + \sqrt{26}$; $S = 17/2$)

ii) l'equazione della retta contenente un'altezza a scelta del triangolo.

V.11 - Verificare se le tre rette r: $x + y - 5 = 0$, s: $2x - 3y + 1 = 0$, t: $11x - 14y = 0$ appartengono allo stesso fascio. (si)

V.12 - Determinare la mediana della striscia individuata dalle rette parallele $x + 2y = 0$ ed $x + 2y + 7 = 0$. $(x + 2y + 7/2 = 0)$

V.13 - Determinare le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette: $x + y + 7 = 0$, $4x - 3y + 1 = 0$. $\left(\left(5 \pm 4\sqrt{2}\right)x + \left(5 \mp 3\sqrt{2}\right)y + 35 \pm \sqrt{2} = 0\right)$

CAPITOLO VI

ALCUNI LUOGHI NOTEVOLI DEL PIANO

6.1 - Generalità sulla rappresentazione delle curve piane.

Una linea piana può essere definita o come traiettoria di un punto che si muove nel piano secondo una data legge oppure mediante una proprietà che caratterizza i suoi punti. Quindi fissato un sistema di riferimento cartesiano $R(O, x, y)$ si hanno le seguenti rappresentazioni della curva:

- come traiettoria di un punto P(t) le cui coordinate sono espresse in funzione di un parametro t

(1) $$x = x(t) \quad y = y(t)$$

- come luogo dei punti P(x, y) le cui coordinate soddisfano un'equazione cartesiana del tipo

(2) $$f(x, y) = 0.$$

In generale si può passare, almeno su piccoli tratti di curva dalla (1) alla (2) eliminando t; viceversa risolvendo la (2) rispetto ad una delle incognite si perviene alla (1).
Affinchè la definizione data corrisponda alla nozione intuitiva che abbiamo di curva, occorre che le funzioni che appaiono in (1) ed in (2) soddisfino a condizioni restrittive quali, ad esempio, la continuità. Tale argomento sarà sviluppato in altri corsi.

DEFINIZIONE 6.1.1 - *Se f è un polinomio la curva si dice* ***algebrica*** *ed il grado del polinomio si dice* ***ordine*** *della curva, altrimenti la curva si dice* ***trascendente***.

Ad esempio le rette e le circonferenze nel piano sono curve algebriche del primo e secondo ordine, la sinusoide $y - \sin x = 0$ è una curva trascendente.

DEFINIZIONE 6.1.2 - *Si dice* ***conica*** *ogni linea piana algebrica del secondo ordine.*

6.2 - La circonferenza.

6.2.1 - Equazione della circonferenza.

Nel piano, la circonferenza è il luogo dei punti P aventi distanza costante r da un punto fisso C, detto centro: $CP = r$.
Se nel piano è dato un riferimento cartesiano ortogonale, fissato un numero reale positivo r ed indicate con (α, β) le coordinate di C, la condizione affinché un generico punto P(x, y) appartenga alla circonferenza è espressa dall'equazione:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Sviluppando i calcoli l'equazione diventa:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

con $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$.
Si può quindi dire che l'equazione della circonferenza è una equazione di secondo grado in x ed y con le condizioni:

- i coefficienti di x^2 e di y^2 sono eguali,
- il coefficiente di xy è zero (cioè manca il termine xy).

Affinché un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenti una circonferenza reale di centro $C(\alpha, \beta)$ con $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = -\frac{b}{2}$ e raggio r, il numero $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ deve essere ≥ 0. Se il raggio è zero, la circonferenza si riduce al suo centro.

ESEMPIO 6.2.1 - L'equazione $3x^2 + 3y^2 - 2x + 5y - 21 = 0$ rappresenta la circonferenza di centro $C\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{25}{36} + 7}$.
L'equazione $3x^2 + 3y^2 - 2x + 5y + 21 = 0$ non rappresenta punti reali in quanto il raggio r risulta $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{25}{36} - 7} = \sqrt{-\frac{223}{36}}$, che non è un numero reale.

ESEMPIO 6.2.2 - L'equazione $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$ rappresenta la circonferenza di centro $C(-1, -2)$ e raggio zero, il cui unico punto è C stesso.

6.2.2 - Equazione della tangente alla circonferenza.

Data la circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ ed un suo punto $P_0(x_0, y_0)$, la tangente in P_0 a σ è la retta per P_0 perpendicolare alla retta CP_0. Come parametri direttori della retta CP_0 possiamo assumere le differenze $x_0 - \alpha$ ed $y_0 - \beta$, quindi l'equazione della retta tangente risulta:

$$(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) = 0.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$x_0x + y_0y - \alpha x - \beta y - x_0^2 - y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 = 0.$$

Poiché il punto P_0 appartiene alla circonferenza, le sue coordinate ne soddisfano l'equazione:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \gamma = 0 \text{ da cui } -x_0^2 - y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 = \gamma - \alpha x_0 - \beta y_0.$$

L'equazione della retta tangente si può allora scrivere:

$$x_0x + y_0y - \alpha x - \beta y + \gamma - \alpha x_0 - \beta y_0 = 0$$

ovvero

$$\mathbf{x_0x + y_0y - \alpha(x + x_0) - \beta(y + y_0) + \gamma = 0.}$$

Questa formula si ottiene dall'equazione della circonferenza con la **regola degli sdoppiamenti** cioè "sdoppiando" x^2 in x_0x, y^2 in y_0y, x in $\frac{x + x_0}{2}$, y in $\frac{y + y_0}{2}$.

ESEMPIO 6.2.3 - Dati la circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ed il suo punto $P(1, 2)$, l'equazione della retta tangente a σ in P si può scrivere:
$1x + 2y - 1(x + 1) - 0(y + 2) - 3 = 0$ cioé $y - 2 = 0$.

6.2.3 - Fascio di circonferenze.

Date due circonferenze σ_1 e σ_2 di equazioni rispettivamente:

$$\sigma_1 : x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + \gamma_1 = 0$$
$$\sigma_2 : x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y + \gamma_2 = 0$$

consideriamo l'equazione:

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + \gamma_1) + \mu(x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y + \gamma_2) = 0$$

ottenuta come combinazione lineare delle equazioni di σ_1 e σ_2 con coefficienti reali λ e μ non entrambi nulli.
Tale equazione si può scrivere:

$$(3) \qquad (\lambda + \mu)(x^2 + y^2) - 2(\alpha_1\lambda + \alpha_2\mu)x - 2(\beta_1\lambda + \beta_2\mu)y + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 = 0$$

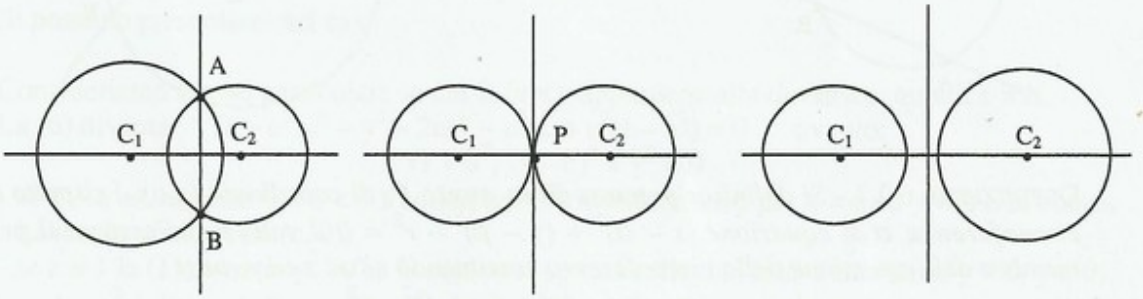
e si hanno le seguenti possibilità:

1) se le due circonferenze sono concentriche, cioè $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$ anche la (3) rappresenta, fissati due numeri reali λ e μ, con $\lambda + \mu \neq 0$, una circonferenza ad esse concentrica. La (3) rappresenta, al variare di λ e μ, un insieme di infinite circonferenze concentriche detto **fascio di circonferenze concentriche**;
2) se le due circonferenze non sono concentriche la (3) rappresenta, fissati due numeri reali λ e μ, con $\lambda + \mu \neq 0$, una circonferenza che passa per gli eventuali punti comuni a σ_1 e σ_2 (in quanto le coordinate di tali punti soddisfano le equazioni di σ_1 e σ_2 e quindi la (3)).

La (3) rappresenta al variare di λ e μ, un insieme di infinite circonferenze detto **fascio di circonferenze.**
Se $\lambda + \mu = 0$ la (3) è l'equazione di una retta:

$$2(\alpha_1 - \alpha_2)x + 2(\beta_1 - \beta_2)y - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

detta **asse radicale** che passa per gli eventuali punti comuni a σ_1 e σ_2 detti **punti base del fascio** in quanto tutte le circonferenze del fascio passano per essi.
E' facile verificare che l'asse radicale è perpendicolare alla congiungente i centri di σ_1 e σ_2 e che tutti i centri delle circonferenze del fascio appartengono a tale congiungente che si dice **asse centrale del fascio**.



Se le circonferenze σ_1 e σ_2 sono tangenti l'asse radicale passa per il punto di tangenza ed è perpendicolare all'asse centrale: coincide quindi con la tangente comune a σ_1 e σ_2.
Ne segue che tutte le circonferenze tangenti ad una circonferenza σ in un suo punto P appartengono al fascio individuato da σ e dalla tangente a σ in P.

Considerato un qualunque punto A del piano, diverso dagli eventuali punti base, esiste sempre una ed una sola circonferenza del fascio che passa per A: infatti imponendo che le coordinate di A soddisfino la (3) si ottiene un'equazione di I° grado in λ e μ e quindi si ottiene un unico rapporto λ/μ che individua la circonferenza cercata.

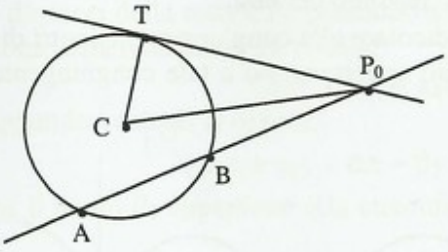
ESEMPIO 6.2.4 - Determinare l'equazione della circonferenza passante per l'origine e tangente la circonferenza σ di equazione: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ in P(1, 2).
Le circonferenze tangenti σ in P appartengono al fascio individuato da σ e dalla tangente a σ in P ed hanno quindi equazione: $\lambda(x^2 + y^2 - 2x - 3) + \mu(y - 2) = 0$.
La circonferenza di tale fascio passante per l'origine si ottiene scegliendo λ e μ in modo

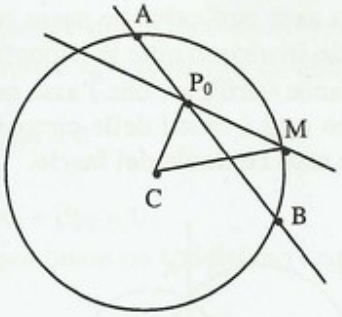
che (0, 0) soddisfi l'equazione; deve essere $-3\lambda - 2\mu = 0$, da cui $\mu = -\frac{3\lambda}{2}$ e l'equazione della circonferenza risulta: $x^2 + y^2 - 2x - \frac{3}{2}y = 0$.

6.2.4 - Potenza di un punto rispetto alla circonferenza.

Considerati in un piano una circonferenza σ (di centro $C(\alpha, \beta)$ e raggio r) ed un punto P_0 (di coordinate (x_0, y_0)), è noto dalla geometria elementare che se si conduce da P_0 una secante s a σ e si indicano con A e B i punti di intersezione (eventualmente coincidenti), il prodotto $P_0A \cdot P_0B$ non varia al variare di s.

- se P_0 è esterno alla circonferenza risulta $P_0A \cdot P_0B = (P_0T)^2$ dove T è il punto di tangenza di una tangente per P_0 a σ. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CTP_0 si ha $(P_0T)^2 = (P_0C)^2 - (CT)^2 = (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - r^2$;
- se P_0 appartiene alla circonferenza risulta $P_0A \cdot P_0B = 0$ in quanto $P_0 = A = B$;
- se P_0 è interno alla circonferenza, indicato con M un estremo della corda per P_0 e perpendicolare al raggio CP_0, risulta $P_0A \cdot P_0B = (P_0M)^2$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CMP_0 si ha:
  $(P_0M)^2 = (CM)^2 - (P_0C)^2 = r^2 - [(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2]$.





DEFINIZIONE 6.2.1.- *Si definisce **potenza di un punto P_0 di coordinate (x_0, y_0) rispetto alla circonferenza σ** di equazione $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$ il valore che assume il primo membro dell'equazione della circonferenza sostituendo x_0 ad x ed y_0 ad y*

$$p = (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - r^2.$$

Da quanto visto sopra risulta il significato geometrico di p; in particolare p ha segno + se P_0 è esterno alla circonferenza, ha segno – se P_0 è interno alla circonferenza e risulta ovviamente $p = 0$ se P_0 appartiene alla circonferenza.

Consideriamo ora due circonferenze σ_1 e σ_2 di equazioni rispettivamente:

$$\sigma_1: \quad x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + \gamma_1 = 0$$
$$\sigma_2: \quad x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y + \gamma_2 = 0$$

Un punto P (X,Y) ha eguale potenza rispetto alle due circonferenze se:

$$X^2 + Y^2 - 2\alpha_1 X - 2\beta_1 Y + \gamma_1 = X^2 + Y^2 - 2\alpha_2 X - 2\beta_2 Y + \gamma_2$$

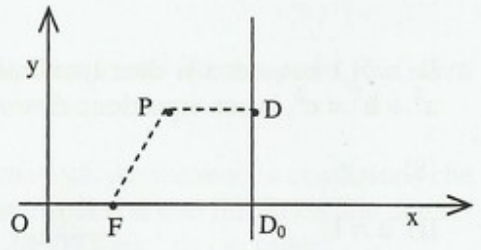
cioè, semplificando: $2(\alpha_1 - \alpha_2)X + 2(\beta_1 - \beta_2)Y - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$ che è l'equazione dell'asse radicale; quindi: **l'asse radicale è il luogo dei punti aventi la stessa potenza rispetto alle due circonferenze.**

6.3 - Le coniche come luoghi geometrici.

6.3.1 - Coniche elementari.

DEFINIZIONE 6.3.1 - *Assegnati in un piano un punto F detto* ***fuoco*** *ed una retta d detta* ***direttrice****, si dice* ***conica*** *il luogo descritto da un punto P che varia nel piano in modo che le sue distanze dal punto F e dalla retta d conservino rapporto costante* $e \geq 0$ *detto* ***eccentricità****.*

Se indichiamo con D la proiezione di P su d, la condizione geometrica che deve essere soddisfatta dal generico punto P della conica è data da:



(4) $$\frac{PF}{PD} = e.$$

Per esprimere analiticamente la condizione si sceglie un riferimento cartesiano avente l'asse x coincidente con la perpendicolare per F alla direttrice ed orientato da F verso d: F avrà coordinate (c, 0) ed d avrà equazione $x - h = 0$. Indicate con (x, y) le coordinate del generico punto P della conica, la (4) elevata al quadrato diventa:

(5) $$\frac{(x-c)^2 + y^2}{(x-h)^2} = e^2.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione:

(6) $$\mathbf{(1-e^2)x^2 + y^2 - 2(c - e^2h)x + c^2 - e^2h^2 = 0}$$

Si possono presentare vari casi.

Consideriamo il caso particolare in cui il fuoco appartiene alla direttrice, quindi $c = h$.
La (6) diventa: $(1-e^2)x^2 + y^2 - 2c(1-e^2)x + c^2(1-e^2) = 0$ ovvero:

$$(1-e^2)(x-c)^2 + y^2 = 0$$

- se $1 - e^2 > 0$ quindi $0 < e < 1$ l'equazione è soddisfatta solo per $x = c$ ed $y = 0$ e la conica ha il solo punto reale (c, 0);
- se $e = 1$ la (1) diventa $y^2 = 0$ e la conica si spezza nelle due rette coincidenti $y = 0$, $y = 0$;
- se $1 - e^2 < 0$ e quindi $e > 1$ (essendo e positivo) la conica si spezza in due rette reali distinte ed incidenti nel fuoco: $y = \pm\sqrt{e^2 - 1}\,(x - c)$.

Le coniche così ottenute si dicono **coniche degeneri.**

Supponiamo ora che F non appartenga alla direttrice, quindi con $c \neq h$, ed esaminiamo i vari casi che si presentano al variare di **e**.

I) $\mathbf{e \neq 1}$
Per semplificare l'equazione si sceglie come origine O del riferimento il punto dell'asse x per cui risulta $OF / OD_0 = e^2$ (essendo D_0 il punto di intersezione della direttrice con l'asse x); risulta allora $c/h = e^2$ e quindi $c - e^2h = 0$.

La (6) diventa: $(1-e^2)x^2 + y^2 + \dfrac{c^2(e^2-1)}{e^2} = 0$ od ancora

$$\frac{x^2}{c^2/e^2} + \frac{y^2}{c^2(1-e^2)/e^2} = 1.$$

Essendo l'equazione simmetrica in x ed y, l'origine è centro di simmetria della conica e la conica si dice **a centro**.

Se $e < 1$ la conica si dice **ellisse**; ponendo: $a^2 = c^2/e^2$, $b^2 = c^2(1 - e^2)/e^2$, da cui segue $a^2 - b^2 = c^2$, la sua equazione diventa:

(7) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se $e > 1$ la conica si dice **iperbole**; ponendo: $a^2 = c^2/e^2$, $b^2 = c^2(e^2 - 1)/e^2$, da cui segue $a^2 + b^2 = c^2$, la sua equazione diventa:

(8) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

II) $e = 1$

La conica risulta in questo caso il luogo dei punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice e si dice **parabola.** In questo caso la (6) diventa:

$$y^2 - 2(c - h)x + c^2 - h^2 = 0.$$

Scegliendo l'origine O del riferimento nel punto medio tra F e D_0 risulta $c = -h$ e l'equazione (6) si semplifica ulteriormente:

$$y^2 - 4cx = 0$$

od anche

(9) $$y^2 = 2px$$

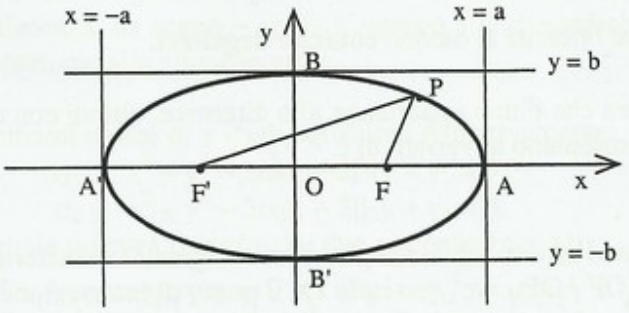
con $p = 2c$, che si può supporre positivo orientando opportunamente gli assi.

Abbiamo così ottenuto tre tipi di coniche: ellisse, iperbole (coniche a centro) e parabola le cui equazioni hanno una forma particolarmente semplice dovuta al riferimento scelto.
Tale forma si dice **forma canonica**.

6.3.2 - Ellisse.

L'equazione canonica dell'ellisse è: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (7)

con le quantità positive a,b,c,e legate dalle relazioni: $a^2 = c^2/e^2$, $b^2 = c^2(1 - e^2)/e^2$ da cui segue $a^2 - b^2 = c^2$.



Intersecando l'ellisse con gli assi coordinati si trovano quattro punti di intersezione, detti **vertici**: A(a, 0), A'(– a, 0), B(0, b), B'(0, – b).
Poiché per i punti dell'ellisse risulta sempre $|x| \le a$, $|y| \le b$, essi sono tutti interni al ret-

tangolo individuato dalle rette $x = -a$, $x = a$, $y = -b$, $y = b$.
Se P(x, y) è un punto dell'ellisse, lo sono anche $P_1(x, -y)$, $P_2(-x, y)$, $P_3(-x, -y)$, si ha che l'ellisse ha due assi di simmetria ortogonali che si dicono **assi dell'ellisse** che si incontrano nel **centro di simmetria**.
Per le proprietà di simmetria anche il punto $F'(-c, 0)$ e la retta $x = -h$ sono rispettivamente fuoco e direttrice quindi l'ellisse ha due fuochi e due direttrici, la retta FF' si dice **asse focale.**

Usando i due fuochi si può dimostrare una proprietà caratterizzante dell'ellisse che viene anche usata per definirla:

PROPRIETÀ 6.3.1 - *L'ellisse è il luogo dei punti del piano aventi da due punti fissi, detti fuochi, distanze con somma costante 2a.*
Dimostrazione.

i) Proviamo dapprima che l'ellisse gode di questa proprietà. Applicando la condizione che caratterizza l'appartenenza di un punto P all'ellisse rispetto ai due fuochi ed alle due direttrici, si ha che valgono le relazioni: $PF/PD = e$, $PF'/PD' = e$, da cui segue:
$PF = e\,PD$, $PF' = e\,PD'$.
Essendo $PD + PD' = 2|h| = 2c/e^2$, segue che $PF + PF' = e\,(PD + PD') = 2c/e = 2a$.

ii) Vediamo ora che i punti che soddisfano alla condizione $PF + PF' = 2a$ sono i punti dell'ellisse di equazione (7). Scegliamo un riferimento cartesiano ortogonale avente come asse x l'asse focale e come origine il punto medio di FF': risulta $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$. Affinché un punto P(x, y) soddisfi alla condizione $PF + PF' = 2a$ deve essere:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

elevando al quadrato si ottiene:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = (-a)\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$c\,(x - a^2/c) / a = -\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$e\,(x - h) = -\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{essendo } c/a = e,\ a^2/c = h$$

ed elevando al quadrato: $e^2\,(x-h)^2 = (x-c)^2 + y^2$ che è la (5).

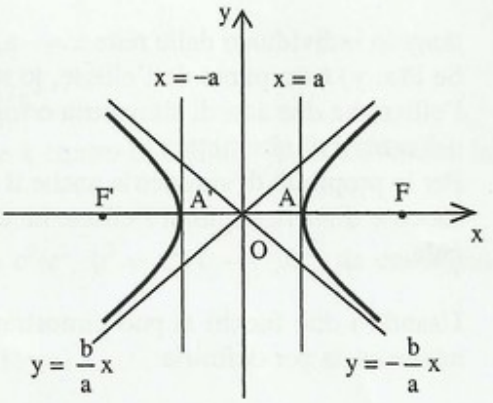
ESEMPIO 6.3.1 - Determinare l'equazione dell'ellisse di fuochi $F_1(1, 0)$ ed $F_2(-1, 0)$ e tale che la somma delle distanze dai fuochi sia 8.
Un punto P(x, y) appartiene all'ellisse se $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 8$. Isolando un radicale e quadrando si ottiene $(x-1)^2 + y^2 = 64 + (x+1)^2 + y^2 - 16\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ e semplificando $-4x - 64 = -16\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ cioè $4\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = x + 16$ da cui:
$(x+16)^2 = 16\,(x^2 + 2x + 1 + y^2)$ ed eseguendo i calcoli $15x^2 + 16y^2 = 240$ cioè $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{15} = 1$.

6.3.3 - Iperbole.

L'equazione canonica dell'iperbole è: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (8)

con le quantità positive a,b,c,e legate dalle relazioni: $a^2 = c^2/e^2$, $b^2 = c^2(e^2 - 1)/e^2$ da cui segue: $a^2 + b^2 = c^2$. Anche qui si hanno le simmetrie rispetto agli assi coordinati ed all'origine: anche l'iperbole ha **due assi di simmetria ortogonale, un centro di simmetria, due fuochi e due direttrici.**

Solo l'asse x (asse focale o trasverso) ha intersezioni reali con l'iperbole nei punti A(a, 0), A'(–a, 0) detti **vertici**; l'asse y non interseca l'iperbole e si dice non trasverso.
Risolvendo l'equazione (8) rispetto ad y si ricava: $y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, quindi si hanno valori reali di y solo per $|x| \geq a$; internamente alla striscia delimitata dalle rette x = a ed x = – a non si hanno punti dell'iperbole.



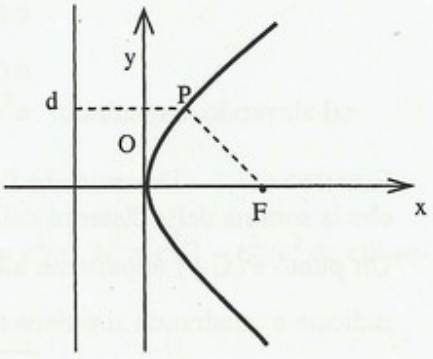
Al crescere di $|x|$ anche $|y|$ cresce e la curva si avvicina indefinitamente alle rette $y = \frac{b}{a}x$ oppure $y = -\frac{b}{a}x$: tali rette sono gli **asintoti** dell'iperbole.

Anche per l'iperbole si può dimostrare una proprietà caratterizzante analoga a quella vista nel caso dell'ellisse:

PROPRIETÀ 6.3.2 - *L'iperbole è il luogo dei punti del piano avente da due punti fissi, detti fuochi, distanze con differenza costante in valore assoluto 2a.*

6.3.4 - Parabola.

L' equazione canonica della parabola è: $\mathbf{y^2 = 2px}$ $(p > 0)$ (9).
Tale curva, nel riferimento canonico, passa per l'origine, detto **vertice**, che è la sola intersezione con gli assi coordinati.
L'asse delle x è asse di simmetria e viene detto **asse della parabola,** non c'è invece simmetria rispetto all'asse delle y, non c'è quindi centro di simmetria, c'è un solo **fuoco** F di coordinate $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, ed una sola **direttrice** di equazione $x + \frac{p}{2} = 0$.
Poiché per la parabola si ha eccentricità e = 1 la definizione 4.3.1 diventa:
La parabola è il luogo dei punti equidistanti da un punto, detto fuoco, e da una retta, detta direttrice.



ESEMPIO 6.3.2 - Determinare l'equazione della parabola avente fuoco F(1, 0) e direttrice di equazione x + 1 = 0.
Un punto P(x, y) appartiene alla parabola se la sua distanza da F, $PF = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ è uguale alla distanza |x + 1| di P dalla direttrice cioè: $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x + 1|$. Elevando al quadrato si ha: $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1$ da cui $y^2 = 4x$.

Vediamo ora alcuni esempi più generali.

ESEMPIO 6.3.3 - Considerata la conica $x^2 + 3y^2 - 4 = 0$ determinarne il tipo, la distanza fo-

cale, l'eccentricità, i vertici, i fuochi.

L'equazione si può trasformare in $\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$ e in $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4/3}=1$ che è l'equazione canonica di una ellisse. Ricordando le posizioni fatte si ha:

- semiasse maggiore $a = 2$;
- semiasse minore $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;
- distanza focale $c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{4-\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$;
- eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$;
- vertici $A(2, 0),\ A'(-2, 0),\ B\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),\ B'\left(0,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

ESEMPIO 6.3.4 - Considerata la conica $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$ determinarne il tipo, la distanza focale, i vertici, i fuochi, direttrici e asintoti.

L'equazione si può trasformare in $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ che è l'equazione canonica di una iperbole.

Ricordando le posizioni fatte si ha:

- semiasse maggiore $a = 2$;
- semiasse minore $b = 1$;
- distanza focale $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$;
- eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
- vertici $A(2, 0),\ A'(-2, 0)$;
- fuochi $F(\sqrt{5}, 0),\ F'(-\sqrt{5}, 0)$;
- direttrici $x = h = \frac{a^2}{c},\ x = -h = -\frac{a^2}{c}$ da cui $x - \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0$ ed $x + \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0$;
- asintoti $y = \frac{x}{2}$ ed $y = -\frac{x}{2}$.

ESEMPIO 6.3.5 - Data la parabola $3y^2 - 2x = 0$ determinarne l'equazione canonica, fuoco e direttrice.

L'equazione si può trasformare in $y^2 = 2x/3$, quindi $p = 1/3$ e $c = p/2 = 1/6$. Risulta allora che il fuoco è $F(1/6, 0)$ e la direttrice è $x = -1/6$.

ESEMPIO 6.3.6 - Determinare l'equazione della parabola avente fuoco $F(-1, -3)$ e direttrice $x = y$.

Un punto $P(x, y)$ appartiene alla parabola se la sua distanza da F, $PF = \sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}$ è uguale alla distanza $\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$ di P dalla direttrice cioè: $\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2} = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$.

Elevando al quadrato si ha: $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = (x^2 - 2xy + y^2)/2$ da cui $2x^2 + 4x + 2 + 2y^2 + 12y + 18 = x^2 - 2xy + y^2$ cioè $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 12y + 20 = 0$ oppure:

$$(x + y)^2 + 4x + 12y + 20 = 0.$$

ESEMPIO 6.3.7. - Determinare l'equazione dell'iperbole di fuochi $F_1(-2, 2)$ ed $F_2(4, 2)$ tale che la differenza delle distanze dei punti dell'iperbole dai fuochi sia, in valore assoluto, 4.
Un punto P(x, y) appartiene all'iperbole se

$$\left| \sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2} - \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \right| = 4.$$

Isolando un radicale e quadrando si ottiene:

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = (\pm 4 + \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2})^2$$

ed eseguendo i calcoli:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 16 + x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 \pm 8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

$12x - 12 = \pm 8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$, da cui ancora, semplificando e quadrando:
$(3x-3)^2 = 4(x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4)$ cioè $5x^2 - 4y^2 + 16y + 14x - 71 = 0$.

Da questi ultimi esempi si vede che una conica, definita come luogo geometrico, ha, in un riferimento qualunque, cioè non nel riferimento canonico, come equazione un generico polinomio di secondo grado in x ed y eguagliato a zero. Questo è coerente con la Definizione 6.1.2 di conica.

6.4 - Esercizi proposti.

VI.1 - Dire quali tra le seguenti equazioni rappresentano una circonferenza ed, in tal caso, determinarne centro e raggio:

i) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$; ($C(0, 1)$ $r = 2$)
ii) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$; ($C(1, 2)$, $r = 0$)
iii) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 12 = 0$. (no)

VI 2 - Scrivere l'equazione della circonferenza σ di centro $C(1, -2)$ e soddisfacente ad una delle seguenti condizioni:

i) di raggio 2; ($x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$)
ii) passante per il punto P(3, 1); ($x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$)
iii) tangente all'asse x; ($x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$)
iv) tangente alla retta s di equazione $x - y + 1 = 0$; ($x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$)
v) secante la retta s: $x - y + 1 = 0$ secondo un segmento di lunghezza 4. ($x^2 + y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$)

VI.3 - Scrivere l'equazione della circonferenza σ soddisfacente alle seguenti condizioni:

i) i punti A(1, 3) e B(–3, 5) sono estremi di un diametro; ($x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$)
ii) passa per i punti A(2, 0), B(0, 1), C(–1, 1); ($x^2 + y^2 + x + 5y - 6 = 0$)
iii) passa per i punti A(1, 2), B(–1, 0) ed ha centro sulla retta $4x - y - 4 = 0$. ($x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$)

VI.4 - Determinare la posizione reciproca delle seguenti coppie di circonferenze σ_1 e σ_2 nei seguenti casi :

i) σ_1: $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$ e σ_2: $x^2 + y^2 + 2x = 0$; (esterne)
ii) σ_1: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e σ_2: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$; (tangenti)
iii) σ_1: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ e σ_2: $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$. (secanti)

VI.5 - Dati la circonferenza σ: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ed i due punti A(3, 0) e B(0, 0), dire se i punti appartengono alla circonferenza o sono interni o esterni; se possibile condurre da essi

le tangenti a σ. (A esterno, tangenti da A: $y = \pm (x-3)/\sqrt{3}$; $B \in \sigma$, tangente in B: $x = 0$)

VI.6 - Tra tutte le circonferenze tangenti alla retta $x + 2y - 3 = 0$ nel suo punto P(1, 1) determinare quella che:

i) passa per A(2, –1); $(3x^2 + 3y^2 - x + 4y - 9 = 0)$

ii) ha centro sull'asse y. $(x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0)$

VI.7 - Tra tutte le circonferenze tangenti a σ: $x^2 + y^2 - 5 = 0$ in A(2, 1) trovare quelle tangenti a σ': $4x^2 + 4y^2 - 5 = 0$. $(x^2 + y^2 - x - y/2 - 5/2 = 0$ e $x^2 + y^2 - 3x - 3y/2 + 5/2 = 0)$

VI.8 - Data la circonferenza σ: $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ ed il suo punto A(0, 3) determinare:

i) centro e raggio di σ; $(C(-1, 1), r = \sqrt{5})$

ii) la tangente a σ in A; $(x + 2y - 6 = 0)$

iii) gli altri vertici del quadrato inscritto in σ avente un vertice in A. $((-2, -1), (1, 0), (-3, 2))$

VI.9 - Determinare vertici, fuochi ed eventuali asintoti delle seguenti coniche:

i) $2x^2 + 8y^2 = 12$;

ii) $5x^2 - 7y^2 = 5$;

iii) $x^2 - 3y = 0$;

iv) $x^2/3 + y^2/2 = 6$;

v) $x^2/6 + y^2/2 = 6$;

vi) $2x^2 + 8y^2 = 12$.

VI.10 - Determinare l'equazione della retta tangente alla conica $x^2 - 2y = 0$ nel suo punto P(2, 2). $(2x - y - 2 = 0)$

VI.11 - Dati la circonferenza σ di equazione: $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0$ ed il suo punto P(1, 1), determinare:

i) l'equazione della retta r tangente a σ in P; $(x + y - 2 = 0)$

ii) l'equazione della circonferenza tangente a σ in P e passante per l'origine; $(x^2 + y^2 - x - y = 0)$

iii) l'equazione della conica avente come direttrice la retta r, come fuoco il punto F(3, 3) ed eccentricità $e = \sqrt{2}/2$. $(3x^2 + 3y^2 - 2xy - 20x - 20y + 68 = 0)$

VI.12 - Date le circonferenze σ_1 e σ_2 di equazioni rispettivamente: $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$:

i) verificare che sono secanti e determinare l'equazione della retta passante per i loro punti comuni P e Q; $(x + 2y - 5 = 0)$

ii) determinare l'equazione della circonferenza passante per P e Q ed avente centro sulla retta $x - y + 2 = 0$; $(x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0)$

iii) determinare l'equazione della conica avente come direttrice la retta PQ, come fuoco il punto F (4, 8) ed eccentricità $e = \sqrt{5}$. $(3y^2 + 4xy - 2x - 4y - 55 = 0)$

VI.13 - Date le circonferenze σ_1 e σ_2 di equazioni rispettivamente: $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$ e $x^2 + y^2 - 4y = 0$:

i) verificare che sono secanti in due punti A e B; $(A(0, 0), B(2, 2))$

ii) determinare l'equazione della circonferenza avente diametro AB; $(x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0)$

iii) detto A il punto di ascissa minore tra A e B, determinare l'equazione della parabola γ avente vertice in A e fuoco in B. $(x^2 + y^2 - 2xy - 16x - 16y = 0)$

VI.14 - Dati: la circonferenza σ di equazione: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, il suo punto P(3, 1) e la retta r di equazione: $x + y = 0$, determinare:

i) l'equazione della circonferenza γ tangente a σ in P ed avente il centro sulla retta r; $(x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0)$

ii) l'equazione della retta s tangente a γ in P; $(x = 3)$

iii) l'equazione ed il tipo della conica avente fuoco in P, direttrice relativa a P la retta r e passante per il punto A(2, 2); $(7x^2 + 7y^2 - 2xy - 48x - 16y + 80 = 0$, ellisse)

iv) l'area del triangolo avente un lato su r, uno su s ed uno sulla congiungente P con il centro C di γ. $(S = 8)$

CAPITOLO VII

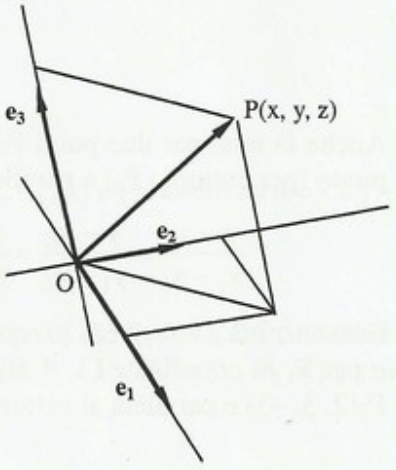
ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO: PIANI E RETTE

7.1 - Riferimento cartesiano.

Siano E_3 lo spazio affine euclideo, O un punto di E_3 e $B\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base dello spazio vettoriale S_3 associato ad E_3. Diciamo che il punto P ha coordinate (x, y, z) nel riferimento $R\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se il vettore P – O ha componenti x, y, z rispetto alla base $B\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e viceversa:

$$P = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad P - O = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Il punto O viene detto origine del sistema di riferimento ed ha coordinate (0, 0, 0).
La retta per O parallela ad $\mathbf{e}_1$ viene detta **asse delle x** o **asse delle ascisse**, un suo punto ha coordinate (x, 0, 0), la retta per O parallela ad $\mathbf{e}_2$ viene detta **asse delle y** o **asse delle ordinate**, un suo punto ha coordinate (0, y, 0), la retta per O parallela ad $\mathbf{e}_3$ viene detta **asse delle z** o **asse delle quote**, un suo punto ha coordinate (0, 0, z).
Nel seguito supporremo che il riferimento $R\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sia formato da una base ortonormale positiva $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di S_3 ossia formata da versori a due a due ortogonali. (v. Definizione 1.3.6).
Le coordinate del punto medio di due punti dati sono le semisomme delle coordinate.
(v. Definizione 1.3.7 nel caso n = 2).



ESEMPIO 7.1.1 - Il punto medio del segmento di estremi A(2, –5, 6) e B(0, 3, 2) è il punto M(1, –1, 4).

Se $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ sono simmetrici rispetto all'origine, si ha:

$$x_2 = -x_1, \quad y_2 = -y_1, \quad z_2 = -z_1$$

infatti si verifica che l'origine è il loro punto medio.

Le componenti del vettore differenza di due punti sono date dalla differenza delle coordinate, infatti si ha:

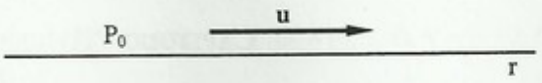
$$P_2 - P_1 = (P_2 - O) - (P_1 - O)$$

quindi se $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ risulta:

$$P_2 - P_1 = (x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3) - (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3) = (x_2 - x_1)\mathbf{e}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{e}_2 + (z_2 - z_1)\mathbf{e}_3.$$

7.2 - Equazioni parametriche della retta.

La retta per un punto P_0 parallela ad un vettore $\mathbf{u}$ è formata dai punti P tali che il vettore $P - P_0$ sia parallelo al vettore $\mathbf{u}$, ossia $P - P_0 = t\mathbf{u}$ (1) ove t varia in $\mathbf{R}$.



Se P_0 ha coordinate (x_0, y_0, z_0) e $\mathbf{u} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ la (1) diventa:

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = tl\mathbf{i} + tm\mathbf{j} + tn\mathbf{k}.$$

Eguagliando le componenti dei due vettori si ottengono le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Si dicono **parametri direttori** della retta le componenti di un qualsiasi vettore parallelo alla retta, quindi nel caso visto la terna (l, m, n) e le terne ad essa proporzionali.

ESEMPIO 7.2.1 - Scrivere le equazioni parametriche della retta per P_0 di coordinate $(2, -1, 7)$ e parallela al vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 7 - t \end{cases}$$

Anche la retta per due punti $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$ si può pensare come retta per un punto (per esempio P_0) e parallela al vettore $P_1 - P_0$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \quad \text{ove} \quad x_1 \neq x_0 \quad y_1 \neq y_0 \quad z_1 \neq z_0.$$

ESEMPIO 7.2.2 - Scrivere le equazioni parametriche della retta per P_0 di coordinate $(2, 3, -3)$ e per P_1 di coordinate $(3, 4, 0)$ significa scrivere le equazioni parametriche della retta per $P_0(2, 3, -3)$ e parallela al vettore $P_1 - P_0$ di componenti $(1, 1, 3)$.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$$

7.3 - Rappresentazione del piano.

Il piano può essere individuato come piano per un punto P_0 ed ortogonale ad un vettore $\mathbf{n}$, ossia come il luogo dei punti P tali che:

$$(P - P_0) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

(In dimensione 2 l'espressione precedente rappresenta una retta.)

Se $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ e P_0 ha coordinate (x_0, y_0, z_0) si ottiene l'equazione cartesiana del piano

$$\mathbf{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

Ponendo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ si ottiene un'equazione del tipo:

$$\mathbf{ax + by + cz + d = 0}.$$

Un'equazione lineare in x, y, z rappresenta un piano e i coefficienti a, b, c della x, della y e della z hanno il significato di componenti di un vettore ortogonale al piano. L'equazione di un piano è determinata a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

ESEMPIO 7.3.1 - Il piano per P_0 di coordinate (2, –3, 2) ed ortogonale ad $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ha come equazione cartesiana: $2(x - 2) + 5(y + 3) + (z - 2) = 0$ ossia $2x + 5y + z + 9 = 0$.

In particolare:
- il piano coordinato **xy**, essendo ortogonale al vettore **k**, ha equazione cartesiana $\mathbf{z = 0}$;
- il piano coordinato **yz**, essendo ortogonale al vettore **i**, ha equazione cartesiana $\mathbf{x = 0}$;
- il piano coordinato **zx**, essendo ortogonale al vettore **j**, ha equazione cartesiana $\mathbf{y = 0}$.

Altro modo di individuare un piano π è assegnare un punto P_0 che appartiene a π e due vettori l.i. **u** e **v** che sono paralleli a π; il piano π è formato dai punti P tali che $P - P_0$, **u**, **v** sono complanari, il loro prodotto misto deve essere nullo:

$$(P - P_0) \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0.$$

Da tale equazione vettoriale, supposto fissato il riferimento ortogonale monometrico, si arriva all'equazione cartesiana ricordando che il prodotto misto di tre vettori, note le componenti, è dato dallo sviluppo di un opportuno determinante del terzo ordine. Quindi se P_0 ha coordinate (x_0, y_0, z_0) e $\mathbf{u} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}$ l'equazione del piano è:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

Si osservi che il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale al piano π cercato.

ESEMPIO 7.3.2 - Trovare il piano per P_0 di coordinate (–1, –1, 1) e parallelo ad $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
Si ha: $2(x + 1) - (y + 1) + (z - 1) = 0$ ossia $2x - y + z = 0$.

Un piano π è anche individuato da tre punti non allineati : P_0 P_1 P_2. Tale caso rientra nel caso precedente, π è il luogo dei punti P tali che i vettori $P - P_0$, $P_1 - P_0$, $P_2 - P_0$ siano complanari.
Il piano π è quindi il luogo dei punti P tali che:

$$(P - P_0) \cdot (P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0) = 0.$$

Esplicitando il prodotto misto in componenti, supposto che P_0 abbia coordinate (x_0, y_0, z_0), P_1 coordinate (x_1, y_1, z_1) e P_2 coordinate (x_2, y_2, z_2) si ha:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si osservi che $(P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0)$ risulta un vettore ortogonale al piano dei tre punti.

ESEMPIO 7.3.3 - L'equazione del piano per i punti A(1, 2, 3), B(1, 0, 2) C(0, 0, 1) è

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 1 \\ 1 - 0 & 2 - 0 & 3 - 1 \\ 1 - 0 & 0 - 0 & 2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

e sviluppando il determinate si ottiene l'equazione cartesiana $2x + y - 2z + 2 = 0$.

7.4 - Ortogonalità e parallelismo fra rette.

Due rette r ed s in forma parametrica
- r: $P - P_0 = t\mathbf{u}$ ove t varia in $\mathbf{R}$;
- s: $P - P_1 = k\mathbf{v}$ ove k varia in $\mathbf{R}$.

sono ortogonali se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali, ossia $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, sono parallele se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli, ossia $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$.

Posto $\mathbf{u} = (l, m, n)$ e $\mathbf{v} = (l', m', n')$: **r ed s sono ortogonali se** $\mathbf{ll' + mm' + nn' = 0}$;

r ed s sono parallele se $\dfrac{l}{l'} = \dfrac{m}{m'} = \dfrac{n}{n'}$.

ESEMPIO 7.4.1 - Date le rette:

$$r: \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 5+3t \\ z = -5-2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1-3t \\ y = 5-3t \\ z = -7+2t \end{cases} \quad p: \begin{cases} x = 4+4t \\ y = 1 \\ z = 2+6t \end{cases} \quad u: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1+t \\ z = -1-2t \end{cases}$$

la retta r è parallela ad s, ortogonale a p, né parallela né ortogonale ad u.

7.5 - Ortogonalità e parallelismo fra piani.

Due piani α e β

α: $(P - P_0) \cdot \mathbf{n} = 0$, di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$

β: $(P - P_1) \cdot \mathbf{n'} = 0$, di equazione cartesiana $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

- sono **ortogonali** se $\mathbf{n}$ e $\mathbf{n'}$ **sono ortogonali**, ossia $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n'} = 0$, ossia $\mathbf{aa' + bb' + cc' = 0}$;
- sono **paralleli** se $\mathbf{n}$ e $\mathbf{n'}$ **sono paralleli**, ossia $\mathbf{n'} = \lambda \mathbf{n}$, ossia: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.

Se anche: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'}$ allora i due piani coincidono.

ESEMPIO 7.5.1 - Dati i piani:

α_1: $2x - y + 3z + 8 = 0$;
α_2: $3x - 2z = 0$;
α_3: $4x - 2y + 6z + 20 = 0$;
α_4: $-2x + y - 3z - 8 = 0$;
α_5: $5x + 4y - 2z + 15 = 0$;
α_6: $x + y + 4z + 6 = 0$.

si ha che α_1 è ortogonale ad α_2 ed α_5; parallelo ad α_3; coincidente con α_4; né parallelo né ortogonale ad α_6.

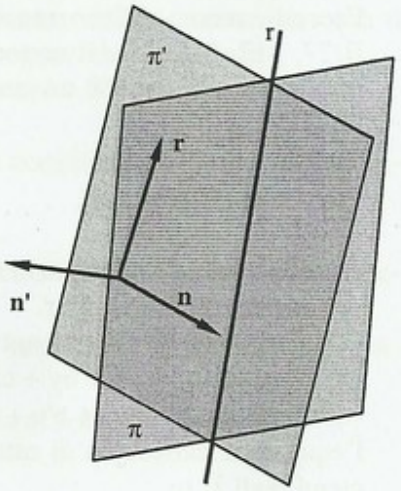
7.6 - Intersezione di due piani.

L'intersezione di α: $ax + by + cz + d = 0$ e β: $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ è data dai punti che soddisfano entrambe le equazioni, ossia dai punti che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}.$$

Ci sono tre possibilità:
i) sistema incompatibile: i piani sono paralleli;
ii) sistema con infinite soluzioni al variare di un parametro: l'intersezione è una retta;
iii) sistema con infinite soluzioni al variare di due parametri: le due equazioni rappresentano lo stesso piano.

7.7 - Retta come intersezione di due piani.



La retta $\begin{cases} x = a + lt \\ y = b + mt \\ z = c + nt \end{cases}$, se i suoi parametri direttori sono tutti diversi da zero, si può anche rappresentare, eliminando il parametro t, nel seguente modo:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n};$$

ossia si può considerare r come intersezione di due piani, ad esempio: $\frac{x-a}{l} = \frac{z-c}{n}$ e $\frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$.

Se invece, ad esempio, $l = 0$, $m \neq 0$ ed $n \neq 0$ la retta risulta intersezione dei piani $x = a$ e $\frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$.

ESEMPIO 7.7.1 - Trovare due piani aventi per intersezione la retta r: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = -1 + 9t \end{cases}$.

Eliminando il parametro t si ricava $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{9}$ da cui:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} \\ \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{9} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - 3y - 11 = 0 \\ 9y - z + 26 = 0 \end{cases}.$$

Se una retta è data come intersezione di due piani per determinarne i parametri direttori si può procedere in vari modi.
a) Un modo semplice è risolvere il sistema delle due equazioni dei piani: le infinite soluzioni esprimono la retta in forma parametrica.

ESEMPIO 7.7.2 - Data la retta come intersezione di piani $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 5x + 8y + 2z = 3 \end{cases}$ risolvendo il sistema (v. Esempio 4.2.3), si ottiene come soluzione: $\begin{cases} x = 14k - 1 \\ y = -9k + 1 \\ z = k \end{cases}$.

Si ha che i parametri direttori sono proporzionali alla terna (14, –9, 1).

b) Un altro modo è quello di considerare i vettori **n** perpendicolare ad un piano ed **n'** perpendicolare all'altro; il loro prodotto esterno è un vettore parallelo alla retta.

Facendo sempre riferimento all'Esempio 7.7.2, si ha $\mathbf{n} = (2, 3, -1)$ ed $\mathbf{n'} = (5, 8, 2)$, il vettore $\mathbf{r} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{n'}$ è parallelo alla retta e risulta $\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

c) Un terzo modo è quello di trovare due punti A e B di r, il vettore B – A ha come componenti i parametri direttori di r.
Facendo ancora riferimento all'Esempio 4.2.3 si possono considerare come A(–1, 1, 0) e B(27, –17, 2), allora il vettore B – A = (28, –18, 2) è parallelo ad r e le sue componenti (proporzionali a quelle trovate con i metodi precedenti) sono ancora parametri direttori di r.

7.8 - Fasci di piani.

Data una retta r dello spazio si dice **fascio (proprio)** di piani per r l'insieme di tutti i piani dello spazio passanti per r.
Considerati due piani passanti per r:
- π di equazione: $ax + by + cz + d = 0$,
- π' di equazione: $a'x + b'y + c'z + d' = 0$,
l'equazione cartesiana di tutti i piani del fascio è la loro combinazione lineare di coefficienti reali λ, μ:

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0. \qquad (2)$$

Infatti (2) è, per ogni λ, μ, l'equazione di un piano α che contiene tutti i punti della retta perché se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ appartiene alla retta soddisfa alle equazioni di π e di π' e quindi alla (2).

ESEMPIO 7.8.1. - Determinare l'equazione del generico piano per la retta r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Prima si scrive r come intersezione di due piani $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ poi l'equazione del fascio $\lambda(x - 2y + 3) + \mu(y - z) = 0$.

ESEMPIO 7.8.2 - Determinare il piano per Q(1, –2, 0) e per la retta r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

A partire dall'equazione del generico piano per r determinata nell'esempio 7.8.1 s'impone il passaggio per il punto Q(1, –2, 0): $\lambda(1 + 4 + 3) - 2\mu = 0$ e si ottiene il piano cercato: $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

Si dice fascio **improprio** l'insieme dei piani paralleli ad un piano fisso.
Se il piano π ha equazione: $ax + by + cz + d = 0$, il generico piano del fascio ha equazione $ax + by + cz + k = 0$ al variare di k in $\mathbf{R}$.

ESEMPIO 7.8.3 - Dato il piano di equazione $x + 2y + 5z + 7 = 0$, il fascio dei piani paralleli ha equazione $x + 2y + 5z + d = 0$ al variare di d in $\mathbf{R}$.

7.9 - Intersezione retta-piano, parallelismo retta-piano.

Supponiamo che la retta r sia rappresentata mediante le equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$ ed il piano π dall'equazione $ax + by + cz + d = 0$.

L'eventuale punto comune si trova risolvendo il sistema formato dalle equazioni di r e di π e quindi corrisponde al valore di t che soddisfa la seguente equazione risolvente:

$$(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) + (al + bm + cn)\,t = 0$$

ossia un'equazione del tipo $B + At = 0$.

Se $A \neq 0$ si ricava t che sostituito nelle equazioni di r dà le coordinate del punto in cui r interseca il piano π.

Se $A = 0$ si hanno due possibilità:

- se $B \neq 0$ non c'è nessun valore di t che soddisfi l'equazione risolvente, la retta r è parallela a π;
- se $B = 0$ l'equazione risolvente in t è un'identità, ossia la retta $r \in \pi$, si può ancora considerare la retta r parallela a π.

Quindi **la condizione di parallelismo retta-piano** è data da **al + bm + cn = 0**.

Casi particolari:

- Il piano $ax + by + c = 0$ è parallelo all'asse z.
- Il piano $ax + bz + c = 0$ è parallelo all'asse y.
- Il piano $ay + bz + c = 0$ è parallelo all'asse x.

ESEMPIO 7.9.1 - L'intersezione del piano $3x + 4y - z + 3 = 0$ con l'asse z è il punto di coordinate (0, 0, 3).

7.10 - Ortogonalità retta-piano.

La retta r parallela al vettore **r** è ortogonale al piano di vettore ortogonale **n** se **r** è parallelo ad **n**. Secondo le solite notazioni

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}.$$

ESEMPIO 7.10.1 - La retta per Q(0, 2, 1) ortogonale al piano $x + 2y - z + 3 = 0$ ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

7.11 - Angoli.

Due rette r ed s dello spazio, non necessariamente incidenti, formano un angolo γ (ed anche un angolo $\pi - \gamma$) se un vettore **r** parallelo ad r ed un vettore **s** parallelo ad s formano un angolo γ.

Per la formula del prodotto scalare, tenuto conto che si ha la possibilità di trovare due angoli, si ha:

$$\cos\gamma = \pm \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{\|\mathbf{r}\| \|\mathbf{s}\|}.$$

Due piani π e π' formano un angolo γ se esistono un vettore **n** ortogonale a π, ed un vettore **n'** ortogonale a π' che formano un angolo γ. In questo caso si ha una formula analoga alla precedente.
Un piano ed una retta r formano un angolo γ (minore di un angolo retto) se il vettore **r** parallelo ad r forma un angolo uguale a $\frac{\pi}{2} - \gamma$ con un vettore **n** ortogonale a π, per cui si ha per $\sin\gamma$ il valore assoluto della frazione seguente:

$$\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{r}\|\|\mathbf{n}\|}.$$

ESEMPIO 7.11.1 - Determinare l'angolo della retta r: $x = 3$, $y = 2 + t$, $z = -t$ con il piano π: $x + y + 1 = 0$.
Per la formula precedente si ha: $\sin(r\,\pi) = \frac{1}{2}$.

7.12 - Mutua posizione di due rette nello spazio.

Due rette sullo stesso piano si dicono **complanari**; possono essere **incidenti** se si intersecano in in punto, o **parallele**.

ESEMPIO 7.12.1 - Le rette r: $x = 1 + t$, $y = 3 + t$, $z = t$ ed s: $x = 1 + 3k$, $y = 3 - k$, $z = 4k$ hanno in comune il punto P(1, 3, 0), e quindi sono incidenti.
Le rette r: $x + z = 0$, $x - y - z + 2 = 0$ ed s: $x = 2 + t$, $y = 2t$, $z = 3 - t$ sono parallele, avendo i parametri direttori proporzionali.

DEFINIZIONE 7.12.1 - *Due rette si dicono* ***sghembe*** *se non sono complanari.*

Per provare che due rette sono sghembe si deve quindi verificare che non siano parallele e che non abbiano punti in comune.

ESEMPIO 7.12.3 - L'asse z e la retta r: $z = 0$, $x + y + 1 = 0$ non sono paralleli perché l'asse z ha parametri direttori (0, 0, 1) mentre la retta r ha parametri direttori (–1, 1, 0). Inoltre poiché l'asse z ha equazioni $x = 0$, $y = 0$, il sistema formato dai quattro piani è incompatibile: le rette sono sghembe.

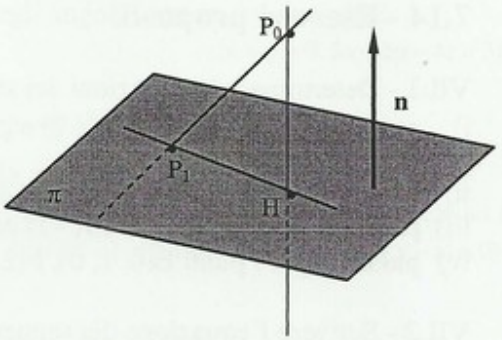
7.13 - Distanze ed applicazioni.

a) **Distanza di due punti** $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$.
La distanza di P_2 e P_1 è il modulo del vettore $P_2 - P_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$
ossia $d(P_2, P_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

ESEMPIO 7.13.1 - La distanza del punto A(–3, 4, 0) dall'origine è 5.

b) **Distanza di un punto** $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ **dal piano** π di equazione $ax + by + cz + d = 0$.
Sia $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ un punto di π e $\mathbf{n} = (a, b, c)$ un vettore ortogonale a π.
Per definizione $\mathbf{n} \cdot (P_1 - P_0)$ è il modulo di **n** per la proiezione con segno di $P_1 - P_0$ su **n** ossia è il modulo di **n** per la distanza di P_0 da π, a meno del segno perché si considerano di-

stanze positive.



Con calcoli analoghi a quelli del § 5.8 si ricava:

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

ESEMPIO 7.13.2 - La distanza del piano $x + 2y + 2z - 5 = 0$ dall'origine è $\frac{5}{3}$.

c) **L'area del triangolo** $P_1\ P_2\ P_3$ si può calcolare come la metà del modulo del prodotto vettoriale dei vettori $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$.

ESEMPIO 7.13.3 - Calcolare l'area *A* del triangolo $P_1(1, 2, 0)$ $P_2(-1, 3, 1)$ $P_3(0, 1, 2)$.
Poiché $P_2 - P_1 = (-2, 1, 1)$ e $P_3 - P_1 = (-1, -1, 2)$ si ha:
$(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) = (2 + 1)\mathbf{i} - (-4 + 1)\mathbf{j} + (2 + 1)\mathbf{k}$ per cui:

$$A = \frac{1}{2}\left\|3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{9+9+9} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

d) **Il volume del tetraedro** di vertici $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ con $i = 1, 2, 3, 4$ si calcola con la formula vettoriale:

$$\text{vol}(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{1}{6}(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) \cdot (P_4 - P_1).$$

Tenendo conto che consideriamo il volume una quantità positiva, il secondo membro va considerato in valore assoluto.

ESEMPIO 7.13.4 - Dati i vertici A(–2, –2, –1), B(1, –1, –3), C(0, 2, 0), D(0, –1, 3) calcolare il volume del tetraedro.

Risulta Volume del tetraedro $= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{51}{6}$.

e) **Distanza di un punto da una retta.**
Per calcolare la distanza di un punto P da una retta r, che è, per definizione, la distanza del punto P dal punto H piede della retta per P perpendicolare ed incidente ad r non si può applicare direttamente una formula ma si devono calcolare le coordinate di H e successivamente la distanza dei punti P ed H.

ESEMPIO 7.13.5 - Calcolare la distanza di P(1, 2, 0) dalla retta r: $\begin{cases} x = y + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$.

Il piano α per P perpendicolare ad r ha equazione $x + y - z - 3 = 0$. Il punto H, piede della perpendicolare, è il punto di intersezione di α ed r; ha coordinate (2, 1, 0).
Risulta quindi $d(P, r) = d(P, H) = \sqrt{2}$.

7.14 - Esercizi proposti.

VII.1 - Determinare le equazioni dei seguenti piani:

i) passante per il punto A(1, 1, 0) e parallelo ai vettori **u**(1, 0, –1) e **v**(0, 2, 3); (2x – 3y + 2z + 1 = 0)

ii) passante per i punti B(0, 1, –1), C(3, 2, 1) e parallelo al vettore **w**(0, 0, 5); (x – 3y + 3 = 0)

iii) passante per il punto D(1, 1, –1) ed ortogonale al vettore **n**(1, –1, 2); (x – y + 2z + 2 = 0)

iv) passante per i punti E(0, 1, 0), F(2, –1, 0) e G(1, 2, 2). (x + y – z – 1 = 0)

VII.2 - Scrivere l'equazione dei seguenti piani:

i) passante per il punto A(1, 2, 3) e perpendicolare al vettore **n**(0, 1, –2); (y – 2z + 4 = 0)

ii) passante per il punto B(0, 1, –1) e parallelo ai vettori **u**(1, 0, –1) e **v**(1, 2, –1); (x + z + 1 = 0)

iii) passante per i punti A(1, 2, 3), B(0, 1, 2) e parallelo al vettore **u**(0, 1, –2); (3x – 2y – z + 4 = 0)

iv) passante per i punti A(1, 2, 3), B(0, 2, 1) e C(1, –1, 2). (6x + y – 3z + 1 = 0)

VII.3 - Rappresentare, mediante equazioni parametriche e come intersezione di piani, la retta r passante per il punto A(1, 1, 0) e parallela al vettore **u**(1, –1, 2). (x = 1 + t, y = 1 – t, z = 2t)

VII.4 - Rappresentare, in forma parametrica e come intersezione di piani, le seguenti rette:

i) passante per i punti A(1, 2, –1) e B(0, 1, 4); (x = 1 + t, y = 2 + t, z = –1 – 5t)

ii) passante per A e parallela alla retta x – 1 = 2y + 3 = 1 – z; (x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = –1 – 2t)

iii) passante per A e parallela all'asse z; (x = 1, y = 2, z = –1 + t)

iv) passante per A e parallela ai piani cordinati xy e yz; (x = 1, y = 2 + t, z = –1)

v) passante per A e parallela ai piani x + y – 1 = 0 e 2y + 3 = 0. (x = 1, y = 2, z = –1 + t)

VII.5 - Determinare i valori dei parametri reali h e k tali che i piani 2x + hy – 2z + 3 = 0 e x + 2 y + kz + 1 = 0:

i) siano paralleli; (h = 4, k = –1)

ii) si intersechino in una retta parallela al vettore **u**(1, 1, 1). (h = 0, k = –3)

VII.6 - Studiare la mutua posizione piano - retta nei seguenti casi:

i) α: 3x – y + z – 1 = 0 ed r: x = 1 + 2t, y = –2 + t, z = 2 – t; (incidenti)

ii) α: 3x – y + z – 1 = 0 ed r: x = 1 + t, y = 1 + 3t, z = –1; (r ⊆ α)

iii) α: 3x – y + z – 1 = 0 ed r: x + 2z = 0, 2x – y + z = 0; (incidenti)

iv) α: 3x – y + z – 1 = 0 ed r: x – 1 = 0, – y + z = 0. (paralleli)

VII.7 - Determinare le equazioni della retta passante per il punto P(1, –1, 2) perpendicolare ed incidente la retta $\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$. (x – y – z = 0, x + z – 3 = 0)

VII.8 - Trovare le equazioni della retta per l'origine incidente le rette

r: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$ ed s: $\begin{cases} x = y - 1 \\ x = z + 3 \end{cases}$. (4x – y + z = 0, 4x – 3y – z = 0)

VII.9 - Trovare le coordinate di un punto ed i parametri direttori della retta intersezione dei piani: 2x – y + z – 1 = 0 e x + y – z + 2 = 0. (r = (0, 3, 3))

VII.10 - Trovare le equazioni dei piani bisettori degli angoli formati dai due piani: $2x - y - 2z - 6 = 0$ e $x - 2y - 2z + 3 = 0$. $(x + y = 9,\ 3x - 3y - 4z = 3)$

VII.11 - Verificare che la retta r di equazioni $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ ed il piano π di equazione: $3x + 5y - 5z = 1$ sono paralleli e rappresentare il fascio improprio delle rette parallele ad r e giacenti su π. $(3x + 5y - 5z - 1 = 0,\ h(x - y + z) + k(2x + y - z) = 0)$

VII.12 - Verificare che le rette r: $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t + 1 \\ z = 4 - t \end{cases}$ e s: $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$ sono complanari e non parallele.

VII.13 - Condurre per P(1, 2, 3) la retta ortogonale alle rette r: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ed s: $\begin{cases} x - y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$. $(x = 1,\ y = 2)$

VII.14 - Condurre per P (1, 2, –2) la retta parallela al piano: $x - 2y + 3z = 6$ ed ortogonale alla retta r: $\begin{cases} y = 2z \\ x = z + 1 \end{cases}$. $(x + 2y + z - 3 = 0,\ x - 2y + 3z + 9 = 0)$

VII.15 - Data la retta r di equazioni $\begin{cases} x = z + 1 \\ y = 2z - 2 \end{cases}$ ed il punto P (2, –1, 3):

i) determinare le coordinate del punto P' simmetrico di P rispetto ad r; $(P'(2, 1, -1))$

ii) determinare le equazioni della retta per P perpendicolare ad r ed incidente ad s di equazioni: $\begin{cases} x - 3z + 3 = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$. $(3x - 4y - z - 7 = 0,\ \ x + 2y + z - 3 = 0)$

VII.16 - Date le due rette sghembe r: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ ed s: $\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$ determinare le equazioni della retta perpendicolare ed incidente le rette date. $(x + z - 1 = 0,\ y = 0)$

VII.17 - Determinare le equazioni della retta complanare con il piano p di equazione $x + 3y + 2z + 4 = 0$ ed incidente l'asse x e l'asse z. $(x + 3y + 2z + 4 = 0,\ y = 0)$

VII.18 - Calcolare la distanza del punto P(2, 3, –1) dalla retta r: $\begin{cases} x = 2z \\ y = z + 2 \end{cases}$. $\left(\frac{\sqrt{30}}{3}\right)$

VII.19 - Date le rette r: $\begin{cases} x = t - 6 \\ y = t \\ z = t + 5 \end{cases}$ ed s: $\begin{cases} x + y - z + 7 = 0 \\ 2x - y - 9 = 0 \end{cases}$ ed il punto P(1, 0, –2) determinare l'equazione del piano per P e parallelo ad entrambe le rette. $(x - 2y + z + 1 = 0)$

VII.20 - Data la retta r: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ ed il punto A(0, 1, 1) determinare :

- le equazioni parametriche di r; $(x = (t - 1)/2,\ y = t,\ z = 2t$

+ 2)
- le intersezioni di r con i tre piani coordinati; (X = (0, 1, 4), Y = (–1/2, 0, 2), Z = (–1, –1, 0))
- un piano parallelo alla retta r;
- la retta parallela ad r e passante per A; (x = 1/2t, y = 1 + t, z = 1 + 2t)
- il piano perpendicolare alla retta r e passante per A; (x + 2y + 4z – 6 = 0)
- la distanza di r dall'origine. $\left(\frac{\sqrt{77}}{7}\right)$

VII.21 - Dati il punto P(1, 2, 0) e la retta r di equazioni $\begin{cases} x = y + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$ determinare:

i) le equazioni della rette per P e parallela ad r; (x = 1 + t, y = 2 + t, z = –t)
ii) la distanza di P da r; $\left(\sqrt{2}\right)$
iii) le coordinate del punto P' simmetrico di P rispetto ad r. (P'(3, 0, 0)

CAPITOLO VIII

ALCUNE SUPERFICIE NOTEVOLI

8.1 - Superficie sferica.

8.1.1 - L'equazione della superficie sferica.

La superficie sferica è l'analogo nello spazio della circonferenza nel piano.

DEFINIZIONE 8.1.1 - *La superficie sferica è il luogo dei punti P aventi distanza fissata $r \geq 0$ da un punto fisso C, detto centro: $CP = r$.*

Se nello spazio è dato un riferimento cartesiano ortogonale, fissato un numero reale positivo r ed indicate con (α, β, γ) le coordinate di C, la condizione affinché un generico punto P(x, y, z) appartenga alla superficie sferica è espressa dall'equazione:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$$

sviluppando i calcoli l'equazione diventa:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0}$$

con $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2$.
Si può quindi dire che l'equazione della superficie sferica è una equazione di secondo grado in x, y, z con le condizioni:
- i coefficienti di x^2, di y^2 e di z^2 sono eguali;
- i coefficienti di xy, xz, yz sono eguali a zero (cioè mancano tali termini).

Inoltre, affinché un'equazione del tipo $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0}$ rappresenti una superficie sferica di centro $C(\alpha, \beta, \gamma)$ con $\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = -\frac{b}{2}, \gamma = -\frac{c}{2}$ e raggio r, il numero $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d$ deve essere ≥ 0.

ESEMPIO 8.1.1 - L'equazione $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x + 5y - 21 = 0$ rappresenta la superficie sferica di centro $C\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}, 0\right)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{25}{36} + 7} = \sqrt{\frac{281}{36}}$.
L'equazione $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x + 5y + 21 = 0$ non rappresenta punti di reali in quanto il raggio r risulta $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{25}{36} - 7} = \sqrt{-\frac{223}{36}}$ che non è un numero reale.

Se il raggio è zero, la superficie sferica si riduce al suo centro.

ESEMPIO 8.1.2 - $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 6 = 0$ è l'equazione della superficie sferica di centro C(–1, –2, 1) e raggio zero, il cui unico punto è C stesso.

8.1.2 - Equazione del piano tangente alla superficie sferica.

Data la superficie sferica Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$ ed un suo punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, il piano tangente in P_0 a Σ è il piano per P_0 perpendicolare alla retta CP_0.
Come parametri direttori della retta CP_0 possiamo assumere le componenti del vettore $P_0 - C = (x_0 - \alpha, y_0 - \beta, z_0 - \gamma)$, quindi l'equazione del piano tangente risulta:

$$(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) + (z_0 - \gamma)(z - z_0) = 0.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$x_0x + y_0y + zz_0 - \alpha x - \beta y - \gamma z - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = 0$$

Poiché il punto P_0 appartiene alla superficie sferica, le sue coordinate ne soddisfano l'equazione: $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 - 2\gamma z_0 + \delta = 0$ da cui:

$-x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = \delta - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0$; l'equazione del piano tangente si può allora scrivere: $x_0x + y_0y + z_0z - \alpha x - \beta y - \gamma z + \delta - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0 = 0$, ovvero:

$$\mathbf{x_0x + y_0y + z_0z - \alpha(x + x_0) - \beta(y + y_0) - \gamma(z + z_0) + \delta = 0.}$$

Questa formula si ottiene dall'equazione della superficie sferica con la **regola degli sdoppiamenti** cioè "sdoppiando" x^2 in x_0x, y^2 in y_0y, z^2 in z_0z, $2x$ in $x + x_0$, $2y$ in $y + y_0$, $2z$ in $z + z_0$.

ESEMPIO 8.1.3 - Data la superficie sferica Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z - 3 = 0$ ed il suo punto $P(1, 2, 0)$, essendo $C(1, 0, 4)$ il centro di Σ, l'equazione del piano tangente a Σ in P si può scrivere: $1x + 2y - 1(x + 1) - 0(y + 2) - 4(z + 0) - 3 = 0$ cioè: $y - 2z - 2 = 0$.

8.1.3 - Fascio di superficie sferiche.

Date due superficie sferiche Σ_1 e Σ_2 di equazioni rispettivamente:

$$\Sigma_1: \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y - 2\gamma_1 z + \delta_1 = 0$$
$$\Sigma_2: \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y - 2\gamma_2 z + \delta_2 = 0$$

consideriamo l'equazione:

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y - 2\gamma_1 z + \delta_1) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y - 2\gamma_2 z + \delta_2) = 0$$

ottenuta come combinazione lineare delle equazioni di Σ_1 e Σ_2 con coefficienti reali λ e μ non entrambi nulli.
Tale equazione si può scrivere:

$$(1) \quad \mathbf{(\lambda + \mu)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(\alpha_1\lambda + \alpha_2\mu)x - 2(\beta_1\lambda + \beta_2\mu)y - 2(\gamma_1\lambda + \gamma_2\mu)z + \lambda\delta_1 + \mu\delta_2 = 0}$$

e si hanno le seguenti possibilità:

- se le due superficie sferiche sono concentriche, cioè $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ e $\gamma_1 = \gamma_2$ anche la (1) rappresenta, fissati due reali λ e μ, con $\lambda + \mu \neq 0$, una superficie sferica ad esse concentrica.

La (1) rappresenta quindi, al variare di λ e μ (con $\lambda + \mu \neq 0$), un insieme di infinite superficie sferiche concentriche detto **fascio di superficie sferiche concentriche**, la cui equazione si può scrivere più semplicemente come:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y - 2\gamma_1 z + \delta = 0 \quad \text{con } \delta = (\lambda\delta_1 + \mu\delta_2) / (\lambda + \mu).$$

- se le due superficie sferiche non sono concentriche la (1) rappresenta, fissati due reali λ e μ, (con $\lambda + \mu \neq 0$), una superficie sferica che passa per gli eventuali punti comuni a Σ_1 e Σ_2 (in quanto le coordinate di tali punti soddisfano le equazioni di Σ_1 e Σ_2 e quindi la (1)).

La (1) rappresenta quindi, al variare di λ e μ (con $\lambda + \mu \neq 0$), un insieme di infinite superficie sferiche detto **fascio di superficie sferiche.**

Se $\lambda + \mu = 0$ la (1) è l'equazione di un piano :

$$2(\alpha_1 - \alpha_2)x + 2(\beta_1 - \beta_2)y + 2(\gamma_1 - \gamma_2)z - \delta_1 + \delta_2 = 0$$

detto **piano radicale** che passa per gli eventuali punti comuni a Σ_1 e Σ_2. Poiché i punti comuni a due superficie sferiche secanti individuano una circonferenza, questa viene detta **circonferenza base del fascio** in quanto tutte le superficie sferiche del fascio passano per essa. Tale circonferenza appartiene al piano radicale.
E' facile verificare che il piano radicale è perpendicolare alla congiungente i centri di Σ_1 e Σ_2 e che tutti i centri delle superficie sferiche del fascio appartengono a tale congiungente che si dice **asse centrale del fascio**.
Se le superficie sferiche Σ_1 e Σ_2 sono tangenti, il piano radicale passa per il punto di tangenza ed è perpendicolare all'asse centrale: coincide quindi con il piano tangente comune a Σ_1 e Σ_2.
Ne segue che tutte le superficie sferiche tangenti ad una superficie sferica Σ in un suo punto P appartengono al fascio individuato da Σ e dal piano tangente a Σ in P.

Considerato un qualunque punto A dello spazio, non appartenente all'eventuale circonferenza base, esiste sempre una ed una sola superficie sferica del fascio che passi per A: infatti imponendo che le coordinate di A soddisfino la (1) si ottiene un'equazione di I° grado in λ e μ e quindi un unico rapporto λ/μ che individua la superficie cercata.

ESEMPIO 8.1.4 - Determinare l'equazione della superficie sferica passante per l'origine e tangente alla superficie sferica Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z - 3 = 0$ nel suo punto P(1, 2, 0).
Le superficie sferiche tangenti a Σ nel suo punto P(1, 2, 0) appartengono al fascio individuato da Σ e dal piano tangente a Σ in P (v. Esempio 8.1.3) ed hanno quindi equazione: $\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z - 3) + \mu(y - 2z - 2) = 0$.
In particolare la superficie sferica del fascio passante per l'origine si ottiene scegliendo λ e μ in modo che (0, 0, 0) soddisfi l'equazione; risulta $-3\lambda - 2\mu = 0$. Scegliendo $\lambda = 2$ e $\mu = -3$ l'equazione della superficie sferica cercata risulta: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y/2 - 5z = 0$.

8.1.4 - Potenza di un punto rispetto ad una superficie sferica.

DEFINIZIONE 8.1.2 - *Si definisce **potenza di un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ rispetto alla superficie sferica Σ** di equazione*: $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$ *il numero*

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 - 2\gamma z_0 + \delta$$

cioè il valore, con segno che l'equazione di Σ assume in P_0

La potenza è: un numero positivo se P_0 è esterno alla superficie sferica;
un numero negativo se P_0 è interno alla superficie sferica;
il numero zero se P_0 appartiene alla superficie sferica.

Consideriamo ora due superficie sferiche Σ_1 e Σ_2 di equazioni rispettivamente:

$$\Sigma_1: \; x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y - 2\gamma_1 z + \delta_1 = 0$$
$$\Sigma_2: \; x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y - 2\gamma_2 z + \delta_2 = 0.$$

Un punto P(X, Y, Z) ha eguale potenza rispetto alle due superficie sferiche se:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\alpha_1 X - 2\beta_1 Y - 2\gamma_1 Z + \delta_1 = X^2 + Y^2 - 2\alpha_2 X - 2\beta_2 Y - 2\gamma_2 Z + \delta_2$$

cioè semplificando: $2(\alpha_1 - \alpha_2)X + 2(\beta_1 - \beta_2)Y - 2(\gamma_1 - \gamma_2)Z - \delta_1 + \delta_2 = 0$.
che è l'equazione del piano radicale, quindi: **il piano radicale è il luogo dei punti aventi**

la stessa potenza rispetto alle due superficie sferiche.

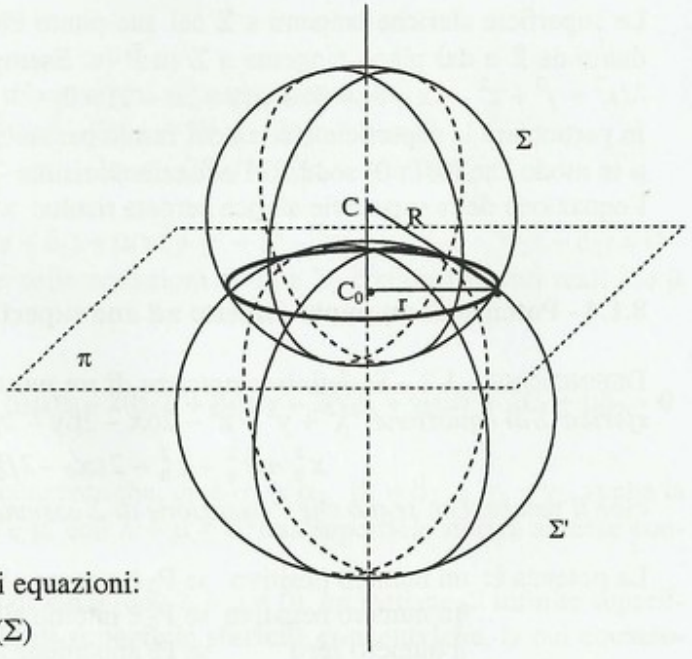
8.1.5 - La circonferenza nello spazio.

Nello spazio, *la circonferenza è il luogo dei punti P di un piano π aventi distanza fissata r da un punto fisso C di π, detto centro: CP = r.*
Una circonferenza si può quindi rappresentare nello spazio come intersezione del piano π e di una superficie sferica Σ opportuna, ad esempio quella di centro C e raggio *r*.
Una circonferenza, nello spazio, si può anche rappresentare come intersezione di due superficie sferiche Σ_1 e Σ_2 aventi almeno un punto in comune, cioè come circonferenza base del fascio individuato da Σ_1 e Σ_2; la stessa circonferenza si può rappresentare come intersezione di due qualunque altre superficie sferiche del fascio individuato da Σ_1 e Σ_2, o da una superficie sferica del fascio e dal piano radicale.

ESEMPIO 8.1.5 - La circonferenza del piano π: $x + y = 0$ avente centro in C(1, –1, 3) e raggio 1 si può rappresentare come intersezione del piano π con la superficie sferica di centro C e raggio 1 ed ha quindi equazioni: $\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=1 \quad (\Sigma) \\ x+y=0 \quad (\pi) \end{cases}$,
oppure come intersezione di due qualunque superficie sferiche del fascio, ad esempio Σ e la superficie sferica Σ' ottenuta dall'equazione del fascio $\lambda\Sigma + \mu\pi = 0$ scegliendo $\lambda = \mu = 1$.

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=1 \quad (\Sigma) \\ x^2+y^2+z^2-x+3y-6z+10=0 \quad (\Sigma') \end{cases}.$$

Quando la circonferenza è data come intersezione di due superficie sferiche Σ e Σ', per trovare il piano a cui appartiene è sufficiente trovare il piano radicale π del fascio individuato da Σ e Σ', il suo centro è il punto di intersezione C_0 del piano radicale con l'asse centrale ed il suo raggio *r* si ricava dal teorema di Pitagora come $r = \sqrt{R^2 - (CC_0)^2}$ dove C ed R sono rispettivamente centro e raggio di Σ.



ESEMPIO 8.1.6 - La circonferenza di equazioni:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-x+2y-4=0 \quad (\Sigma) \\ x^2+y^2+z^2-2x-3=0 \quad (\Sigma') \end{cases}$$

appartiene al piano radicale π: $(x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4) - (x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3) = 0$
cioè: $x + 2y - 1 = 0$.
Il suo centro C_0 è l'intersezione del piano π con l'asse centrale. L'asse centrale è la retta per il centro $C\left(\frac{1}{2}, -1, 0\right)$ di Σ e perpendicolare a π ed ha quindi equazioni $\begin{cases} 2x = y+2 \\ z=0 \end{cases}$.

Risolvendo il sistema: $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ z = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$ si ottiene $C_0(1, 0, 0)$.

Essendo $(CC_0)^2 = \frac{5}{4}$ ed $R^2 = \frac{21}{4}$ risulta $r = \sqrt{\frac{21}{4} - \frac{5}{4}} = 2$.

8.2 - Rappresentazione di superficie e curve.

Abbiamo visto che un piano nello spazio si rappresenta con una equazione lineare in x,y,z: $ax + by + cz + d = 0$ con a, b, c non tutti nulli.
Una superficie si dice **algebrica** quando si può rappresentare in coordinate cartesiane con un'equazione algebrica $F(x, y, z) = 0$, dove $F(x, y, z)$ è un polinomio in x, y, z a coefficienti costanti.
Il grado del polinomio $F(x, y, z)$ che compare a primo membro si dice **grado** od **ordine** del la superficie.
Le superficie algebriche del 1° ordine hanno equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$ e sono dunque solo i piani.
Le superficie del 2° ordine vengono dette **quadriche**; ad esempio la superficie sferica è una quadrica poiché la sua equazione è un polinomio di secondo grado in x, y, z eguagliato a zero.
Una superficie si può anche rappresentare mediante equazioni parametriche del tipo:

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

che esprimono le coordinate del punto in funzione di due parametri (u, v) che variano in una certa regione di $\mathbf{R}^2$.

Abbiamo visto che una retta si può rappresentare come intersezione di due piani oppure in forma parametrica (v. § 7.2).
Una curva *L* dello spazio si può rappresentare o come intersezione di due superficie

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

oppure come luogo descritto da un punto $P = P(t)$ le cui coordinate cartesiane dipendono da un parametro t, cioè mediante equazioni parametriche del tipo:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t).$$

Un elemento importante nello studio delle curve è il concetto di retta tangente in un punto.

DEFINIZIONE 8.2.1 - *Si dice retta **tangente** alla curva L in $P_0 = P(t_0)$ la posizione limite, se esiste, della retta per P_0 e per un punto $P(t)$ al tendere di t a t_0.*

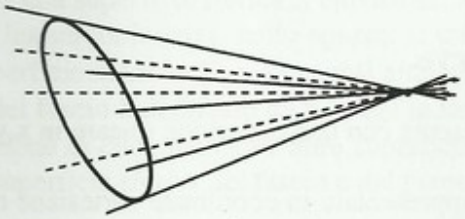
Quindi se la curva è piana la retta tangente in un suo qualunque punto appartiene al piano della curva; ad esempio le tangenti alla circonferenza data dall'intersezione di una sfera S con un piano π devono stare su π.

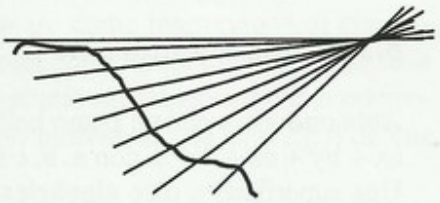
ESEMPIO 8.2.1 - Data la circonferenza σ intersezione della superficie sferica Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ con il piano π $x - z = 0$, la retta tangente a σ nel suo punto P(1, 1, 1) è la retta intersezione del piano π con il piano π' tangente a Σ in P.
π' ha equazione $z - 1 = 0$ e la retta tangente ha equazioni $x - z = 0$, $z - 1 = 0$.

8.3 - Coni.

8.3.1 - Coni e funzioni omogenee.

DEFINIZIONE 8.3.1 - *Si dice **cono** la superficie rigata dello spazio, generata dalle rette, dette **generatrici**, incidenti una curva, detta **direttrice**, e passanti per un punto fisso, detto **vertice**.*





ESEMPIO 8.3.1 - La superficie S di equazione $xz - y^2 = 0$ è un cono di vertice l'origine.
Per dimostrarlo vediamo che se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è un punto di S, la retta OP_0 è contenuta in S: cioè il generico punto P(t) della retta OP_0 (che ha coordinate (x_0t, y_0t, z_0t)) appartiene alla superficie S.
Infatti sostituendo le coordinate del punto nell'equazione di S si ottiene: $t^2x_0z_0 - (ty_0)^2 = 0$ ossia $t^2[x_0z_0 - (y_0)^2] = 0$ che è un'identità per qualunque valore di t in quanto risulta: $x_0z_0 - (y_0)^2 = 0$ essendo P_0 un punto di S.

DEFINIZIONE 8.3.2 - *Una funzione $f(x, y, z)$ si dice **omogenea di grado k** se, per ogni t, x, y, z risulta $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$.*

ESEMPIO 8.3.2 - $f(x, y, z) = 2x^2 - 4xz + y^2$ è una funzione omogenea, $g(x, y, z) = x^3 - yz$ non lo è.

Con la stessa tecnica usata nell'esempio 6.3.1, si prova la:

PROPRIETÀ 8.3.1 - *Se f è una funzione omogenea nelle variabili $x - a$, $y - b$, $z - c$, l'equazione*

$$f(x - a, y - b, z - c) = 0$$

rappresenta un cono con vertice in $V(a, b, c)$.

ESEMPIO 8.3.3 - $(x - 1)^2 - (x - 1)(y - 2) + (z - 1)^2 = 0$ è un cono con vertice V(1, 2, 1).

8.3.2 - Rappresentazione di un cono.

Esaminiamo alcuni casi particolari.
i) Se la direttrice L è descritta dal punto Q(x(u), y(u), z(u)) e il vertice è V(a, b, c), il generico punto P del cono è un punto della retta VQ quindi:

$$P - V = v(Q - V)$$

da cui si ottengono le equazioni parametriche del cono:

$$\begin{cases} x = a + v(x(u) - a) \\ y = b + v(y(u) - b) \\ z = c + v(z(u) - c) \end{cases}.$$

Le linee u = *costante* sono rette.

Le linee v = *costante* sono direttrici, ad eccezione di $v = 0$ che si riduce al vertice.

Per avere l'equazione cartesiana del cono occorre eliminare dalle espressioni precedenti i parametri u e v, cosa a volte difficile od impossibile.

ESEMPIO 8.3.4 - Trovare le equazioni parametriche del cono di vertice V(1, 1, 2) e direttrice L: $x = u$, $y = 1 - u^2$, $z = u^3$.

Applicando la formula si ottiene: $\begin{cases} x = 1 + v(u-1) \\ y = 1 - vu^2 \\ z = 2 + v(u^3 - 2) \end{cases}$.

ii) Se la curva direttrice L è data come intersezione di due superficie $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ un punto $P(x, y, z)$ sta sul cono di vertice $V(a, b, c)$ se e solo se appartiene alla retta VP_0 dove P_0 è un punto che varia su L e quindi ne soddisfa le equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{x = a + t(x_0 - a)} \\ \mathbf{y = b + t(y_0 - b)} \\ \mathbf{z = c + t(z_0 - c)} \\ \mathbf{F(x_0, y_0, z_0) = 0} \\ \mathbf{G(x_0, y_0, z_0) = 0} \end{cases}.$$

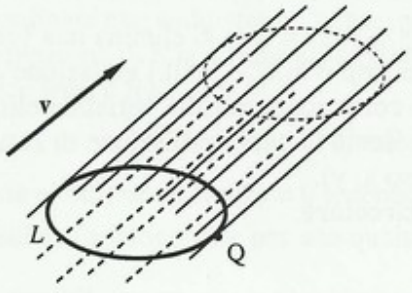
Per avere l'equazione cartesiana del cono occorre eliminare t, x_0, y_0, z_0 fra le precedenti cinque equazioni.

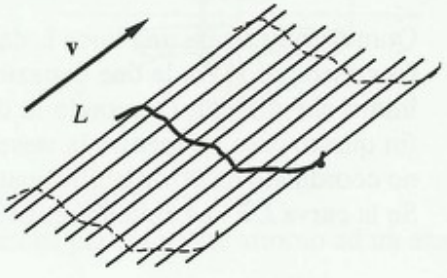
Un cono può anche essere definito senza assegnare esplicitamente la direttrice: ad esempio come cono tangente ad una sfera e di vertice assegnato.

ESEMPIO 8.3.5 - Determinare l'equazione cartesiana del cono di vertice V(0, 0, 3) e tangente alla sfera S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Si considera la retta generica per V: $x = lt$, $y = mt$, $z = 3 + nt$ e si impone che abbia due intersezioni coincidenti con S.
L'equazione risolvente del sistema è: $(l^2 + m^2 + n^2)\,t^2 + 6nt + 8 = 0$ che ha due radici coincidenti se $9n^2 - 8(l^2 + m^2 + n^2) = 0$ ossia $8l^2 + 8m^2 - n^2 = 0$, per cui l'equazione cartesiana del cono è $8(x^2 + y^2) - (z - 3)^2 = 0$.

8.4 - Cilindri.

DEFINIZIONE 8.4.1 - *Si dice* ***cilindro*** *la superficie rigata dello spazio, generata dalle rette, dette* ***generatrici****, incidenti una curva, detta* ***direttrice****, e parallele ad una direzione fissa.*
Se la direzione è data dal vettore $\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ e la direttrice L è descritta dal punto Q di coordinate $(x(u), y(u), z(u))$, il cilindro è l'unione di tutte le rette parallele a $\mathbf{v}$ che intersecano L. Queste rette hanno equazione vettoriale $P = Q(u) + t\,\mathbf{v}$ dove $Q(u) \in L$.





ESEMPIO 8.4.1 - Determinare l'equazione del cilindro avente direttrice L: $x = u$, $y = \cos u$, $z = u^2$ e generatrici parallele al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
La generica retta passante per un punto di L e parallela a $\mathbf{v}$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u + t \\ y = \cos u - 3t \\ z = u^2 + t \end{cases}$$

con u e $t \in \mathbf{R}$ e quindi queste sono le equazioni parametriche del cilindro.

Il cilindro si presenta facilmente in forma parametrica, ma non sempre è facile eliminare i due parametri.
Se la direzione è data dal vettore $\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ e la direttrice L è data come intersezione di due superficie $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$ un punto P sta sul cilindro se e solo se:

$$P = Q + tv \qquad \text{ove Q sta su } L.$$

Le equazioni parametriche del cilindro si ottengono quindi scrivendo le equazioni parametriche della retta per $Q(x_0, y_0, z_0)$ e parallela a $\mathbf{v}$ ed imponendo che Q stia su L cioè sulle due superficie che individuano L:

$$\begin{cases} \mathbf{x = x_0 + lt} \\ \mathbf{y = y_0 + mt} \\ \mathbf{z = z_0 + nt} \\ \mathbf{f(x_0, y_0, z_0) = 0} \\ \mathbf{g(x_0, y_0, z_0) = 0} \end{cases}.$$

L'equazione cartesiana del cilindro si ottiene eliminando x_0, y_0, z_0, t dalle cinque equazioni, ma ciò non sempre è possibile.

ESEMPIO 8.4.2 - Determinare l'equazione del cilindro avente come direttrice la curva L di equazioni $x = 0$, $x^2 - xy + y^2 - 3z = 0$ e generatrici parallele al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 - t \\ z = z_0 + 2t \\ x_0 = 0 \\ x_0^2 - x_0 y_0 + y_0^2 - 3z_0 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene $x^2 + 2xy + y^2 + 3(2x - z) = 0$.

Consideriamo ora il caso particolare dei cilindri paralleli ad uno degli assi coordinati.

TEOREMA 8.4.1 - *Se $f(x, y) = 0$ rappresenta è l'equazione di una curva L del piano x, y la stessa equazione*

$$f(x, y) = 0$$

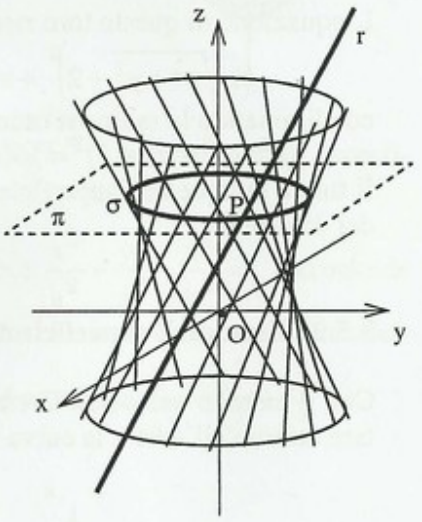
rappresenta nello spazio un cilindro di direttrice L e con le generatrici parallele all'asse z.

Quindi considerata una linea L data da $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$ se si elimina una variabile (per esempio z) fra le due equazioni si ottiene (ad esempio $h(x, y) = 0$) l'equazione del cilindro che proietta L secondo la direzione dell'asse corrispondente alla variabile eliminata (in questo caso z), mentre la stessa equazione rappresenta la curva proiezione di L sul piano coordinato delle variabili rimanenti (in questo caso x, y).
Se la curva L è una circonferenza il cilindro si dice **circolare**.

8.5 - Superficie di rotazione.

8.5.1 - Generalità sulle superficie di rotazione.

DEFINIZIONE 8.5.1 - *Si dice* ***rotonda o di rotazione*** *ogni superficie generata da una linea L di forma invariabile che ruota attorno ad una retta detta* ***asse*** *della superficie. Ogni punto della linea genera un cerchio detto* ***parallelo****, contenuto in un piano perpendicolare all'asse e con il centro sull'asse.*
I piani passanti per l'asse incontrano la superficie secondo linee tutte congruenti fra loro, simmetriche rispetto all'asse, dette ***meridiani****.*



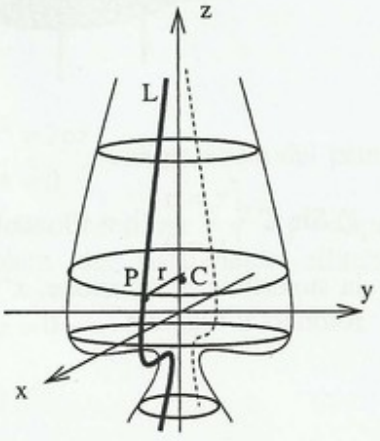
ESEMPIO 8.5.1 - Determinare la superficie di rotazione attorno all'asse z della retta r: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2z \end{cases}$.

Sia P(1, 2t, t) il punto generico di r.
Il piano π per P ortogonale all'asse z ha equazione z = t.
La circonferenza σ del piano π che passa per P ed ha centro sull'asse z, si può scrivere come intersezione di π con la sfera di centro l'origine e raggio OP: $\begin{cases} z = t \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 4t^2 + t^2 \end{cases}$.

Eliminando t si ottiene l'equazione cartesiana della superficie: $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ (iperboloide rotondo ad una falda).

ESEMPIO 8.5.2 - Determinare la superficie di rotazione della retta s: $x + 2z - 5 = y - z = 0$ attorno alla retta s_1: $x - z + 1 = y - 2 = 0$.
In questo caso le rette non sono ortogonali e sono incidenti in V(1, 2, 2) si avrà un cono.
L'equazione cartesiana è $5x^2 - y^2 + 5z^2 + 12xz - 34x + 4y - 32z + 45 = 0$

ESEMPIO 8.5.3 - Supponiamo ora di dover determinare la superficie S di rotazione tale che l'asse coincida con l'asse z e tale che la linea L stia sul piano xz, ossia sia rappresentata dalle equazioni $\begin{cases} f(x,z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.



Un punto P(X, 0, Z) di L descrive il cerchio del piano z = Z, di centro C(0, 0, Z) e raggio PC = X
$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - Z)^2 = X^2 \\ z = Z \end{cases}$ ossia $\begin{cases} x^2 + y^2 = X^2 \\ z = Z \end{cases}$.

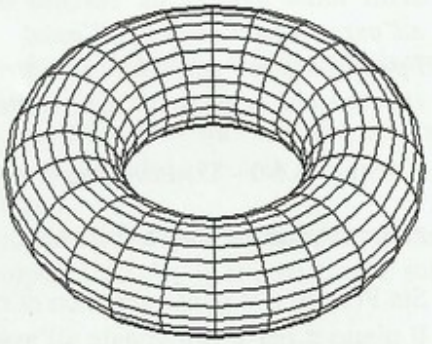
Tenuto conto che il punto P che descrive S ha le coordinate che soddisfano l'equazione f(X, Z) = 0 l'equazione di S si ottiene eliminando X e Z fra le precedenti e f(X, Z) = 0:

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

ossia si ottiene da f(x, z) = 0 tenendo fissa z e sostituendo x con $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$.
Risultato analogo vale per una qualsiasi superficie ottenuta per rotazione attorno ad un asse

coordinato di una curva appartenente ad un piano coordinato contenente tale asse.

ESEMPIO 8.5.4 - Come caso particolare del precedente consideriamo una circonferenza che ruoti attorno ad una retta che non ne sia diametro. Esso genera una superficie detta **toro**, di forma anulare se l'asse è esterno alla circonferenza.
Supponiamo che l'asse di rotazione sia l'asse z e che l'equazione della circonferenza sul piano xz sia: $\begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$.



L'equazione di questo toro risulta quindi:

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2 + z^2 = 1$$

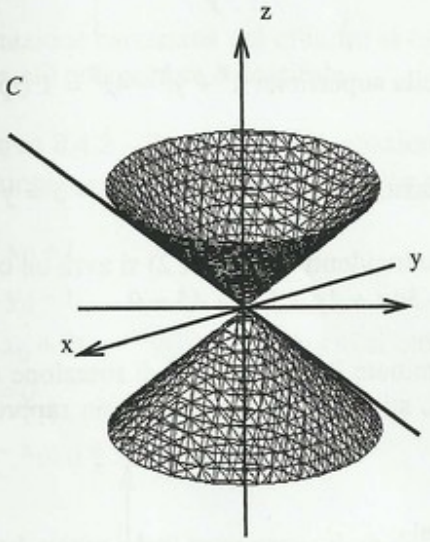
ed eliminando la radice si ottiene

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2).$$

Il toro è dunque una superficie algebrica del 4° ordine.

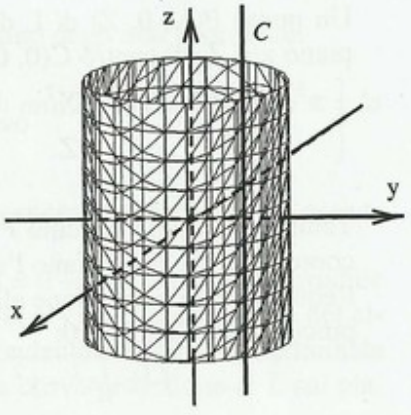
8.5.2 - Esempi di superficie di rotazione che sono quadriche.

Con il metodo usato nell'Esempio 8.5.3 troviamo l'equazione della superficie facendo ruotare attorno all'asse z la curva C nei vari casi:



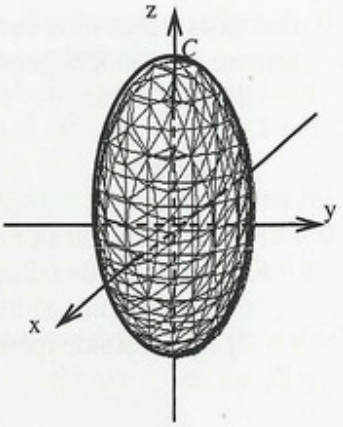
1) Sia $C \begin{cases} x - hz = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $(h \neq 0)$ una retta incidente l'asse z nell'origine, la superficie di rotazione è un cono di equazione $x^2 + y^2 - h^2z^2 = 0$.

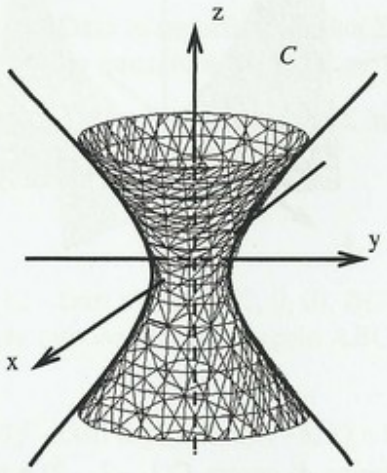
2) Sia $C \begin{cases} x = h \\ y = 0 \end{cases}$ $(h \neq 0)$ una retta parallela all'asse z; la superficie di rotazione: $x^2 + y^2 = h^2$ è un cilindro rotondo di raggio h.



3) Sia $C \begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ un'ellisse, la superficie di rotazione è $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ caso particolare dell'ellissoide a punti reali $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

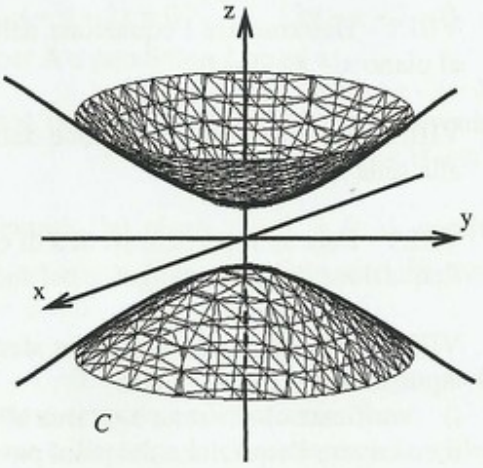
Se a = b = c l'ellissoide è una sfera di centro l'origine e raggio a.

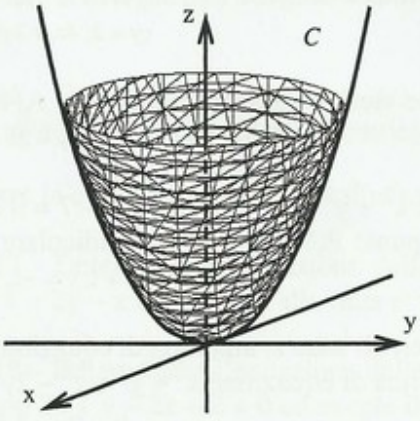




4) Sia $C \begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ un'iperbole; la superficie di rotazione è $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$ iperboloide rotondo ad una falda, caso particolare dell'iperboloide ad una falda $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

5) Sia $C \begin{cases} \dfrac{z^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ un'iperbole che ha come asse trasverso l'asse z; la superficie di rotazione è $\dfrac{z^2}{a^2}-\dfrac{x^2+y^2}{b^2}=1$, caso particolare dell'iperboloide a due falde $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

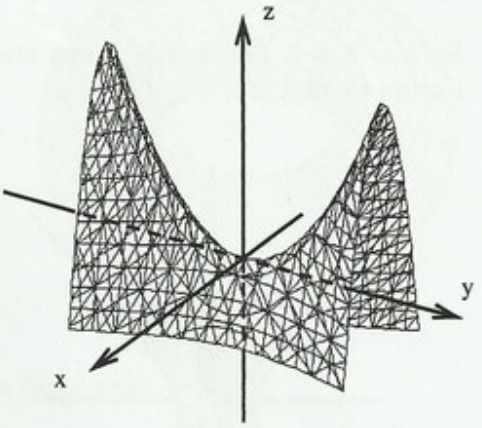




6) Sia $C \begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}$ una parabola del piano yz; la superficie di rotazione è $x^2 + y^2 = 2pz$, caso particolare del paraboloide ellittico $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-2z=0$.

OSSERVAZIONE - Le equazioni polinomiali di secondo grado a punti reali possono rappresentare varii luoghi geometrici:

0) due piani;
1) cono;
2) cilindro;
3) ellissoide;
4) iperboloide ad una falda;
5) iperboloide a due falde;
6) paraboloide ellittico;
7) paraboloide iperbolico.



Solo il paraboloide iperbolico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ non è mai una superficie di rotazione. Per la sua particolare forma viene anche detto paraboloide a sella.

8.6 - Esercizi proposti.

VIII.1 - Determinare l'equazione della superficie sferica di centro C(1, –2, –2) e tangente al piano $x - z + 1 = 0$. $(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 1 = 0)$

VIII.2 - Determinare l'equazione della superficie sferica di centro C(1, –2, –2) e tangente alla retta $x = y = z$. $(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 3 = 0)$

VIII.3 - Data la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3 = 0$, determinare l'equazione del piano tangente nel suo punto P(2, –1, 0).

VIII.4 - Considerate la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 3 = 0$ e la retta di equazioni: $x - 1 = y - 2 = 0$:

i) verificare che la retta è esterna alla superficie sferica;
ii) scrivere l'equazione dei piani passanti per la retta e tangenti alla superficie sferica.

$(y = 2, 4x + 3y - 10 = 0)$

VIII.5 - Determinare l'equazione della superficie sferica passante per i punti A(4, 2, 3) e B(–1, –2, 2) ed avente centro sulla retta $x = y = z$. $(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 11 = 0)$

VIII.6 - Data la superficie sferica Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y - z - 7 = 0$ determinare l'equazione della retta tangente a Σ nel suo punto P(1, –1, 2) e perpendicolare alla retta $x - z = 2y + z - 3 = 0$. $(x = 1 + t, y = -1, z = 2 - t)$

VIII.7 - Determinare l'equazione dei piani paralleli all'asse z, alla retta di equazioni: $x + y + z = y - z = 0$ e tangenti alla superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$.

$(x + 2y - 2 \pm \sqrt{5} = 0)$

VIII.8 - Determinare l'equazione della superficie sferica tangente al piano $x + y + 2z - 4 = 0$ nel suo punto P(2, 0, 1) ed inoltre soddisfacente ad una delle due condizioni:

i) passante per il punto A(1, 1, 0); $(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5x + 3y + 2z - 2 = 0)$

ii) avente centro sul piano $x + y + z + 1 = 0$. $(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 3 = 0)$

VIII.9 - Determinare l'equazione della superficie sferica passante per la circonferenza intersezione del piano: $2x - y + z - 2 = 0$ con la superf. sferica: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ e per l'origine. $(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x + 5y + 3z = 0)$

VIII.10 - Determinare centro e raggio della circonferenza intersezione della superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 - x + z - 3 = 0$ con il piano $x - y - z + 2 = 0$. $(C(-1/2, 1, 1/2), r = \sqrt{2}/2)$

VIII.11 - Data la superficie sferica Σ: $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ ed il suo punto $V(1, 2\sqrt{2}, 0)$ determinare le equazioni dei piani perpendicolari alla congiungente il centro della superficie sferica con V e che intersechino Σ in una circonferenza di raggio $r = \frac{1}{2}$.

$$\left(x + 2\sqrt{2}y \pm \frac{3\sqrt{35}}{2} = 0\right)$$

VIII.12 - Dati i punti A(2, 0, 0), B(3, 2, –1), C(–2, 1, 1), scrivere le equazioni della circonferenza circoscritta al triangolo ABC. $(x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z - 4 = 0 \text{ e } x + y + 3z - 2 = 0)$

VIII.13 - Dati il punto A(3, –3, 1) e le rette r: $\begin{cases} 2x - y + 3z + 5 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ ed s: $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$:

i) determinare l'equazione del piano p passante per A e parallelo ad r e ad s; $(2x + y + z - 4 = 0)$

ii) determinare l'equazione della superficie sferica tangente al piano p in A ed avente centro sul piano xy. $(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 11 = 0)$

VIII.14 - Determinare le equazioni della circonferenza del piano $z + 1 = 0$, di centro Q(2, 3, –1) e raggio $r = \sqrt{3}$; determinare inoltre le equazioni delle superficie sferiche passanti per la circonferenza e tangenti alla retta $x = y - 3 = 0$

VIII.15 - Date le superficie sferiche Σ_1: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ studiare il loro fascio determinando piano radicale, asse centrale e circonferenza base.
Scrivere l'equazione del cono con vertice nell'origine e direttrice la circonferenza base del fascio. $(9x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 32xy = 0)$

VIII.16 - Determinare l'equazione del cilindro circoscritto alla superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ avente generatrici parallele alla direzione (1, –1, 0). $(x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy = 2)$

Studiare la curva sezione di tale cilindro con il piano $x = 0$. (ellisse $y^2/2 + z^2 = 1$)

VIII.17 - Determinare l'equazione della superficie di rotazione generata ruotando la retta r: $z - 1 = 2y - x = 0$ attorno alla retta s: $x = 2t$, $y = t$, $z = 0$. $(x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 5 = 0)$

VIII.18 - Determinare l'equazione della superficie sferica Σ tangente nel punto P(–1, 0, 0) al piano $2x + y - 2z + 2 = 0$ ed avente il centro sul piano $y + z + 1 = 0$. $(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 3 = 0)$

VIII.19 - Determinare l'equazione del cilindro avente come direttrice la circonferenza sezione della superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 3 = 0$ con il piano $y = 1$ ed avente generatrici parallele all'asse y. $(x^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0)$

VIII.20 - Considerata la circonferenza C di equazioni $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 15 = 0$, $z = 0$ determinare l'equazione della superficie ottenuta dalla rotazione completa di C attorno all'asse y. $((x^2 + y^2 + z^2 + 15)^2 = 64(x^2 + z^2))$

VIII.21 - Determinare l'equazione della superficie rigata avente vertice V(0, 0, 0) e come direttrice la curva C di equazioni $x^2 + y^2 + z^2 = 20$, $z = 2$. $(x^2 + y^2 - 4z^2 = 0)$
Calcolare il volume del cono elementare di vertice V e base C. $(32\pi/3)$

VIII.22 - Nello spazio riferito ad un sistema cartesiano ortonormale monometrico è data la retta r di equazioni $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z + 3 = 0 \end{cases}$. Scrivere l'equazione del cono generato dalla rotazione di r attorno all'asse z. $(9x^2 + 9y^2 - 5(z - 3)^2 = 0)$

VIII.23 - Determinare l'equazione cartesiana del cilindro avente come direttrice la circonferenza di equazioni: $x = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e generatrici parallele alla retta $x - y + 1 = 0$, $z = 2$. $((-x + y)^2 + z^2 = 16)$

VIII.24 - Nello spazio riferito ad un sistema cartesiano ortonormale monometrico è data la curva *L* di equazioni $x = t^2$, $y = 2 - t$, $z = 1 + 2t$. Scrivere l'equazione del cono di vertice V (0, 0, 2) e direttrice *L*. $(3x(2y + z - 2) = (y + 2z - 4)^2)$

VIII.25 - Nello spazio riferito ad un sistema cartesiano ortonormale monometrico determinare le equazioni del cono Σ di vertice V(1, 2, 2) e direttrice la parabola γ di equazioni $\begin{cases} z = 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$. $((2z - y - 2)^2 = 4(z - 2)(z - x - 1))$

VIII.26 - Nello spazio riferito ad un sistema cartesiano ortonormale monometrico sono date le superficie sferiche di equazioni rispettivamente Σ_1: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2z - 8 = 0$, Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 - 7x - 2y - 5 = 0$. Determinare:

i) l' equazione del piano radicale del fascio da loro individuato e verificare che tale piano è secante le due superficie sferiche; $(x - 2y + 2z + 3 = 0)$
ii) centro e raggio della circonferenza intersezione; $(C(3, 2, -1), r = 4)$
iii) l'equazione del cilindro circoscritto alla superficie sferica Σ_1 ed avente generatrici parallele al vettore **k**. $(x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0)$

CAPITOLO IX

CONICHE

9.1 - Coordinate omogenee nel piano proiettivo.

Per studiare le coniche come curve algebriche del secondo ordine (v. Definizione 6.1.2) è opportuno ampliare il piano cartesiano con la retta all'infinito, definendo il piano proiettivo.

Nell'insieme $I = \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ delle terne non nulle di numeri reali consideriamo la seguente relazione di equivalenza:

$$(x_1, x_2, x_3)\ \sigma\ (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \text{ tale che } y_i = \lambda x_i\ (i = 1, 2, 3).$$

Ad esempio la terna (1, 2, –1) è in relazione con la terna (–3, – 6, 3), ma non con la terna (–3, 6, 1).

Costruiamo poi l'insieme quoziente I/σ ed indichiamo la generica classe di equivalenza di I/σ con $\{(x_1, x_2, x_3)\}$.

Osserviamo che se per un elemento (x_1, x_2, x_3) di una classe di equivalenza si ha $x_3 = 0$, per ogni altra terna di tale classe la terza componente è zero, poiché $y_3 = \lambda x_3$.

Consideriamo poi il sottoinsieme I^* contenuto in I/σ formato dalle classi di equivalenza in cui $x_3 \neq 0$ e stabiliamo una corrispondenza fra I^* ed $\mathbf{R}^2$ nel seguente modo:

$$\phi: I^* \to \mathbf{R}^2$$

$$\{(x_1, x_2, x_3)\} \mapsto \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$

Valgono le proprietà:

- ϕ è ben definita:

infatti se $(y_1, y_2, y_3)\ \sigma\ (x_1, x_2, x_3)$ si ha $y_1 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda x_2$, $y_3 = \lambda x_3$ dunque

$$\phi(\{(y_1, y_2, y_3)\}) = \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) = \left(\frac{\lambda x_1}{\lambda x_3}, \frac{\lambda x_2}{\lambda x_3}\right) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = \phi(\{(x_1, x_2, x_3)\}).$$

- ϕ è suriettiva:

infatti considerato $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha $\phi(\{(x, y, 1)\}) = (x, y)$.

- ϕ è iniettiva:

se $\phi(\{(x_1, x_2, x_3)\}) = \phi(\{(y_1, y_2, y_3)\})$ allora $\frac{x_1}{x_3} = \frac{y_1}{y_3}$ e $\frac{x_2}{x_3} = \frac{y_2}{y_3}$

quindi $x_3 = ky_3$, $x_1 = ky_1$, $x_2 = ky_2$ (con $k \neq 0$) ossia $\{(x_1, x_2, x_3)\} = \{(y_1, y_2, y_3)\}$.

La corrispondenza ϕ è quindi biunivoca, ogni punto (x, y) di $\mathbf{R}^2$ può essere rappresentato con una terna di numeri (x_1, x_2, x_3) tali che:

$$\frac{x_1}{x_3} = x \qquad \frac{x_2}{x_3} = y \qquad \text{con } x_3 \neq 0.$$

Se il punto $P(x, y)$ appartiene alla retta

$$r : ax + by + c = 0$$

tutte le terne (x_1, x_2, x_3) tali che $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$, $(x_3 \neq 0)$ verificano l'equazione

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0. \tag{1}$$

DEFINIZIONE 9.1.1 - *L'insieme quoziente I/σ si dice* ***piano proiettivo o piano ampliato.*** *Si dice* ***punto del piano ampliato*** *ogni classe di equivalenza, elemento di I/σ e* ***retta ampliata*** *l'insieme degli elementi di I/σ che soddisfano la (1).*

Ad esempio (2, –3, 2) è un punto della retta $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ perché sostituendo 2λ ad x_1, -3λ ad x_2 e 2λ ad x_3 si ottiene un'identità.
Vediamo ora che esistono elementi di I/σ che non stanno in I^* e che soddisfano la (1), tali elementi vengono detti **punti impropri** o **punti all'infinito**.
Osserviamo che:
- se la terna $(\alpha, \beta, 0)$ soddisfa la (1) , anche la terna $(\lambda\alpha, \lambda\beta, 0)$ la soddisfa;
- dato che a e b non sono entrambi nulli, esiste una terna con $x_3 = 0$ che soddisfa la (1): è il punto (b, – a, 0);
- tale punto è comune a tutte le rette parallele alla retta r;
- è l'unico punto improprio di r.

Infatti si ha: $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$; supposto $a \neq 0$ si ricava $\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = -\dfrac{b}{a} \\ x_3 = 0 \end{cases}$ per cui tutte le soluzioni del sistema sono del tipo $\lambda\left(-\dfrac{b}{a}, 1, 0\right)$ ossia $\lambda(b, -a, 0)$ è l'unico punto improprio di r.
Quindi: *ogni retta ampliata contiene un unico punto improprio che è comune a tutte le sue parallele.*

ESEMPIO 9.1.1 - Le rette r: $x - 2y + 2 = 0$ ed r': $x - 2y + 7 = 0$ hanno in comune il punto all'infinito $P_\infty = (2, 1, 0)$.

Infatti passando a coordinate omogenee il punto comune alle due rette è soluzione del sistema : $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

Vediamo alcuni casi particolari di rette:
$x_1 = 0$ è soddisfatta da tutti i punti del tipo $(0, \lambda, \mu)$; il suo punto improprio è (0, 1, 0);
$x_2 = 0$ è soddisfatta da tutti i punti del tipo $(\lambda, 0, \mu)$; il suo punto improprio è (1, 0, 0);
$x_3 = 0$ è soddisfatta da tutti i punti del tipo $(\lambda, \mu, 0)$; tutti i suoi punti sono impropri.

Osserviamo che ogni punto improprio sta su una retta propria, sulle sue parallele e sulla retta impropria.

ESEMPIO 9.1.2 - $(\alpha, \beta, 0)$ appartiene alla retta propria $\beta x_1 - \alpha x_2 = 0$, alle sue parallele $\beta x_1 - \alpha x_2 + c x_3 = 0$ ed alla retta impropria $x_3 = 0$.

Vediamo ora altri esempi di punti impropri.

ESEMPIO 9.1.3 - La retta $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ in coordinate omogenee diventa $\dfrac{x_1 - x_0 x_3}{l} = \dfrac{x_2 - y_0 x_3}{m}$ quindi il suo unico punto improprio è (l, m, 0), come facilmente si verifica.

ESEMPIO 9.1.4 - Per determinare i punti impropri della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ occorre passare in coordinate omogenee:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \pm i x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Si ottengono due punti impropri immaginari $(1, \pm i, 0)$ detti **punti ciclici**.
Tali punti sono i punti impropri delle due rette immaginarie dette **rette isotrope**, ciascuna delle quali è perpendicolare a se stessa, di equazioni: $x + iy = 0$ e $x - iy = 0$.
Le coordinate dei punti ciclici soddisfano l'equazione di qualunque circonferenza, quindi ogni circonferenza del piano passa per i punti ciclici.

ESEMPIO 9.1.5 - Per determinare i punti impropri dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ occorre passare in coordinate omogenee. $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \pm \frac{a}{b} x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$

Si ottengono due punti reali distinti $(a, b, 0)$, $(a, -b, 0)$, quindi la retta impropria è secante l'iperbole. I punti impropri dell'iperbole vengono detti **direzioni asintotiche**.

Procedendo in modo analogo si vede che la retta all'infinito ha in comune con l'ellisse due punti immaginari ossia è esterna all'ellisse.

Intersecando la retta all'infinito con la parabola $y^2 = 2px$, (che ha equazione omogenea $x_2^2 = 2px_1x_3$) si ottengono due punti reali coincidenti $(1, 0, 0)$ ossia la retta all'infinito è tangente alla parabola.

9.2 - Classificazione delle coniche.

Ricordiamo (v. Definizione 6.1.2) che si dice **conica** l'insieme C dei punti del piano (x, y) soddisfacenti ad una equazione algebrica di II° grado in x, y:

(2) $$\mathbf{f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.}$$

Se consideriamo il piano proiettivo, l'equazione della conica in coordinate omogenee diventa:

(3) $$\mathbf{f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.}$$

DEFINIZIONE 9.2.1 - *Si dice **punto doppio** della conica C un punto $P(x_1, x_2, x_3)$ di C le cui coordinate sono soluzioni del sistema (le cui equazioni sono le derivate parziali della (3) rispettivamente rispetto ad x_1, x_2, x_3, divise per due ed eguagliate a zero):*

(4) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}.$$

Poiché si ricava facilmente che
$f(x_1,x_2,x_3) = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + x_3(a_{13}x_3 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0$
l'eventuale punto soluzione del sistema è un punto della conica.

Il determinante dei coefficienti del sistema è:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

e viene detto **discriminante della conica**.

Ricordando la teoria dei sistemi si ha che:

- se $A \neq 0$, il sistema ha solo la soluzione nulla $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ che non rappresenta nessun punto del piano ampliato, quindi la conica non ha punti doppi e si dice **non degenere**;
- se $A = 0$ il sistema ha soluzioni non nulle, la conica ha almeno un punto doppio P_0, si spezza nel prodotto di due rette e si dice **degenere**.

Una conica si dice:

- **semplicemente degenere** se è composta da due rette distinte e incidenti;
- **doppiamente degenere** se è composta da due rette coincidenti.

Per illustrare quanto detto vediamo i seguenti esempi:

ESEMPIO 9.2.1 - Data la conica: $x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 4y = 0$ verificare che è composta da due rette distinte ed incidenti e che $P_0(-4, 4)$ è punto doppio.

Poiché $A = 0$ ed $A_{33} = -\frac{1}{4}$ il sistema (4) in coordinate non omogenee si scrive:

$$\begin{cases} x + 3y/2 - 2 = 0 \\ 3x/2 + 2y - 2 = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases}$$ Tale sistema ammette solo la soluzione $P_0(-4, 4)$.

Intersechiamo la generica retta per P_0 $\begin{cases} x = -4 + lt \\ y = 4 + mt \end{cases}$ con la conica. L'equazione risolvente del sistema formato dalle equazioni della retta e della conica è $(l^2 + 3lm + 2m^2)t^2 = 0$.

Se $l^2 + 3lm + 2m^2 = 0$ ossia $\frac{l}{m} = -2$ oppure $\frac{l}{m} = -1$ l'equazione risolvente è un'identità e le rette r_1 $\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \end{cases}$ ed r_2 $\begin{cases} x = -4 - t \\ y = 4 + t \end{cases}$ sono le rette in cui si spezza la conica.

Se $l^2 + 3\,lm + 2\,m^2 \neq 0$ allora $t^2 = 0$, ossia ogni retta diversa da r_1 ed r_2 interseca la conica solo in P_0 in cui ci sono due intersezioni coincidenti.

ESEMPIO 9.2.2 - Data la conica: $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ verificare che è doppiamente degenere.

Il sistema (4) in coordinate non omogenee si scrive: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ -x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

Tale sistema ammette infinite soluzioni: tutti i punti della retta $x + y - 1 = 0$ sono punti doppi ossia la conica è doppiamente degenere e la sua equazione diventa $(x + y - 1)^2 = 0$.

DEFINIZIONE 9.2.2 - *Una conica C si dice:*
*- **di tipo ellittico** se non ha punti all'infinito, cioè la retta impropria non interseca C;*
*- **di tipo parabolico** se ha un solo punto all'infinito, cioè la retta impropria è tangente a C;*
*- **di tipo iperbolico** se ha due punti distinti all'infinito, cioè la retta impropria è secante a C.*

Per determinare i punti di intersezione tra la conica e la retta impropria si deve risolvere il sistema: $\begin{cases} x_3 = 0 \\ f(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$ e, sostituendo, $\begin{cases} x_3 = 0 \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \end{cases}$.

L'equazione di secondo grado ha come discriminante $\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

Il sistema: - ha due soluzioni reali distinte se $\Delta > 0$;
- ha due soluzioni reali coincidenti se $\Delta = 0$;
- non ha soluzioni reali se $\Delta < 0$.

Si osserva che $\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ è l'opposto del minore $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ dell'elemento a_{33} del determinante **A**, quindi:

- **la conica è di tipo iperbolico** se $A_{33} < 0$;
- **la conica è di tipo parabolico** se $A_{33} = 0$;
- **la conica è di tipo ellittico** se $A_{33} > 0$.

DEFINIZIONE 9.2.3 - *Una conica non degenere ed a punti reali si dice **iperbole, parabola, ellisse,** a seconda che sia di tipo iperbolico, parabolico, ellittico.*

OSSERVAZIONE 1 - Ricordando l'Esempio 9.1.5 la definizione ora data è coerente con i nomi delle coniche ottenute come luoghi di punti.

OSSERVAZIONE 2 - Abbiamo detto che una conica è di tipo parabolico se $A_{33} = 0$. Tale condizione implica che il complesso dei termini di secondo grado dell'equazione (3) sia un quadrato; si può allora porre $a_{11} = a^2$, $a_{22} = b^2$ e $a_{12} = ab$ e la conica si può scrivere nella forma:

$$(ax_1 + bx_2)^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

ed il punto improprio della conica ha coordinate $(-b, a, 0)$.

ESEMPIO 9.2.3 - Determinare il tipo della conica: $2x^2 + y^2 - 3x + y - 5 = 0$.

Calcoliamo $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ -3/2 & 1/2 & -5 \end{vmatrix} = -10 - \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{51}{4} \neq 0$ quindi la conica è non degenere. Per determinarne il tipo calcoliamo $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$.

La conica è di tipo ellittico, quindi è un'ellisse.

ESEMPIO 9.2.4 - Determinare il tipo della conica: $2x^2 + xy - y^2 + x + y - 3 = 0$.

Calcoliamo $A = \begin{vmatrix} 2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -3 \end{vmatrix} = 6 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{27}{4} \neq 0$ quindi la conica è non degenere. Per determinarne il tipo calcoliamo $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4} < 0$.

La conica è di tipo iperbolico, quindi è un'iperbole.

ESEMPIO 9.2.5 - Determinare il tipo della conica: $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0$.

Calcoliamo $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 - 1 = -4 \neq 0$ quindi la conica è non degenere.

Per determinarne il tipo calcoliamo $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$.

La conica è di tipo parabolico, quindi è una parabola.
Notiamo che, come osservato prima, il complesso dei termini di secondo grado è un quadrato $(x - y)^2$.

ESEMPIO 9.2.6 - Verificare che la seguente conica: $x^2 + xy - 2y^2 + x + 2y = 0$ è degenere e si spezza in due rette.
Poichè $A = 0$ ed $A_{33} < 0$ si tratta di una conica degenere di tipo iperbolico. Per ricavarne le componenti si riscrive l'equazione nella forma: $x^2 + x(y + 1) - 2y^2 + 2y = 0$.
Tale equazione di secondo grado in x ha discriminante $(y + 1)^2 + 8y^2 - 8y = 9y^2 - 6y + 1 = (3y - 1)^2$, per cui ricavando x mediante y si ha: $x = \frac{-(y+1) \pm (3y-1)}{2}$ e quindi si ottiene che la conica si spezza nelle rette: $x - y + 1 = 0$ ed $x + 2y = 0$.

ESEMPIO 9.2.7 - Verificare che la conica: $2x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ è degenere di tipo ellittico.
Infatti si ha $A = 0$ e $A_{33} > 0$. In questo caso la conica non contiene rette reali.

9.3 - Intersezione di una retta r e di una conica *C*.

Date la retta r di equazioni parametriche $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$ e la conica *C* di equazione (2) i loro punti comuni sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \end{cases}$$

L'equazione risolvente in t è di secondo grado: $\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0$ dove:

$\alpha = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2$;

$\beta = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})\, l + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})\, m$;

$\gamma = f(x_0, y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}$.

Possono presentarsi vari casi.

1) L'**equazione risolvente è un'identità**: quindi ci sono infinite soluzioni e la retta è contenuta nella conica (che è quindi degenere).

ESEMPIO 9.3.1 - $\begin{cases} 2xy + y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ La conica $2xy + y = 0$ contiene la retta $y = 0$; infatti la sua equazione si può scrivere: $y(2x + 1) = 0$.

2) L'**equazione risolvente ha grado zero, ma non è un'identità**: le due intersezioni mancanti sono all'infinito; ad esempio *C* è un'iperbole ed r è un suo asintoto, vi è un punto di molteplicità due all'infinito.

ESEMPIO 9.3.2 - $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ non ci sono soluzioni al finito.

Passando a coordinate omogenee si ottiene il sistema: $\begin{cases} 4x_1^2 - 9x_2^2 = x_3^2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = x_3^2 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_2 \end{cases}$

la cui soluzione è il punto (–3, 2, 0) contato due volte.

3) L'**equazione risolvente ha grado uno**: vi è una sola intersezione al finito, ad esempio C è una parabola ed r è parallela all'asse della parabola; una soluzione è al finito e l'altra all'infinito.

ESEMPIO 9.3.3 - $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = 2x \\ y = 2 \end{cases}$ una sola soluzione al finito P(2, 2).

Passando a coordinate omogenee si ottiene il sistema:

$\begin{cases} x_2^2 = 2x_1x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_3^2 - 2x_1x_3 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3(2x_3 - x_1) = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x_3 = x_1 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$

e si ottengono i punti: Q(1, 0, 0) all'infinito e P(2, 2, 1) (soluzione al finito trovata anche prima).

4) l'**equazione risolvente ha grado due**, vi sono due intersezioni: reali distinte, reali coincidenti, complesse coniugate ed in corrispondenza la retta si dirà rispettivamente **secante**, **tangente**, **esterna**.

ESEMPIO 9.3.4 - Considerata la conica di equazione: $3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$:

- verificare che non è degenere. Si ha $A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$

- determinarne il tipo. $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0.$ La conica è un'iperbole.

- trovarne le intersezioni con la retta all'infinito:

$\begin{cases} 3x_1^2 - 4x_1x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (3x_1 - 4x_2)x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ da cui

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ cioè (0, 1, 0) e $\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ cioè $\left(\frac{4}{3}, 1, 0\right)$.

- trovarne le intersezioni con la retta $x + 2y + 1 = 0$:

$\begin{cases} y = -\frac{x+1}{2} \\ 3x^2 - 4x\frac{-x-1}{2} + 8x + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{x+1}{2} \\ 3x^2 + 2x^2 + 2x + 8x + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{x+1}{2} \\ 5x^2 + 10x + 5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -\dfrac{x+1}{2} \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ contato due volte.

I due punti di intersezione coincidono, la retta è tangente alla conica nel punto A(–1, 0).

- trovarne le intersezioni con la retta $y = -\frac{1}{2}x + 2$:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ 3x^2 - 4x(-\frac{1}{2}x + 2) + 8x + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ 3x^2 + 2x^2 - 8x + 8x + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ 5x^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = \pm i \\ y = 2 \mp i/2 \end{cases}$ poiché i due punti sono immaginari la retta è esterna all'iperbole.

9.4 - Retta tangente ad una conica.

Riprendiamo l'equazione risolvente del sistema fra una retta r ed una conica C vista nel paragrafo precedente:

$$\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0.$$

Per semplicità supponiamo la conica non degenere, ossia senza punti doppi. Sia P_0 un punto di C, cioè $\gamma = 0$, la retta r risulterà tangente a C in P_0 se $\beta = 0$.
Tale condizione permette di ricavare i parametri direttori della tangente in P_0:

$$\frac{l}{m} = -\frac{a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}}{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}}.$$

Tali valori sostituiti in $m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0$ danno l'equazione della tangente:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0.$$

Ma $P_0 \in C$, quindi tenuto conto che

$$a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = -(a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + a_{13}x_0 + a_{23}y_0)$$

la retta precedente si scrive anche:

(5) $$\mathbf{a_{11}x_0x + a_{12}(y_0x + x_0y) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0}$$

che si dice ottenuta dall'equazione della conica con la **regola degli sdoppiamenti** cioè con le sostituzioni:

$$x^2 \to x_0x, \quad y^2 \to y_0y, \quad xy \to \frac{x_0y + y_0x}{2}, \quad x \to \frac{x + x_0}{2}, \quad y \to \frac{y + y_0}{2}.$$

L'equazione (5) si può anche scrivere:

$$x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + (a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}) = 0.$$

Se si considera l'equazione (3) della conica in coordinate omogenee, la tangente alla conica nel suo punto P_0 di coordinate omogenee (x_0, y_0, z_0) diventa:

(5') $$\mathbf{x_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0) + x_2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0) + x_3(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0) = 0}$$

che si ottiene anche calcolando:

(5'') $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{P_0} x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{P_0} x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{P_0} x_3 = 0.$$

Se nella (5') si mettono invece in evidenza le coordinate di P_0 si ottiene:

$$x_0(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + y_0(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + z_0(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0$$

che, facendo uso delle derivate parziali, si può anche scrivere:

(5''') $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)x_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)y_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)z_0 = 0.$$

ESEMPIO 9.4.1 - Determinare la tangente alla conica $x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0$ nel suo punto P(2, 0). La tangente ha equazione: $2x - 2\frac{2y}{2} - 2\frac{x+2}{2} = 0$ ossia $x - 2y - 2 = 0$.

9.5 - Cenni sulla polarità rispetto ad una conica.

Sia *C* una conica non degenere di equazione in coordinate cartesiane non omogenee:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Nel § 9.4 abbiamo visto che l'equazione della retta tangente in un suo punto $P_0(x_0, y_0)$ si ottiene mediante la regola degli sdoppiamenti:

(5) $$a_{11}x_0x + a_{12}(y_0x + x_0y) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0.$$

L'espressione (5) ad un punto qualsiasi $P_0(x_0, y_0)$ del piano, anche non appartenente alla conica, fa corrispondere una retta p_0 che si dice **polare di P_0 rispetto alla conica** e P_0 si dice **polo della retta p_0**. La polare di $P_0(x_0, y_0)$ ha quindi equazione:

(6) $$\mathbf{a_{11}x_0x + a_{12}(y_0x + x_0y) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0.}$$

Ovviamente *la polare di un punto della conica è la tangente alla conica nel punto.*

ESEMPIO 9.5.1 - Data la conica di equazione $3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$, trovare la polare del punto B(1, 2).

Si ha: $3x - 4\frac{y+2x}{2} + 8\frac{x+1}{2} + 5 = 0$ da cui $3x - 2y - 4x + 4x + 4 + 5 = 0$,

cioè: $3x - 2y + 9 = 0$.

In modo del tutto analogo a quanto visto nel § 7.4 la polare del punto $P_0(x_0, y_0)$ si può anche scrivere:

$$\mathbf{x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + (a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}) = 0}$$

o, se si considera l'equazione (3) della conica in coordinate omogenee, la polare del punto P_0 di coordinate omogenee (x_0, y_0, z_0) diventa:

(6') $$\mathbf{x_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0) + x_2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0) + x_3(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0) = 0}$$

che si ottiene anche calcolando:

(6'') $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{P_0} x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{P_0} x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{P_0} x_3 = 0$$

oppure:

(6''') $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)x_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)y_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)z_0 = 0.$$

ESEMPIO 9.5.2 - La conica precedente, passando a coordinate omogenee, ha equazione: $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_3^2 = 0$. Per calcolare la polare di B(1, 2, 1) si può usare la (6''):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_B = (6x_1 - 4x_2 + 8x_3)_B = 6; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_B = (-4x_1)_B = -4; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_B = (8x_1 + 10x_3)_B = 18$$

e si ottiene $6x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 0$ cioè $3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 0$.

Per costruire graficamente la polare di una conica C noto il polo e viceversa si usa il:

TEOREMA DI RECIPROCITÀ 9.5.1 - *Se $P_1(x_1, y_1)$ appartiene alla polare di $P_0(x_0, y_0)$, la polare di $P_1(x_1, y_1)$ passa per $P_0(x_0, y_0)$.*

Dimostrazione. Se $P_1(x_1, y_1)$ appartiene alla polare di P_0 le sue coordinate ne soddisfano l'equazione cioè:

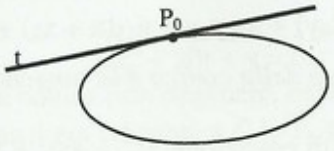
$$a_{11}x_0x_1 + a_{12}(y_0x_1 + x_0y_1) + a_{22}y_0y_1 + a_{13}(x_1 + x_0) + a_2(y_1 + y_0) + a_{33} = 0$$

e tale espressione dice anche che le coordinate(x_0, y_0) di P_0 soddisfano l'equazione della polare di P_1.

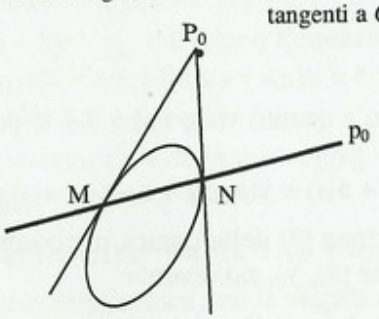
Applicando il teorema di reciprocità vediamo separatamente come si possa costruire geometricamente la polare di un punto sulla conica, interno od esterno ad essa, e viceversa come si trovi il polo di una retta tangente, esterna o secante la conica.

Dati la conica C ed il polo P_0:

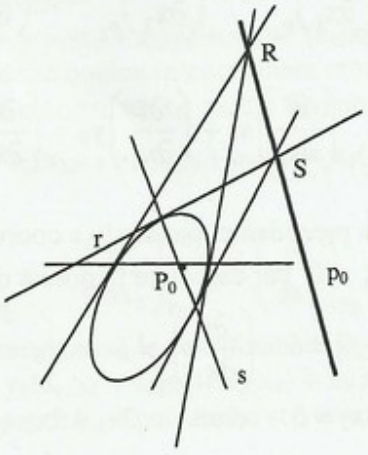
Se P_0 appartiene alla conica la polare è la tangente.



Se P_0 è esterno alla conica, si conducono da P_0 le due tangenti a C; la polare p_0 di P_0 è la retta MN congiungente i due punti di contatto.



Se P_0 è interno alla conica, si costruiscono due rette r ed s per P_0, se ne trovano i poli R ed S (v.sopra), la polare di P_0 è la retta RS.



Date la conica C e la polare p_0:

Se la retta è la tangente alla conica, il polo è il punto di tangenza.

Se p_0 incontra la conica in due punti distinti M ed N, il suo polo è il punto comune alle tangenti a C in M ed N.

Se p_0 non interseca la conica, si considerano due suoi punti R ed S, se ne costruiscono le polari r ed s (v. sopra). L'intersezione di r ed s è il polo P_0 cercato.

9.6 - Diametri.

DEFINIZIONE 9.6.1 - *Si dice **diametro la polare di un punto improprio.***
Il diametro relativo al punto $D_\infty(l, m, 0)$ si dice **diametro coniugato al punto D_∞** ed ha equazione

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{D_\infty} x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{D_\infty} x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{D_\infty} x_3 = 0$$

o anche

(7) $$x_1(a_{11}l + a_{12}m) + x_2(a_{12}l + a_{22}m) + x_3(a_{13}l + a_{23}m) = 0.$$

Si può dimostrare che *il diametro coniugato ad un punto improprio, distinto da una direzione asintotica, è il **luogo dei punti medi** delle corde appartenenti al fascio di rette parallele individuato dal punto improprio.*



ESEMPIO9.6.1 - Data la conica $3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$ determinare il diametro coniugato alla direzione R(1, –1, 0).
Passando, come nell'esempio precedente, a coordinate omogenee si ottiene la retta:
$(6x_1 - 4x_2 + 8x_3)_R x_1 + (-4x_1)_R x_2 + (8x_1 + 10x_3)_R x_3 = 0 \qquad 10x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0$
ed in coordinate cartesiane: $5x - 2y + 4 = 0$.

9.7 - Coniche a centro.

L'equazione (7) del diametro si può anche scrivere:

(7') $$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)l + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)m = 0$$

che mette in evidenza che i diametri sono le rette del fascio individuato dalle rette:

$$d_1: \; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \quad \text{e} \quad d_2: \; a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0.$$

Le rette d_1 e d_2 sono i diametri coniugati rispettivamente alle direzioni $X_\infty(1, 0, 0)$ ed $Y_\infty(0, 1, 0)$, cioè ai punti impropri degli assi del riferimento.
Tale fascio è proprio se e solo se $A_{33} \neq 0$. In tal caso il centro C del fascio è il punto di intersezione di d_1 e d_2 e si ottiene risolvendo il sistema:

(8) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni sono: $\frac{x_1}{x_3} = \frac{A_{13}}{A_{33}} = x_C$, $\frac{x_2}{x_3} = \frac{A_{23}}{A_{33}} = y_C$, dove A_{13} ed A_{23} sono i cofattori di a_{13} ed a_{23} nella matrice della conica. Per la proprietà dei diametri enunciata sopra, il punto $C(x_C, y_C)$ è **centro di simmetria della conica**.
Poiché esiste il centro della conica se e solo se $A_{33} \neq 0$, *l'ellisse e l'iperbole sono **coniche a centro**.*

PROPRIETÀ 9.7.1 - *Il **centro** della conica è **il polo della retta impropria**.*

Dimostrazione - Per costruzione il centro della conica appartiene alle polari dei punti X_∞ ed Y_∞ della retta impropria, per il teorema di reciprocità esso è quindi il polo della retta impropria.

Le coordinate del centro della conica sono quindi le soluzioni del sistema (analogo al sistema (8) in coordinate non omogenee):

$$(8') \qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \quad \text{od anche} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

ESEMPIO 9.7.1 - Per determinare il centro della conica $3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$ si deve risolvere il sistema: $\begin{cases} 6x - 4y + 8 = 0 \\ -4x = 0 \end{cases}$ quindi C(0, 2).

In una conica a centro se d è il diametro coniugato alla direzione del diametro d', per il teorema di reciprocità, d' è il diametro coniugato alla direzione del diametro d: i diametri d e d' si dicono **diametri coniugati.**

Abbiamo visto (per la (7)) che il diametro d' coniugato alla direzione $D_\infty = (l, m, 0)$ del diametro d è la retta di equazione:

$$x_1(a_{11}l + a_{12}m) + x_2(a_{12}l + a_{22}m) + x_3(a_{13}l + a_{23}m) = 0$$

che ha come punto improprio $(a_{12}l + a_{22}m, -(a_{11}l + a_{12}m), 0)$; quindi d e d' risultano ortogonali se:

$$l(a_{12}l + a_{22}m) - m(a_{11}l + a_{12}m) = 0$$

$$(9) \qquad \mathbf{a_{12}l^2 - (a_{11} - a_{22})lm - a_{12}m^2 = 0.}$$

Questa relazione individua le direzioni di una coppia di diametri coniugati ed ortogonali, nella ipotesi che la conica non sia una circonferenza.

DEFINIZIONE 9.7.2 - *Si dicono **assi di simmetria ortogonale** di una conica a centro, i due diametri coniugati ed ortogonali.*

Gli assi di simmetria di una conica a centro sono quindi le rette per il centro $C(x_C, y_C)$ aventi le direzioni coniugate ed ortogonali individuate dalla relazione (9).
L'equazione complessiva degli assi è quindi

$$(10) \qquad \mathbf{a_{12}(x - x_C)^2 - (a_{11} - a_{22})(x - x_C)(y - y_C) - a_{12}(y - y_C)^2 = 0.}$$

ESEMPIO 9.7.2 - Determinare gli assi della conica $3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$.
Abbiamo visto nell'Esempio 9.7.1 che la conica data ha centro C(0, 2). Le direzioni degli assi, cioè della coppia di diametri coniugati ed ortogonali si ottengono risolvendo l'equazione (9):

$$2l^2 + 3lm - 2m^2 = 0 \quad \text{ovvero} \quad 2\left(\frac{m}{l}\right)^2 - 3\left(\frac{m}{l}\right) - 2 = 0 \quad \text{da cui} \quad \frac{m}{l} = \frac{3 \pm 5}{4}.$$

Le equazioni degli assi si ottengono quindi scrivendo le rette per C aventi le direzioni ottenute:

- se $\dfrac{m}{l} = 2$, scegliendo $m = 2$ ed $l = 1$ si ottiene la retta $x = \dfrac{y - 2}{2}$ cioè: $2x - y + 2 = 0$;

- se $\frac{m}{l} = -\frac{1}{2}$, scegliendo m = –1 ed l = 2 si ottiene la retta $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1}$ cioè x + 2y – 4 = 0.

Applicando invece direttamente la formula (10) l'equazione complessiva degli assi risulta: $-2x^2 - 3x(y-2) + 2(y-2)^2 = 0$. Per ottenere le equazioni dei due assi risolviamo l'equazione di secondo grado ottenuta dividendo l'equazione precedente per $(y-2)^2$; si ha $2\left(\frac{x}{y-2}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y-2}\right) - 2 = 0$ che ha soluzioni $\frac{1}{2}$ e -2.

Si ottengono le rette 2x – y + 2 = 0 e x + 2y – 4 = 0.

OSSERVAZIONE 1 - Il centro di una conica risulta essere **centro di simmetria**, infatti si verifica che *il centro della conica è punto medio delle corde passanti per esso.*

Gli assi della conica sono **assi di simmetria ortogonale** della conica: e si è già detto che *un asse è il luogo dei punti medi delle corde aventi direzione ortogonale all'asse.*

Se *C* è un'iperbole, abbiamo definito direzioni asintotiche i suoi punti impropri (v. Esempio 9.1.5).

DEFINIZIONE 9.7.3 - *Si dicono **asintoti** di un'iperbole le rette per il suo centro aventi le direzioni asintotiche.*

Ricordiamo che le direzioni asintotiche sono le intersezioni dell'iperbole con la retta impropria, quindi sono le soluzioni dell'equazione $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ che si ottiene eguagliando a zero il complesso dei termini di secondo grado dell'equazione (2) della conica.

Quindi $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ è l'equazione complessiva delle rette che dall'origine del riferimento proiettano le direzioni asintotiche.

Per scrivere le equazioni degli asintoti se ne devono quindi calcolare le direzioni risolvendo l'equazione:

(11) $$\mathbf{a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0.}$$

Indicando con $C(x_C, y_C)$ il centro l'equazione complessiva degli asintoti risulta:

(12) $$\mathbf{a_{11}(x - x_C)^2 + 2a_{12}(x - x_C)(y - y_C) + a_{22}(y - y_C)^2 = 0.}$$

L'iperbole si dice **equilatera** se gli asintoti sono ortogonali e si verifica che ciò accade quando $\mathbf{a_{11} + a_{22} = 0}$.

ESEMPIO 9.7.3 - Abbiamo visto negli Esempi 9.3.4 e 9.7.1 che la conica *C* di equazione: $3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$ è un'iperbole di centro C(0, 2). Intersecando *C* con la retta impropria si trovano le direzioni asintotiche (0, 1, 0) e (4, 3, 0).

Gli asintoti di *C* sono quindi le rette:

- r_1 passante per C ed avente direzione (0, 1, 0) di equazione: x = 0;
- r_2 passante per C ed avente direzione (4, 3, 0) di equazione: 3x – 4y + 8 = 0.

Volendo invece applicare la formula (11) dell'equazione complessiva degli asintoti, questa risulta, nel nostro caso, $3x^2 - 4x(y-2) = 0$, da cui si ricavano le equazioni degli asintoti 3x – 4y + 8 = 0 ed x = 0.

OSSERVAZIONE 2 - I fuochi di una conica sono le intersezioni delle tangenti alla conica uscenti dai punti ciclici. Ogni conica a centro ha due fuochi reali appartenenti all'asse maggiore se si tratta di un'ellisse, all'asse trasverso se si tratta di un'iperbole.

Direttrice è la polare di un fuoco.

Data una conica a centro C, se si assume come riferimento quello avente come origine il centro della conica e come assi coordinati gli assi della conica, detto **riferimento canonico** la sua equazione assume la forma particolarmente semplice detta **equazione canonica della conica**:

(13) $$\mathbf{LX^2 + MY^2 + N = 0.}$$

Per ottenere la forma canonica dell'equazione di una conica a centro data in un riferimento qualunque, anziché effettuare il cambiamento di riferimento, si usano i numeri: A discriminante della conica, il suo minore A_{33} e $T = a_{11} + a_{22}$ che sono detti **invarianti metrici** in quanto si può dimostrare che sono indipendenti dal riferimento scelto.
Calcoliamo il valore dei tre invarianti per la conica di equazione (13) dove L, M, N sono le incognite:

$$A = \begin{vmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & N \end{vmatrix} = LMN; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} L & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix} = LM; \qquad T = L + M.$$

Per determinare L, M, N è quindi sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{LMN = A} \\ \mathbf{LM = A_{33}} \\ \mathbf{L + M = T} \end{cases}$$

con gli invarianti A, A_{33}, T noti, in quanto calcolati per l'equazione data nel riferimento iniziale.

Si ricava $N = \dfrac{A}{A_{33}}$ (si noti che per ipotesi la conica è a centro e quindi $A_{33} \neq 0$).

L ed M sono le soluzioni di un sistema simmetrico, quindi sono le soluzioni dell'equazione ausiliaria $Z^2 - TZ + A_{33} = 0$.

ESEMPIO 9.7.4 - Determinare l'equazione canonica dell'ellisse $2x^2 + y^2 - 3x + y - 5 = 0$ dell'Esempio 9.2.3.

Abbiamo già calcolato $A = -\dfrac{51}{4}$, $A_{33} = 2$, $T = 2 + 1 = 3$. I coefficienti L, M, N della forma canonica sono quindi le soluzioni del sistema: $\begin{cases} LMN = -51/4 \\ LM = 2 \\ L + M = 3 \end{cases}$. Si ricava $N = -\dfrac{51}{8}$.

L'equazione $Z^2 - 3Z + 2 = 0$ ha soluzioni $Z_1 = 2$, $Z_2 = 1$ (entrambe positive essendo C una ellisse) e l'equazione canonica cercata è: $X^2 + 2Y^2 - \dfrac{51}{8} = 0$ oppure $2X^2 + Y^2 - \dfrac{51}{8} = 0$ a seconda di quale asse della conica si scelga come asse X od Y.

ESEMPIO 9.7.5 - Determinare l'equazione canonica dell'iperbole $2x^2 + xy - y^2 + x + y - 3 = 0$ dell'Esempio 9.2.4.

Abbiamo già calcolato $A = \dfrac{27}{4}$, $A_{33} = -\dfrac{9}{4}$, $T = 2 - 1 = 1$. I coefficienti L, M, N della forma canonica sono quindi le soluzioni del sistema $\begin{cases} LMN = 27/4 \\ LM = -9/4 \\ L + M = 1 \end{cases}$. Si ricava $N = -3$.

L'equazione $Z^2 - Z - \frac{9}{4} = 0$ ha soluzioni $Z_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{2}$, $Z_2 = \frac{1-\sqrt{10}}{2}$ (discordi, essendo C una iperbole) e l'equazione canonica cercata è:
$\frac{1+\sqrt{10}}{2}X^2 + \frac{1-\sqrt{10}}{2}Y^2 - 3 = 0$ oppure $\frac{1-\sqrt{10}}{2}X^2 + \frac{1+\sqrt{10}}{2}Y^2 - 3 = 0$ a seconda di quale asse della conica si scelga come asse X od Y.

9.8 - Parabola.

Riprendendo l'equazione del fascio dei diametri:

(7') $$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)l + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)m = 0$$

si ha che tale fascio è improprio se $A_{33} = 0$, cioè se la conica è una parabola.
Ricordando (v. Osservazione 2 § 9.2) che una conica di tipo parabolico si può scrivere nella forma:

$$(ax_1 + bx_2)^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

la (7') diventa

(7'') $$(a^2x_1 + abx_2 + a_{13}x_3)l + (abx_1 + b^2x_2 + a_{23}x_3)m = 0$$

ovvero

$$ax_1(al + bm) + bx_2(al + bm) + x_3(a_{13}l + a_{23}m) = 0.$$

Quindi, qualunque siano l ed m, la retta del fascio ha direzione costante $(-b, a, 0)$, che sono le coordinate omogenee del punto improprio della parabola.
Poiché il diametro coniugato ad una direzione è asse di simmetria rispetto a questa direzione, il diametro coniugato alla direzione $(a, b, 0)$ ortogonale alla direzione dei diametri è *l'unico diametro di simmetria ortogonale* e si dice **asse della parabola.**
In altre parole si può dire che l'**asse della parabola** *è la polare del punto improprio perpendicolare al punto all'infinito della parabola.*
L'asse della parabola è quindi la polare di $A_\infty(a, b, 0)$ ed ha come equazione, dalla (7'')

(14) $$\mathbf{(a^2x_1 + abx_2 + a_{13}x_3)a + (abx_1 + b^2x_2 + a_{23}x_3)b = 0}$$

o, passando a coordinate non omogenee e facendo uso delle derivate parziali:

(14') $$\mathbf{a\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0}.$$

L'asse della parabola interseca la parabola in un solo punto al finito detto **vertice,** le cui coordinate si trovano risolvendo il sistema formato dalle equazioni di asse e parabola.

ESEMPIO 9.8.1 - Data la parabola: $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ determinarne asse e vertice.
L'equazione della parabola si può scrivere: $(x - y)^2 + 2x + 2y - 4 = 0$, quindi $A_\infty(1, -1, 0)$.
Calcoliamo $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (2x - 2y + 2)$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-2x + 2y + 2)$. Applicando la (14'), l'equazione dell'asse risulta: $(2x - 2y + 2) - (-2x + 2y + 2) = 0$ ossia $x - y = 0$.
Il vertice ha come coordinate le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$
quindi risulta $V(1, 1)$.

Scegliendo un riferimento avente l'asse X coincidente con l'asse della parabola e l'origine nel vertice della parabola, detto **riferimento canonico**, l'equazione della parabola assume la forma particolarmente semplice:

(15) $$\mathbf{PY^2 + QX = 0}$$

detta **equazione canonica della parabola.**

Per ottenere la forma canonica dell'equazione di una parabola data in un riferimento qualunque, anziché effettuare il cambiamento di riferimento, si possono usare gli **invarianti metrici** cioè i numeri: A discriminante della conica e $T = a_{11} + a_{22}$ che sono indipendenti dal riferimento.

Calcoliamo gli invarianti per la conica di equazione (15):

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & Q/2 \\ 0 & P & 0 \\ Q/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{PQ^2}{4} \qquad A_{33} = 0 \qquad T = P.$$

Per determinare le incognite P e Q è quindi sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{PQ^2/4 = -A} \\ \mathbf{P = T} \end{cases}$$

con gli invarianti A e T noti, in quanto calcolati per l'equazione della parabola nel riferimento iniziale.

ESEMPIO 9.8.4 - Determinare l'equazione canonica della parabola $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0$ dell'Esempio 9.2.5.
Abbiamo già calcolato $A = -4$, $A_{33} = 0$, $T = 1 + 1 = 2$. I coefficienti P e Q della forma canonica sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} PQ^2/4 = 4 \\ P = 2 \end{cases}$ e quindi $Q^2 = \frac{16}{2} = 8 \qquad Q = \pm 2\sqrt{2}$.

L'equazione canonica cercata è: $2Y^2 + 2\sqrt{2}\,X = 0$ oppure $2Y^2 - 2\sqrt{2}\,X = 0$ a seconda di quale orientamento si scelga per l'asse della parabola.

OSSERVAZIONE - Come già detto i fuochi di una conica sono le intersezioni delle tangenti alla conica uscenti dai punti ciclici. La parabola ha un unico fuoco reale appartenente al suo asse e la direttrice è la polare del fuoco.

9.9 - Intersezione di due coniche.

Trovare i punti comuni a due date coniche *F* e *G* rispettivamente di equazioni:

(2) $$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

(2') $$g(x, y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0$$

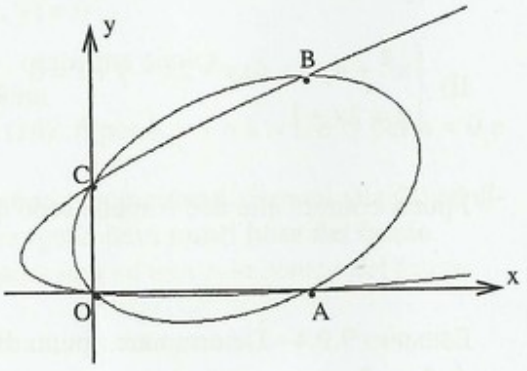
equivale a risolvere il sistema da esse formato che ammette "in generale" quattro soluzioni. Poiché le coniche sono date in forma non omogenea, si possono trovare, al finito, meno di quattro soluzioni (reali od immaginarie) se alcuni dei punti comuni sono all'infinito come nel caso di due iperboli aventi un asintoto comune o nel caso di due circonferenze che, oltre che in due punti di intersezione al finito (reali od immaginari), si intersecano nei punti ciclici della retta impropria (per cui passano tutte le circonferenze).

Il sistema ammette invece infinite soluzioni se le coniche coincidono o si spezzano in coniche degeneri aventi una retta in comune.
Riferendoci al caso generale, le coordinate dei punti di intersezione A, B, C, D si determinano risolvendo il sistema di quarto grado formato dalle due equazioni.

Si possono presentare diversi casi:
a) le intersezioni sono reali e distinte (Esempio 9.9.1);
b) le intersezioni sono reali ma due distinte e due coincidenti: le coniche si dicono **tangenti** (Esempio 9.9.2);
c) le intersezioni sono reali ma a due a due coincidenti: le coniche si dicono **bitangenti** (Esempio 9.9.3);
d) le intersezioni sono reali ma tre coincidono in uno stesso punto e la quarta è distinta da queste: le coniche si dicono **osculatrici** (Esempio 9.9.4);
e) le quattro intersezioni sono reali ma coincidono in un unico punto: le coniche si dicono **iperosculatrici** (Esempio 9.9.5);
f) le intersezioni sono due reali e due immaginarie (complesse coniugate): le coniche si intersecano in due soli punti reali (ad esempio due circonferenze secanti);
g) le quattro intersezioni sono immaginarie: le coniche non hanno punti reali comuni (ad esempio due circonferenze esterne fra loro).

ESEMPIO 9.9.1 - Determinare i punti di intersezione delle coniche:

$$\begin{cases} x^2+2y^2-xy-2x-2y=0 \\ x^2+16y^2-8xy-2x-16y=0 \end{cases}.$$



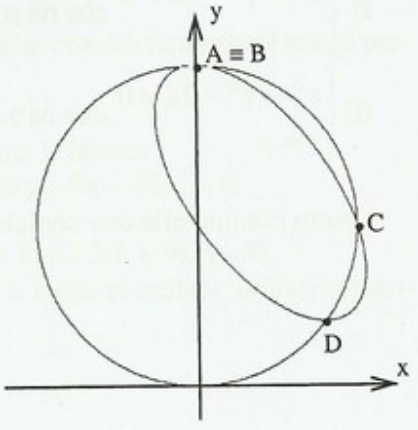
Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene: $\begin{cases} x^2+16y^2-8xy-2x-16y=0 \\ 7y(2y-x-2)=0 \end{cases}$ da cui:

I) $\begin{cases} x^2+16y^2-8xy-2x-16y=0 \\ y=0 \end{cases}$ che ha soluzioni $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$;

II) $\begin{cases} x^2+16y^2-8xy-2x-16y=0 \\ x=2y-2 \end{cases}$ che ha soluzioni $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$.

I punti comuni alle due coniche sono quindi: O(0, 0), A(2, 0), B(2, 2), C(0, 1).

ESEMPIO 9.9.2 - Determinare i punti di intersezione delle coniche: $\begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ 3x^2+3xy+2y^2-6x-6y+4=0 \end{cases}$.

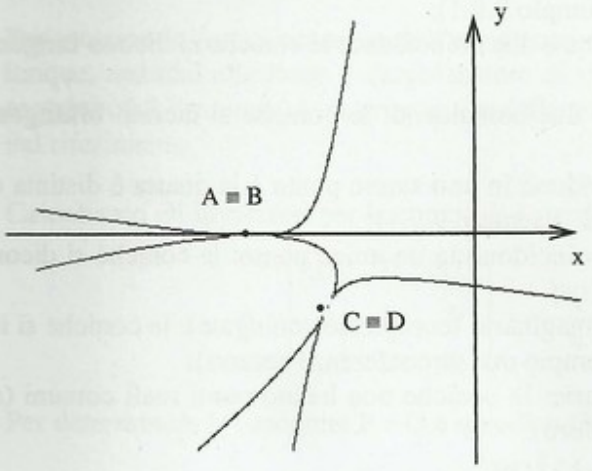


Eliminando y^2 si ottiene: $\begin{cases} y^2=2y-x^2 \\ x^2+3xy-6x-2y+4=0 \end{cases}$

da cui $y=\dfrac{x^2-6x+4}{2-3x}$; sostituendo infine nella prima equazione si ottiene: $5x^4-9x^3+4x^2=0$ che ha come

soluzioni: $x = 0$ (doppio), $x = 1$, $x = \frac{4}{5}$.

I punti comuni alle due coniche sono quindi: $A \equiv B(0, 2)$ doppio, $C(1, 1)$, $D\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$.



ESEMPIO 9.9.3 - Determinare i punti di intersezione delle coniche:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6xy + 2x + 4y + 1 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - y + 1 = 0 \\ 5y(y - 2x - 1) = 0 \end{cases}$$

da cui:

I) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ che ha la soluzione doppia $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$;

II) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - y + 1 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ che ha la soluzione doppia $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

I punti comuni alle due coniche sono quindi: $A \equiv B(-1, 0)$, $C \equiv D\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

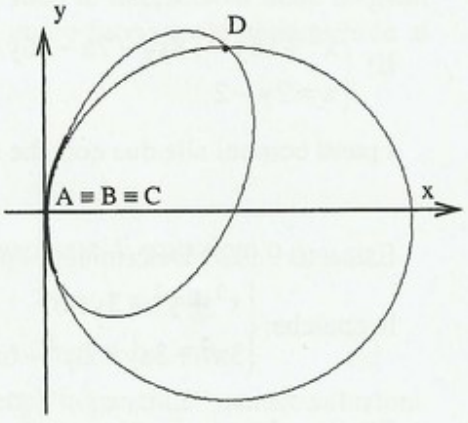
ESEMPIO 9.9.4 - Determinare i punti di intersezione delle coniche:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 2x^2 + y^2 - xy - 2x = 0 \end{cases}.$$

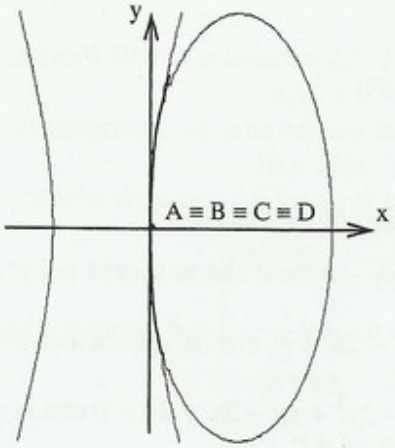
Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x(x - y) = 0 \end{cases}$ da cui:

I) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ che ha soluzione doppia $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$;

II) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x = y \end{cases}$ che ha soluzioni $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.



I punti comuni alle due coniche sono quindi: $A \equiv B \equiv C(0, 0)$, $D(1, 1)$.



ESEMPIO 9.9.5 - Determinare i punti di intersezione delle coniche: $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ -8x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases}$.

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene: $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ 12x^2 = 0 \end{cases}$ che ha soluzione quadrupla $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Le quattro intersezioni sono quindi coincidenti: $A \equiv B \equiv C \equiv D(0, 0)$.

9.10 - Fasci di coniche.

Considerando una combinazione lineare delle equazioni (2) e (2') di parametri h e k non entrambi nulli:

(16) $$h\,f(x, y) + k\,g(x, y) = 0$$

si ha ancora un'equazione di secondo grado in x, y, ossia una conica.
Al variare di h e k in **R** si ottiene un **fascio di coniche**.
Al fascio appartengono *F* e *G* che si ottengono in (16): *F* per h = 1 e k = 0 e *G* per h = 0 e k = 1.
I quattro punti A, B, C, D, reali od immaginari, distinti o coincidenti, comuni alla (2) ed alla (2') sono comuni a tutte le coniche del fascio e vengono detti **punti base del fascio**.
Per ogni punto del piano distinto dai punti base passa una ed una sola conica del fascio.

Il discriminante della generica conica (16) del fascio è:

$$A(h, k) = \begin{vmatrix} ha_{11} + kb_{11} & ha_{12} + kb_{12} & ha_{13} + kb_{13} \\ ha_{12} + kb_{12} & ha_{22} + kb_{22} & ha_{23} + kb_{23} \\ ha_{13} + kb_{13} & ha_{23} + kb_{23} & ha_{33} + kb_{33} \end{vmatrix}.$$

A(h, k) = 0 è un'equazione omogenea di terzo grado in h, k; ammette tre soluzioni (contate con la dovuta molteplicità) di cui almeno una reale e quindi *in un fascio di coniche esistono tre coniche degeneri delle quali una è certamente reale.*

Esaminiamo i fasci che si ottengono con le coppie di coniche considerate negli esempi precedenti.

ESEMPIO 9.10.1 - Le coniche dell'Esempio 9.9.1 individuano il fascio:
$$h(x^2 + 2y^2 - xy - 2x - 2y) + k(x^2 + 16y^2 - 8xy - 2x - 16y) = 0$$
la cui generica conica ha equazione:
$$(h + k)x^2 + (2h + 16k)y^2 + (-h - 8k)xy - 2(h + k)x - 2(h + 8k)y = 0.$$
Le coniche degeneri del fascio si trovano per i valori di h e k che annullano il discriminan-

te della conica: $A = \begin{vmatrix} h+k & -\frac{h}{2}-4k & -h-k \\ -\frac{h}{2}-4k & 2h+16k & -h-8k \\ -h-k & -h-8k & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Sviluppando il determinante si ottiene: $-(h + k)(h + 8k)(4h + 18k) = 0$.

- Se $h + k = 0$ si ottiene la conica degenere $2y^2 - xy - 2y = 0$ che si spezza nel prodotto $y(2y - x - 2) = 0$ delle rette OA e BC;
- se $h + 8k = 0$ si ottiene la conica degenere $x^2 - 2x = 0$ che si spezza nel prodotto $x(x - 2) = 0$ delle rette OC ed AB;
- se $4h + 18k = 0$ si ottiene la conica degenere $x^2 - 2y^2 + xy - 2x + 2y = 0$ che si spezza nel prodotto $(x - y)(x + 2y - 2) = 0$ delle rette OB ed AC.

ESEMPIO 9.10.2 - Le coniche dell'Esempio 9.9.2 individuano il fascio:

$$h(x^2 + y^2 - 2y) + k(3x^2 + 2y^2 + 3xy - 6x - 6y + 4) = 0$$

la cui generica conica ha equazione:

$$(h + 3k)x^2 + (h + 2k)y^2 + 3kxy - 6kx - 2(h + 3k)y + 4k = 0.$$

Le coniche degeneri del fascio si trovano per i valori di h e k che annullano il discriminante della conica: $A = \begin{vmatrix} h+3k & \frac{3}{2}k & -3k \\ \frac{3}{2}k & h+2k & -(h+3k) \\ -3k & -(h+3k) & 4k \end{vmatrix} = 0.$

Sviluppando il determinante si ottiene: $-(h + 3k)(h + k)^2 = 0$.

- Se $h + 3k = 0$ si ottiene la conica degenere $y^2 - 3xy + 6x - 4 = 0$ che si spezza nel prodotto $(y - 2)(3x - y - 2) = 0$ della retta tangente alle coniche in A e della retta CD;
- se $h + k = 0$ (sol. doppia) si ottiene la conica degenere $2x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ che si spezza nel prodotto $(x + y - 2)(2x + y - 2) = 0$ delle rette AC ed AD.

ESEMPIO 9.10.3 - Le coniche dell'Esempio 9.9.3 individuano il fascio:

$$h(x^2 - y^2 + 6xy + 2x + 4y + 1) + k(x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - y + 1) = 0$$

la cui generica conica ha equazione:

$$(h + k)x^2 + (-h + 4k)y^2 + 2(3h - 2k)xy + 2(h + k)x + (4h - k)y + (h + k) = 0.$$

Le coniche degeneri del fascio si trovano per i valori di h e k che annullano il discriminante della conica: $A = \begin{vmatrix} h+k & 3h-2k & h+k \\ 3h-2k & -h+4k & 2h-\frac{1}{2}k \\ h+k & 2h-\frac{1}{2}k & h+k \end{vmatrix} = 0.$

Sviluppando il determinante si ottiene: $-(h + k)(h - \frac{3}{2}k)^2 = 0$.

- Se $h + k = 0$ si ottiene la conica degenere $y^2 - 2xy - y = 0$ che si spezza nel prodotto $y(2x - y + 1) = 0$ delle rette tangenti alle coniche rispettivamente in A ed in C;
- se $h - \frac{3}{2}k = 0$ (soluzione doppia) si ottiene la conica $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

che si spezza nel prodotto $(x + y + 1)^2 = 0$ della retta AC contata due volte.

ESEMPIO 9.10.4 - Le coniche dell'Esempio 9.9.4 individuano il fascio:

$$h(x^2 + y^2 - 2x) + k(2x^2 + y^2 - xy - 2x) = 0$$

la cui generica conica ha equazione:

$$(h + 2k)x^2 + (h + k)y^2 - kxy - 2(h + k)x = 0.$$

Le coniche degeneri del fascio si trovano per i valori di h e k che annullano il discriminante della conica: $A = \begin{vmatrix} h+2k & -\frac{1}{2}k & -(h+k) \\ -\frac{1}{2}k & h+k & 0 \\ -(h+k) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Sviluppando il determinante si ottiene: $-(h + k)^3 = 0$ che ha soluzione tripla $h + k = 0$.
Si ottiene un'unica conica degenere $x^2 - xy = 0$ che si spezza nel prodotto $x(x - y) = 0$ della retta tangente alle coniche in A e della retta AD.

ESEMPIO 9.10.5 - Le coniche dell'Esempio 9.9.5 individuano il fascio:

$$h(4x^2 + y^2 - 4x) + k(-8x^2 + y^2 - 4x) = 0$$

la cui generica conica ha equazione:

$$(4h - 8k)x^2 + (h + k)y^2 - 4(h + k)x = 0.$$

Le coniche degeneri del fascio si trovano per i valori di h e k che annullano il discriminante della conica: $A = \begin{vmatrix} 4h-8k & 0 & -2(h+k) \\ 0 & h+k & 0 \\ -2(h+k) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

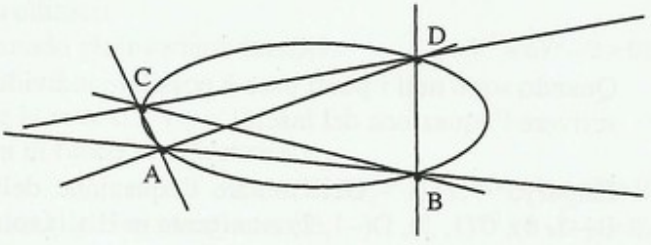
Sviluppando il determinante si ottiene: $-4(h + k)^3 = 0$ che ha soluzione tripla $h + k = 0$.
Si ottiene un'unica conica degenere $x^2 = 0$ che si spezza nel prodotto $x(x) = 0$ della retta tangente alle coniche in A contata due volte.

9.11 - Punti base e coniche degeneri del fascio.

Come abbiamo visto negli esempi precedenti i punti base permettono di individuare le coniche degeneri del fascio, tenendo presente che la retta congiungente due punti coincidenti di una conica è la retta tangente alla conica nel punto.
Per semplicità consideriamo solo il caso in cui tutti i quattro punti base sono reali, riprendendo, nell'ordine, i casi esaminati prima:

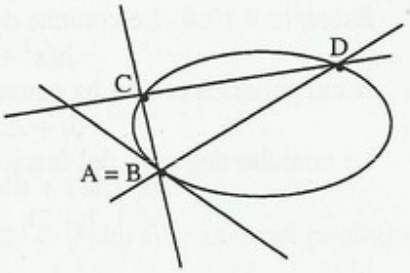
a) i quattro punti A, B, C, D, sono reali e distinti: il fascio contiene tre coniche degeneri:

C_1 formata dalle rette AB, CD;
C_2 formata dalle rette AC, BD;
C_3 formata dalle rette AD, BC;



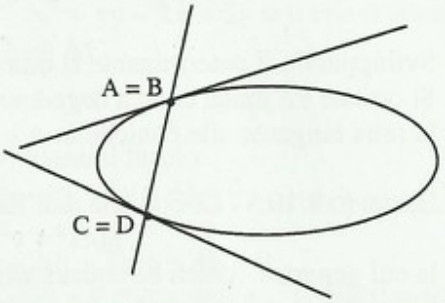
b) i punti A e B coincidono, C e D sono distinti tra loro e da A: il fascio è costituito da coniche tangenti in A e contiene le coniche degeneri:

C_1 formata dalle rette AC, AD;
$C_2 = C_3$ formata dalla retta CD e dalla tangente in A;



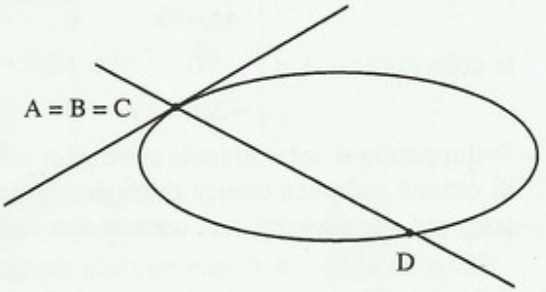
c) i punti A e B coincidono ed anche C e D coincidono fra loro, ma A ≠ C: il fascio è costituito da coniche bitangenti in A ed in C e contiene le coniche degeneri:

C_1 formata dalle due rette tangenti in A e in C;
$C_2 = C_3$ formata dalla retta AC contata due volte;



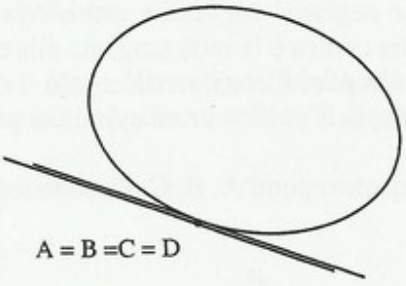
d) i punti A, B, C coincidono e D è distinto da essi: il fascio è costituito da coniche osculatrici in A e contiene le coniche degeneri:

$C_1 = C_2 = C_3$ formata dalla retta tangente in A e dalla retta AD;



e) i punti A, B, C, D coincidono: il fascio è costituito da coniche iperosculatrici in A e contiene le coniche degeneri:

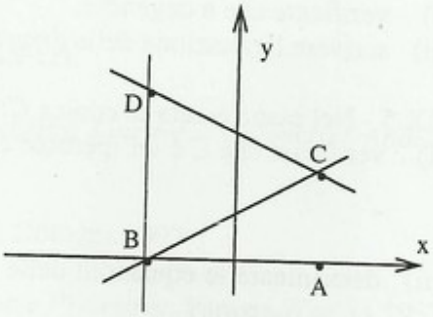
$C_1 = C_2 = C_3$ formata dalla retta tangente in A contata due volte;



Quando sono noti i punti base è possibile individuare le coniche degeneri ed utilizzarle per scrivere l'equazione del fascio.

ESEMPIO -9.11.1 - Determinare l'equazione della conica passante per i punti: A(1, 0), B(–1, 0), C(1, 1), D(–1, 2) e tangente in B alla retta t: $y = x + 1$.

I° modo
Determiniamo l'equazione del fascio di coniche tangenti in B a t e passanti per C e D (caso b).
Le coniche degeneri del fascio sono:
C_1 formata dalle rette BC e BD che ha equazione $(x - 2y + 1)(x + 1) = 0$;
C_2 formata dalla tangente e dalla retta CD che ha equazione $(x - y + 1)(x + 2y - 3) = 0$.



Il fascio ha equazione: $h((x - 2y + 1)(x + 1) + k(x - y + 1)(x + 2y - 3) = 0$.
Tra le coniche del fascio cerchiamo quella che passa per A sostituendo x con 1 ed y con 0: $4h - 4k = 0$, $h = k = 1$ e l'equazione della conica diventa: $2x^2 - 2y^2 - xy + 3y - 2 = 0$.
Ovviamente si può costruire il fascio di coniche tangenti in B e per A e C (o per A e D) ed imporre poi il passaggio per il rimanente punto.

II° modo
Determiniamo l'equazione del fascio di coniche tangenti passanti per A, B, C, D (caso a).
Tra le coniche degeneri del fascio consideriamo ad esempio C_3 formata dalle rette AB e CD: $y(x + 2y - 3) = 0$ e C_4 formata dalle rette AC e BD: $(x - 1)(x + 1) = 0$.
Il fascio ha equazione: $h\,y(x + 2y - 3) + k(x - 1)(x + 1) = 0$.
Cerchiamo poi la conica del fascio avente t come tangente

$$\begin{cases} h\,y(x+2y-3)+k(x-1)(x+1)=0 \\ y=x+1 \end{cases}.$$

Sostituendo si ottiene l'equazione risolvente: $(3h + k)x^2 - 2hx - h - k = 0$.
Affinché la retta sia tangente le soluzioni devono coincidere, cioè:
$\frac{\Delta}{4} = h^2 + (3h + k)(h + k) = 0$ da cui $(2h + k)^2 = 0$ ovvero $h = -1$ e $k = 2$ e si ritrova la conica: $2x^2 - 2y^2 - xy + 3y - 2 = 0$.

9.12 - Esercizi proposti.

IX.1 - Date le coniche:
i) $2x^2 + xy - y^2 + x + 4y - 3 = 0$;
ii) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x + 2y = 0$;
iii) $xy - 2x - 4y = 0$;
iv) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 14x + 2y - 1 = 0$;
dire se sono degeneri oppure no, determinarne il tipo e scriverle in forma canonica.

IX.2 - Data la conica $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x + 1 = 0$:
verificare che è non degenere e di tipo ellittico;
i) scriverla in forma canonica utilizzando gli invarianti metrici. $(X^2 + 6Y^2 - 2 = 0)$

IX.3 - Dati nel piano il punto A(3, 1) e la retta r: $x + y = 0$:
i) scrivere l'equazione della parabola di fuoco A e direttrice r;
$(x^2 + y^2 - 2xy - 12x - 4y + 20 = 0)$
ii) scriverla in forma canonica utilizzando gli invarianti metrici. $(2Y^2 \pm 8\sqrt{2}\,X = 0)$

IX.4 - Nel piano è data la conica $2x^2 + y^2 + 3xy - 10x - 7y + 12 = 0$:

i) verificare che è degenere;
ii) scrivere l'equazione delle due rette in cui si spezza. $(2x + y - 4 = 0,\ x + y - 3 = 0)$

IX.5 - Nel piano è data la conica C: $x^2 - xy - 2y^2 - x + 5y = 0$:
i) verificare che C è un'iperbole e scriverla in forma canonica;

$$\left(\frac{-1+\sqrt{10}}{2}X^2 + \frac{-1-\sqrt{10}}{2}Y^2 + 2 = 0\right)$$

ii) determinare le equazioni delle parabole tangenti a C nell'origine e passanti per i punti A(–1, 0), B(0, 1). $((3 \pm \sqrt{5})(x^2 - 6xy + 5y^2 + x - 5y) + 8xy = 0)$

IX.6 - Dato il fascio di coniche $h(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y) + k(x^2 - 4x + 4) = 0$ con h e k parametri reali, dire per quali valori di h e k la conica è:
- degenere; $(h = 0 \text{ ed } h/k = 35/3)$
- parabola; $(h = 0 \text{ ed } h/k = -3/8)$
- ellisse; $(8h^2 + 3hk > 0)$
- iperbole. $(8h^2 + 3hk < 0)$

IX.7 - Determinare l'equazione del fascio di coniche per i punti comuni alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 ed agli assi coordinati. $(h(x^2 + y^2 - 1) + k\,xy = 0)$
Di tale fascio determinare le coniche degeneri e le parabole.
$((x + y - 1)(x + y + 1) = 0),\ ((x - y + 1)(x - y - 1) = 0)$ e sono parabole)
Determinare la conica del fascio passante per il punto A(1 ,1) precisandone il tipo e la forma canonica. $(x^2 + y^2 - xy - 1 = 0,$ ellisse; forma canonica $3X^2 + Y^2 - 2 = 0)$

IX.8 - Scrivere l'equazione del fascio di coniche tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$ in P(1, 1) ed a $x^2 + y^2 + 2x = 0$ in Q (–1, –1), determinandone coniche degeneri e parabole.
$(h(y^2 - 1) + k(x - y)^2 = 0,$ coniche degeneri per $h = 0$ e $k = 0$ e sono le parabole)
Studiare la conica del fascio passante per R(1/2, 5/4) determinandone la forma canonica.

$$(x^2 - 2xy + 1 = 0, \text{ iperbole; forma canonica } \frac{\sqrt{5}-1}{2}X^2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}Y^2 - 1 = 0)$$

IX.9 - Nel fascio di coniche tangenti nell'origine alla retta $x - y = 0$ ed in P(1, 0) alla retta $x - y - 1 = 0$ trovare quella che passa per il vertice della parabola $x^2 = y - 1$.
Studiare tale conica e scriverne l'equazione in forma canonica.

$$(x^2 - 2xy - y^2 - x + y = 0, \text{ iperbole equilatera; centro } C\left(\frac{1}{2}, 0\right); \text{ assi } x - \frac{1}{2} = \left(-1 \pm \sqrt{2}\right)y;$$

$$\text{asintoti } x - \frac{1}{2} = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)y; \text{ forma canonica } \sqrt{2}\,X^2 - \sqrt{2}\,Y^2 - \frac{1}{4} = 0)$$

BIBLIOGRAFIA

E. Abbena, E. Bargero, S. Garbiero: *Esercizi di Algebra Lineare e Geometria Analitica*, Levrotto e Bella, Torino 1990

S. Abeasis: *Algebra lineare e Geometria*, Zanichelli, Bologna 1993

G. Fano, A. Terracini: *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*, Paravia, Torino 1957

F. Fava, F. Tricerri: *Geometria e Algebra Lineare*, Levrotto e Bella, Torino 1991

S. Greco, P. Valabrega: *Lezioni di algebra lineare e geometria*, voll. I e II, Levrotto e Bella, Torino 1999

C .Longo: *Lezioni di Geometria*, Libr. Er. V. Veschi, Roma 1969

A. Sanini: *Lezioni di Geometria per allievi ingegneri*, Levrotto e Bella, Torino 1994
A. Sanini: *Esercizi di Geometria*, Levrotto e Bella, Torino 1994

E. Sernesi: *Geometria I*, Bollati Boringhieri, Torino 1989

M. Stoka: *Corso di Geometria*, IIª ed., Cedam, Padova 1995
M. Stoka, V. Pipitone: *Esercizi e problemi di Geometria*, Cedam, Padova 1999

Geometria 1

Il tutoraggio inizia la prossima settimana (prof. GIANECCA)

Lezioni: LUNEDÌ 11-13 MERCOLEDÌ 11-13 GIOVEDÌ 11-12

dott. FAVRO

SPAZI VETTORIALI

$\mathbb{R}, +$ ↳ operazione binaria di somma

funzione che associa a due elementi di $\mathbb{R}$ un solo elemento di $\mathbb{R}$

$\forall x, \forall y, \forall z \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ proprietà associativa

$\forall x, \forall y \quad x+y = y+x$ proprietà commutativa

$\exists\, 0, \forall x \quad x+0 = 0+x = x \quad 0=0$ elemento neutro

$\forall x \quad \exists x' \quad x+x' = x'+x = 0$

$\{\mathbb{R}, +\}$ gruppo abeliano additivo o modulo

$\{\mathbb{R}, \cdot\}$ non esiste l'inverso di 0

~~$\{\mathbb{R}-\{0\}\}$ gruppo abelia~~ $\{\mathbb{R}-\{0\}, \cdot\}$ gruppo abeliano

$\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ campo dei numeri reali

SPAZIO VETTORIALE SU $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$

$\{V, +\}$ modulo

moltiplicazione per scalari

$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$(\lambda, \bar{v}) \longrightarrow \lambda\bar{v}$

$\lambda(\bar{u}+\bar{v}) = \lambda\bar{u} + \lambda\bar{v}$

$(\lambda+\mu)\bar{u} = \lambda\bar{u} + \mu\bar{u}$

$(\lambda\mu)\bar{u} = \lambda(\mu\bar{u})$

$1_R \bar{u} = \bar{u}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$n\bar{u} = \underbrace{(1+\dots+1)}_{n \text{ volte}}\bar{u} = \underbrace{1\bar{u}+\dots+1\bar{u}}_{n \text{ volte}} = \underbrace{\bar{u}+\dots+\bar{u}}_{n \text{ volte}}$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) / a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) / a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$\{\mathbb{R}^2, +\}$ modulo

$\forall a_i \quad \forall b_i \quad \forall c_i$

tesi $\longrightarrow$ $[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] + (c_1, c_2) = (a_1, a_2) + [(b_1, b_2) + (c_1, c_2)]$

prova

I) $(a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) = (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2)$ ← applicando la proprietà associativa

II) $(a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2))$

alcuni passaggi sono stati saltati applicando la proprietà associativa fra reali. si dimostra che la proprietà associativa vale anche in $\mathbb{R}^2$

$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$

$(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2)$

quindi la proprietà commutativa vale in $\mathbb{R}^2$

c'è un elemento neutro, la coppia $(0, 0)$, e un inverso opposto, infatti se $b_1 = -a_1$ e $b_2 = -a_2$ sommando si ottiene la coppia $(0, 0)$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\lambda, (a_1, a_2)) \longrightarrow (\lambda a_1, \lambda a_2)$$

(i) $\lambda((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) = \lambda(a_1, a_2) + \lambda(b_1 + b_2)$

(ii) $(\lambda + \mu)(a_1, a_2) = \lambda(a_1, a_2) + \mu(a_1, a_2)$

(iii) $(\lambda\mu)(a_1, a_2) = \lambda(\mu(a_1, a_2))$.

(iv) $1_{\mathbb{R}}(a_1, a_2) = (a_1, a_2)$

Queste proprietà si possono dimostrare in maniera agevole

$M_{m,n}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{ij} & a_{mn} \end{pmatrix}$ $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$\{M_{2,2}, +\}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

$\{M_{2,2}, +\}$ modulo

$A = ((a_{ij}))$ $\quad B = ((b_{ij}))$ $\quad A + B = B + A$

$C = ((c_{ij}))$ $\quad (A+B) + C = A + (B+C)$

$\exists\, M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \exists\, A' = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad A \in M_{2,2}$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ $\quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

$\{M_{2,2}, +, \cdot\}$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Es. Calcolare la matrice $X = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$ ove: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

combinazione lineare di A_1, A_2, A_3 mediante i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$X = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Es. Dati i vettori $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dire se il vettore $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}$

$$\begin{cases} 2u + 3v + w = 1 \\ u + w = 2 \\ u + w + z = -1 \\ u + v + w + z = 1 \end{cases}$$

Dimostrazione completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+3\beta+\gamma & \alpha+\gamma \\ \alpha+\gamma+\delta & \alpha+\beta+\gamma+\delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta+\gamma = 1 \\ \alpha+\gamma = 2 \\ \alpha+\gamma+\delta = -1 \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = -7 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 9 \\ \delta = -3 \end{cases}$$

Es. Considerato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$ con le solite operazioni

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$
$$\lambda (a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

dire se il vettore $\bar{a} = (1,2,-1)$ è combinazione lineare dei vettori $\bar{v} = (0,1,2)$ $\bar{V} = (1,1,1)$ $\bar{w} = (0,3,1)$ $\bar{t}$ $(0,0,2)$

$$(1,2,-1) = \alpha(0,1,2) + \beta(1,1,-1) + \gamma(0,3,1) + \delta(0,0,2)$$
$$(1,2,-1) = (0,\alpha,2\alpha) + (\beta,\beta,-\beta) + (0,3\gamma,\gamma) + (0,0,2\delta)$$
$$(1,2,-1) = (\beta, \alpha+\beta+3\gamma, 2\alpha-\beta+\gamma+2\delta)$$

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha+\beta+3\gamma = 2 \\ 2\alpha-\beta+\gamma+2\delta = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha+3\gamma = 1 \\ 2\alpha+\gamma+2\delta = -2 \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONI

(i) $\lambda (a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$
$\lambda (b_1, b_2) = (\lambda b_1, \lambda b_2)$

$$\lambda((a_1+b_1),(a_2+b_2)) = ((\lambda a_1+\lambda b_1), (\lambda a_2, \lambda b_2))$$
$$\lambda((a_1,a_2)+(b_1,b_2)) = ((\lambda a_1, \lambda a_2) + (\lambda b_1, \lambda b_2))$$
$$\lambda((a_1,a_2)+(b_1,b_2)) = \lambda(a_1+a_2) + \lambda(b_1+b_2)$$

(ii) $(\lambda+\mu) a_1 = \lambda a_1 + \mu a_1$
$(\lambda+\mu) a_2 = \lambda a_2 + \mu a_2$

$$(\lambda+\mu)(a_1,a_2) = (\lambda a_1+\mu a_1, \lambda a_2+\mu a_2) = ((\lambda a_1, \lambda a_2) + (\mu a_1, \mu a_2)) = ((\lambda(a_1,a_2)) + (\mu(a_1,$$

(iii) $(\lambda\mu)\, a_1 = \lambda(\mu(a_1))$

$(\lambda\mu)\, a_2 = \lambda(\mu(a_2))$

$(\lambda\mu)\,(a_1, a_2) = ((\lambda(\mu(a_1))), (\lambda(\mu(a_2))))$

$(\lambda\mu)\,(a_1, a_2) = ((\lambda\mu(a_1)), (\lambda\mu(a_2)))$

$(\lambda\mu)\,(a_1, a_2) = ((\lambda(\mu(a_1), \mu(a_2))))$

$(\lambda\mu)\,(a_1, a_2) = \lambda(\mu(a_1, a_2))$

(iv) $1_{\mathbb{R}}(a_1, a_2) = (1_{\mathbb{R}} a_1, 1_{\mathbb{R}} a_2) = (a_1, a_2)$

Tutorato 14-16 Analisi LUNEDÌ

Geometria MARTEDÌ

Matematica Discreta GIOVEDÌ

Quaderno 25: Teoria

Quaderno 38: Esercizi

$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & \sqrt{3} \end{Vmatrix}$ righe, colonne $(2,3)$

$f(x) = \int_0^1 z^x \cdot e^{-z} \cdot dz$

$\Gamma(n) = (n-1)!$

$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -7 \end{Vmatrix}$ Matrice quadrata (n. righe = n. colonne)

Determinante 2×2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \in \mathbb{R}$

Determinante 3×3: (complemento algebrico: si toglie la riga e la colonna)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$ (non è l'unico sviluppo, vedi dopo)

I segni sono alternati: se la somma degli indici del termine è pari si ha segno +, se la somma degli indici del termine è dispari si ha segno −.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Il determinante può essere sviluppato a partire da qualsiasi riga o da qualsiasi colonna.

Testi

→ Esercizi

FAVRO - ZUCCO

Esercizi di Geometria Analitica

quaderno didattico 38

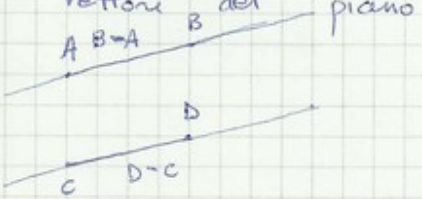
del Dipartimento

→ Teoria

FAVRO - ZUCCO

dispense a capitoli (centro stampa)

Vettori del piano



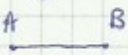
Relazione di equivalenza: (R):

$x \, R \, x$ riflessiva

$x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$ simmetrica

$x \, R \, y \wedge y \, R \, z \Rightarrow x \, R \, z$ transitiva

Segmenti orientati



$B - A$

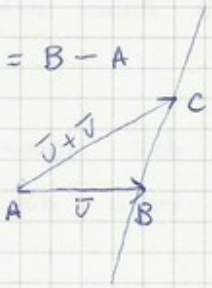
Due vettori sono equipollenti

1) se $A \equiv B$ allora $C \equiv D$

2) se $A \neq B$ allora (distanza (A,B)) = (distanza (C,D)), e stanno sulla stessa retta o su rette parallele inoltre hanno lo stesso verso.

Somma di vettori, $\bar{v} + \bar{v} \in S_2$

$\bar{v} = B - A \qquad \bar{v} = C - B \qquad \bar{v} + \bar{v} = C - A$



$\{S_2, +\}$ gruppo abeliano (commutativo)

$\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \quad (\bar{u}+\bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v}+\bar{w})$

$\exists \; \bar{0} \; \forall u \; / \; \bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$

$\forall \bar{u} \in S_2 \quad \exists \; -u \in S_2 \; / \; \bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = 0$

Prodotto di uno scalare per un vettore:

$\|\lambda \bar{v}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{v}\|$

direzione di $\bar{v}$

$\lambda > 0$ verso di v

$\lambda < 0$ verso opposto a v

$\lambda = 0$ vettore nullo

$\lambda = 0 \quad 0\bar{v} = \bar{0}$

$\bar{v} = 0 \quad \lambda \bar{0} = \bar{0}$

Proprietà:

$\forall u \in S_2 \qquad \forall v \in S_2 \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\lambda(\bar{u}+\bar{v}) = \lambda\bar{u} + \lambda\bar{v}$

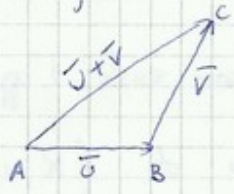
$(\lambda+\mu)\bar{u} = \lambda\bar{u} + \mu\bar{u}$

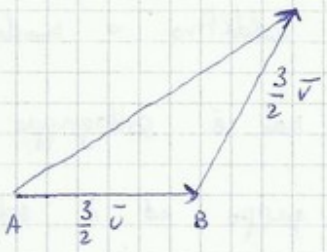
$(\lambda\mu)\bar{u} = \lambda(\mu\bar{u})$

$-1\,\bar{u} = \bar{u}$

Significato geometrico:

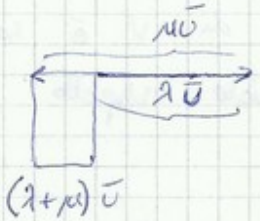
$\lambda = \frac{3}{2}$





$\lambda = \frac{3}{2} \qquad \mu = -2$

$(\lambda+\mu)\bar{u} = \left(\frac{3}{2}-2\right)\bar{u} = -\frac{1}{2}\bar{u}$



$(\lambda\mu)\bar{u} = \left(\frac{3}{2}(-2)\right)\bar{u} = -3\bar{u}$

$\{\mathbb{R}, +\}$ gruppo abeliano additivo o modulo

$\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ campo

Spazi vettoriali su $\mathbb{R}$:

$\{V, +\}$ modulo

$\{V, +, \cdot\}$ prodotto per scalari

Esempi:

$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \cdots, a_n) \quad a_i \in \mathbb{R}\}$ $\qquad \{\mathbb{R}^n, +, \cdot\}$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$(a_1, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots a_n+b_n)$

$\lambda(a_1, \cdots a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots \lambda a_n)$

$M_{m,n}$ $\quad A = ((a_{ij})) \quad B = ((b_{ij}))$

$A+B = ((a_{ij}+b_{ij})) \qquad \lambda A = ((\lambda a_{ij}))$

$\{M_{m,n}, +, \cdot\}$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$R_n(x) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \,/\, a_i \in \mathbb{R}\}$

gr $p(x) \leq n$

$(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) =$

$(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots + (a_n+b_n)x^n$

$\lambda (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = \lambda a_0 + (\lambda a_1) x + \dots + (\lambda a_n) x^n$

$\{R_n[x], +, \cdot\}$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$\{\mathbb{R}, +\}$ gruppo abeliano additivo o modulo

$N \subset \mathbb{R}$ $\quad \{N, +\}$ non è sottogruppo (non esiste l'opposto)

$\{\mathbb{Z}, +\}$ gruppo ed è sottogruppo di $\{\mathbb{R}, +\}$

<u>Def.</u> V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

V' sottoinsieme di V è sottospazio vettoriale di V se è spazio vettoriale rispetto alle restrizioni delle operazioni di V a V'

I criterio

V' è sottospazio vettoriale di V se è chiuso rispetto alle 2 operazioni di V. Ossia 1) $\forall \bar{u} \in V' \quad \forall \bar{v} \in V' \Rightarrow \bar{u}+\bar{v} \in V'$

2) $\forall \bar{u} \in V' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \bar{u} \in V'$

$0\bar{u} = \bar{0} \in V'$

$(-1)\bar{u} = -\bar{u}$

$(-1)\bar{u} + \bar{u} = (-1)\bar{u} + (1)\bar{u} = (-1+1)\bar{u} = 0\bar{u} = \bar{0}$

II criterio

V' è sottospazio vettoriale se:

$\forall \bar{u} \in V', \forall \bar{v} \in V', \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in V'$

I due criteri sono equivalenti:

I $\longrightarrow$ II

$\forall \bar{v} \quad \forall \bar{v} \quad \forall \alpha \quad \forall \beta$

$\alpha \bar{v} \in V'$ per la (2) di I

$\beta \bar{v} \in V'$ per la (2) di I

$\alpha \bar{v} + \beta \bar{v} \in V'$ per la (1) di I

II $\longrightarrow$ I

$\forall \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V' \Longrightarrow 1\bar{v} + 1\bar{v} \in V' \qquad \alpha = 1, \ \beta = 1$ dimostrata la (1) di

$\lambda \bar{v} \in V' \qquad \alpha = \lambda \quad \beta = 0$ dimostrata la (2) di

---

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_r \in S_2$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_r \bar{v}_r$ combinazione lineare dei vettori $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r$ a coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_r$

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r$ sono <u>linearmente dipendenti</u> se esistono combinazioni lineari a coefficienti non tutti nulli che diano il vettore nullo

$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_r \bar{v}_r = \bar{0}$ con λ_i non tutti nulli

Sono linearmente indipendenti se $\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_r \bar{v}_r = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$

Se r vettori sono linearmente dipendenti, allora uno di essi è combinazione lineare degli altri $r-1$.

$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_r \bar{v}_r = 0$

$-\lambda_1 \bar{v}_1 = \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_r \bar{v}_r$

$\bar{v}_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \cdot (\lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_r \bar{v}_r)$

se $\lambda_1 = 0$, si usa λ_2, e se $\lambda_2 = 0$ si usa λ_3, e così via, almeno uno è $\neq 0$, prima o poi ci si ferma $\Longleftarrow$

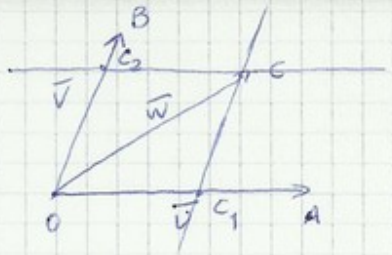
$\bar{v} = x_1 \bar{v}_1 + \dots + x_p \bar{v}_p$

$\bar{0} = -\bar{v} + x_1 \bar{v}_1 + \dots + x_p \bar{v}_p$

il coefficiente di $-\bar{v}$ è -1, diverso da 0. $\Longrightarrow$

Con due vettori la dipendenza lineare si ha se e solo se $\bar{v}_1 = \lambda \bar{v}_2$ (sono paralleli).

Con tre vettori di S_2, si ha sempre dipendenza lineare. Se uno è nullo o due paralleli, è ovvio, mentre se sono tre qualsiasi, si ha:



$\bar{u} = A - O$

$\bar{v} = B - O$

$\bar{w} = C - O$

$C_1 - O \parallel \bar{u}$ $\quad C_1 - O = \lambda_1 \bar{u}$

$C_2 - O \parallel \bar{v}$ $\quad C_2 - O = \lambda_2 \bar{v}$

$\bar{w} = C - O = (C_1 - O) + (C_2 - O) = \lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v}$

basandosi sul fatto che con due vettori il parallelismo implica la dipendenza lineare.

Quindi, in S_2, due vettori non nulli e non paralleli formano una base di riferimento, nel senso che ogni altro vettore si può scrivere come combinazione lineare degli altri due

$\bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2$ $\quad x_1, x_2$ componenti di $\bar{u}$ nella base e.

$\mathbb{R}^2 (x, y) = x_1 (1,0) + x_2 (0,1)$

$\forall \bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2$

$\lambda \bar{u} = \lambda (x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2) = (\lambda x_1) \bar{e}_1 + (\lambda x_2) \bar{e}_2$

$\bar{v} = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2$

$\bar{u} + \bar{v} = (x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2) + (y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2) = (x_1 + y_1) \bar{e}_1 + (x_2 + y_2) \bar{e}_2$

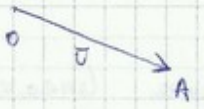
VETTORI IN S_3

Due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se sono paralleli.

Tre vettori sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.

Quattro vettori sono sempre linearmente dipendenti.

Supponiamo di avere 3 vettori non complanari; il quarto si può scrivere come combinazione lineare degli altri tre.



Prodotto Scalare in S_3

$\bar{u}, \bar{v}$ $\quad u \cdot v \in \mathbb{R}$ $\quad \bar{u} \cdot \bar{v} = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \widehat{uv}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \iff \bar{u} = 0 \ \vee \ \bar{v} = 0 \ \vee \ \bar{u} \perp \bar{v}$

$\{\bar{0}\}$ è sottospazio vettoriale: infatti

$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

$\lambda \bar{0} = \bar{0}$

$\lambda \bar{u} = \lambda(\bar{u} + \bar{0}) = \lambda \bar{u} + \lambda \bar{0}$

$\lambda \bar{u} = \lambda \bar{u} + \bar{0}$

$\alpha \bar{0} + \beta \bar{0} = \bar{0}$

$\lambda \bar{u} + \lambda \bar{0} = \lambda \bar{u} + \bar{0}$

$\lambda \bar{0} = \bar{0}$

Quindi è chiuso rispetto alle due operazioni, ergo è uno spazio vettoriale

Es. $\mathbb{R}^3$

$\bar{0} = (0,0,0) \quad \bar{u} = (1,0,0)$

$I = \{\bar{0}, \bar{u}\}$ non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$: infatti

$\lambda \bar{u} = (\lambda, 0, 0)$, e per $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ non fa parte di I

$H = \{(a,0,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ è sottospazio vettoriale?

$\bar{u} + \bar{v} = (a,0,0) + (b,0,0) = (a+b, 0, 0)$

$\lambda \bar{u} = \lambda(a,0,0) = (\lambda a, 0, 0)$



$\bar{0} \in H \cap K$

H, K sottospazi vettoriali

Prop. $H \cap K$ è un sottospazio vettoriale

I) $x \in H \cap K \quad y \in H \cap K$

$x \in H \wedge x \in K$

$y \in H \wedge y \in K$

$x + y \in H \wedge x + y \in K$ (sono sottospazi vettoriali)

$x + y \in H \cap K$

II) $x \in H \cap K$

$\lambda x \in H \cap K \implies x \in H \wedge x \in K$

$\lambda x \in H \wedge \lambda x \in K$ (sono sottospazi vettoriali)

$\lambda x \in H \cap K$



$V = \mathbb{R}^4$

$H = \{(a_1, 0, 0, a_4) / a_i \in \mathbb{R}\}$

$K = \{(0, a_2, a_3, 0) / a_i \in \mathbb{R}\}$

$(1,0,0,2) \in H \cup K$

$(0,3,1,0) \in H \cup K$

$(1,0,0,2) + (0,3,1,0) = (1,3,1,2) \notin H \cup K$

L'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale, mentre l'unione di due sottospazi vettoriali, in generale, non è un sottospazio vettoriale

$V = \mathbb{R}^2$

$\overline{v_1} = (1,2) \qquad \overline{v_2} = (-1,1) \qquad \overline{v_3} = (1,4)$

$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 3$

$\overline{v} = \alpha\overline{v_1} + \beta\overline{v_2} + \gamma\overline{v_3} = 2(1,2) + 1(-1,1) + 3(1,4) = (2,4) + (-1,1) + (3,12) = (4,17)$

$\mathcal{L} < \overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_m} >$

$\mathcal{L} = \{\alpha_1 \overline{v_1} + \dots + \alpha_m \overline{v_m} / \alpha_i \text{ varia in } \mathbb{R}\}$

Esempio $V = \mathbb{R}^4$

$\overline{v_1} = (1,2,3,0) \qquad \overline{v_2} = (0,1,1,1)$

$\mathcal{L} < \overline{v_1}, \overline{v_2} > = \{(1,2,3,0), (0,1,1,1), (1,3,4,1), (0,0,0,0)\}$

$\mathcal{L}$ è sottospazio vettoriale:

I) $\overline{u} \in \mathcal{L} \rightarrow \overline{u} = \alpha_1 \overline{v_1} + \dots + \alpha_m \overline{v_m}$

$\overline{v} \in \mathcal{L} \rightarrow \overline{v} = \beta_1 \overline{v_1} + \dots + \beta_m \overline{v_m}$

$\overline{u} + \overline{v} = (\alpha_1 \overline{v_1} + \dots + \alpha_m \overline{v_m}) + (\beta_1 \overline{v_1} + \dots + \beta_m \overline{v_m}) =$

$\alpha_1 \overline{v_1} + \beta_1 \overline{v_1} + \dots + \alpha_m \overline{v_m} + \beta_m \overline{v_m} =$

$(\alpha_1 + \beta_1)\overline{v_1} + \dots + (\alpha_m + \beta_m)\overline{v_m} \in \mathcal{L}$

$\lambda \overline{u} = \lambda(\alpha_1 \overline{u_1} + \dots + \alpha_m \overline{u_m}) =$

I vettori $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_m}$ si dicono GENERATORI

PRODOTTO SCALARE IN S_3 $\quad \bar{u} \cdot \bar{v} \in \mathbb{R}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos \hat{uv}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ se $\bar{u} = 0$ v $\bar{v} = 0$ v $\hat{uv} = \frac{\pi}{2}$

$\bar{u} \cdot \bar{u} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{u}\| \cdot \cos 0 = \|u\|^2 \geq 0$

$\cos \hat{uv} = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|}$ $\quad \bar{u} \neq \bar{0}$, $\bar{v} \neq \bar{0}$

PRODOTTO VETTORIALE O ESTERNO

$(\bar{u}, \bar{v}) \longmapsto \bar{u} \wedge \bar{v} \in S_3$

è vettore di modulo $\|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin \hat{uv}$, direzione ortogonale ai 2 vettori, verso in base alla regola della mano destra.

Il prodotto vettoriale non è commutativo, si ha infatti:

$\bar{u} \wedge \bar{v} = -\bar{v} \wedge \bar{u}$

$(\bar{u} + \bar{u}') \wedge \bar{v} = \bar{u} \wedge \bar{v} + \bar{u}' \wedge \bar{v}$

$\bar{u} \wedge (\bar{v} + \bar{v}') = \bar{u} \wedge \bar{v} + \bar{u} \wedge \bar{v}'$

$(\lambda \bar{u}) \wedge \bar{v} = \lambda (\bar{u} \wedge \bar{v}) = \bar{u} \wedge (\lambda \bar{v})$

PRODOTTO MISTO

$(u \wedge v) \cdot w \in \mathbb{R}$ (il prodotto vettoriale restituisce un vettore, il prodotto scalare un numero reale)

Se i tre vettori sono complanari, il prodotto misto è nullo.

Il prodotto misto corrisponde al volume del parallelepipedo di spigoli u, v, w.

$(u \wedge v) \cdot w$

$\|u \wedge v\| \cdot \|w\| \cos \alpha$

$\|u \wedge v\|$ ↓ area base

$\|w\| \cos \alpha$ ↓ altezza (proiezione)

Si noti che il volume di un tetraedro è $\frac{1}{3} A_{base} \cdot h$; riferendoci al caso precedente, poichè la base è pari a metà di quella del parallelogramma e l'altezza è uguale, si ha che il volume di un tetraedro si può trovare come $\frac{1}{6} |u \wedge v \cdot w|$

S_3 $B: \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ $\quad \bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + v_3\bar{e}_3$

$\bar{u} = u_1\bar{e}_1 + u_2\bar{e}_2 + u_3\bar{e}_3$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = (u_1\bar{e}_1 + u_2\bar{e}_2 + u_3\bar{e}_3)\cdot(v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + v_3\bar{e}_3) = u_1v_1\ e_1\cdot e_1 +$
$u_1v_2\ e_1\cdot e_2 + u_1v_3\ e_1\cdot e_3 + u_2v_1\ e_2\cdot e_1 + u_2v_2\ e_2\cdot e_2 +$
$u_2v_3\ e_2\cdot e_3 + u_3v_1\ e_3\cdot e_1 + u_3v_2\ e_3\cdot e_2 + u_3v_3\ e_3\cdot e_3 =$

$u_1v_1\ e_1\cdot e_1 + u_2v_2\ e_2\cdot e_2 + u_3v_3\ e_3\cdot e_3 + 2u_1v_2\ e_1\cdot e_2 + 2u_1v_3\ e_1\cdot e_3 + 2u_2v_3\ e_2\cdot e_3$

Base ortogonale positiva: vettori a 2 a 2 ortogonali e di modulo 1

$e_1\cdot e_2 = e_1\cdot e_3 = e_2\cdot e_3 = 0 \qquad \|e_1\|^2 = \|e_2\|^2 = \|e_3\|^2 = 1$

$B = \{i, j, k\} \qquad i^2 = j^2 = k^2 = 1$

$\bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{i}\cdot\bar{k} = \bar{j}\cdot\bar{k} = 0$

$\bar{i}\wedge\bar{j} = \bar{k} \longrightarrow$ ciclando le variabili i, j, k si ottengono gli altri risultati.

$u = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}$

$v = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ somma dei prodotti delle componenti omonime

$\bar{u}\wedge v = (u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}) \wedge (v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}) =$
$u_1v_1\ i\wedge i + u_1v_2\ i\wedge j + u_1v_3\ i\wedge k + u_2v_1\ j\wedge i +$
$u_2v_2\ j\wedge j + u_2v_3\ j\wedge k + u_3v_1\ k\wedge i + u_3v_2\ k\wedge j + u_3v_3\ k\wedge k =$

$u_1v_2\ i\wedge j + u_1v_3\ i\wedge k + u_2v_1\ j\wedge i + u_2v_3\ j\wedge k + u_3v_1\ k\wedge i + u_3v_2\ k\wedge j$

$(u_1v_2 - u_2v_1)\bar{k} + (u_3v_1 - u_1v_3)\bar{j} + (u_2v_3 - u_3v_2)\bar{i}$

$$u\wedge v\cdot w = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$u\wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$H+K = \{\bar{x} = h+k \,/\, h \in H \wedge k \in K\}$$

$$\bar{u} = h_1 + k_1 \,/\, h_1 \in H \wedge k_1 \in K$$

$$\bar{v} = h_2 + k_2 \,/\, h_2 \in H \wedge k_2 \in K$$

$$\bar{u}+\bar{v} = (h_1+k_1)+(h_2+k_2) = \underbrace{(h_1+h_2)}_{\in H} + \underbrace{(k_1+k_2)}_{\in K} \qquad \bar{u}+\bar{v} \in H+K$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \bar{u} = h_1+k_1$$

$$\lambda\bar{u} = \lambda(h_1+k_1) = \underbrace{\lambda h_1}_{\in H} + \underbrace{\lambda k_1}_{\in K} \Rightarrow \lambda\bar{u} \in H+K$$

ESERCIZI SULLA DIPENDENZA LINEARE

$$\bar{u_1} = (1,0,1) \qquad \bar{u_2} = (0,1,2) \qquad \bar{u_3} = (-1,1,-1)$$

$$\alpha_1\bar{u_1} + \alpha_2\bar{u_2} + \alpha_3\bar{u_3} = \bar{0}$$

$$(\alpha_1, 0, \alpha_1) + (0, \alpha_2, 2\alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, -\alpha_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 = a_3 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 = a_3 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -a_2 \\ a_2 = a_3 \\ 0 = 0 \rightarrow \text{identità} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -t \\ a_2 = t \\ a_3 = t \end{cases}$$

$$-t\bar{u_1} + t\bar{u_2} + t\bar{u_3} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

TEOREMA

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ di V è una base di $V \iff$

ogni vettore $\bar{v}$ di V si scrive in un modo unico come c.l. di $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$

Infatti, supponendo che si possa scrivere in due modi con coefficienti x_i, x_i', si avrebbe:

$$\bar{v} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \dots + x_n\bar{v}_n = x_1'\bar{v}_1 + x_2'\bar{v}_2 + \dots + x_n'\bar{v}_n$$

ovvero

$$(x_1 - x_1')\bar{v}_1 + (x_2 - x_2')\bar{v}_2 + \dots + (x_n - x_n')\bar{v}_n = 0$$

Poiché i generatori sono linearmente indipendenti, si ha che

$$x_1 - x_1' = x_2 - x_2' = \dots = x_n - x_n' = 0$$

quindi gli x_i e gli x_i' coincidono

Viceversa:

$$0 = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \dots + x_n\bar{v}_n$$

$$0 = 0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + \dots + 0\bar{v}_n$$

Poiché abbiamo supposto che il modo di scrivere è unico, si ha che $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Ma allora i ~~ge~~ vettori $\bar{v}_i$ sono linearmente indipendenti, dunque si ha una base.

SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO → generato da un numero finito di vettori.

TEOREMA: - Da ogni sistema di generatori è possibile estrarre una base

- Comunque si scelga l'insieme finito $A = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ di vettori non tutti nulli di uno spazio vettoriale esiste un sottoinsieme $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n\}$ di A formato da vettori linearmente indipendenti e tale che qualunque vettore di A risulti combinazione lineare di vettori di B

Base ⟷ sistema di generatori linearmente indipendenti

Teor. Comunque si scelga $A = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ di vettori non tutti nulli di V, $\exists$ un sottoinsieme $B = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m\}$ di A formato da vettori linearmente indipendenti e tale che un $\forall$ vettore di A risulti combinazione lineare di vettori di B

Dim. Se $\{a_1, \dots, a_n\}$ sono linearmente indipendenti, $B \equiv A$.

Se invece sono linearmente dipendenti, almeno uno è non nullo per ipotesi, supponiamo sia $\bar{a}_1 \neq \bar{0}$.

Poniamo ~~Poniamo~~ $\bar{b}_1 = \bar{a}_1$; può darsi:

$\bar{a}_2 = t_2 \bar{b}_1$

$\bar{a}_3 = t_3 \bar{b}_1$

$\bar{a}_n = t_n \bar{b}_1$. In questo caso $B' = \{b_1\}$

Se almeno uno dei vettori $A - \{\bar{a}_1\}$ non risulta combinazione lineare di $\bar{a}_1$, supponiamo sia $a_2 \neq t_2 \bar{b}_1$ e poniamo $\bar{b}_2 = \bar{a}_2$. A questo punto sarà $B'' = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ il sottoinsieme cercato soltanto se i vettori che restano, cioè $A - \{\bar{a}_1, a_2\}$, sono combinazioni lineari di $\bar{b}_1$ e $\bar{b}_2$ (con $\bar{b}_1 = \bar{a}_1$ e $\bar{b}_2 = \bar{a}_2$), cioè solo se:

$\bar{a}_3 = \lambda_3 \bar{b}_1 + \mu_3 \bar{b}_2$

$\bar{a}_4 = \lambda_4 \bar{b}_1 + \mu_4 \bar{b}_2$

...

$\bar{a}_n = \lambda_n \bar{b}_1 + \mu_n \bar{b}_2$

In caso contrario sarà possibile individuare in $A - \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ un vettore che supponiamo sia $\bar{a}_3$ il quale non è combinazione lineare di $\bar{a}_1$ e $\bar{a}_2$ ponendo $\bar{a}_3 = \bar{b}_3$

$B''' = \{b_1, b_2, b_3\}$ sarà il sottoinsieme

Si ripete il ragionamento tante volte finché si giunge a formare un sottoinsieme $B^{(m)}$ di vettori di A tale che ogni altro vettore di A è c.l. di vettori di $B^{(m)}$

Sarà $m = n$ se i vettori di A sono linearmente indipendenti,

$m \leq n-1$ se sono linearmente dipendenti.

Teorema: Da ogni insieme di generatori è possibile estrarre una base.

Dim. È conseguenza del teorema precedente.

Se A è un sistema di generatori, i vettori B risultano linearmente indipendenti e sono ancora un sistema di generatori. Infatti se B contiene i primi m vettori di A (come è lecito supporre) sarà: $\bar{a}_{m+1} = \lambda_1' \bar{a}_1 + \lambda_2' \bar{a}_2 + \dots + \lambda_m' \bar{a}_m$

$\bar{a}_{m+2} = \lambda_1'' \bar{a}_1 + \lambda_2'' \bar{a}_2 + \dots + \lambda_m'' \bar{a}_m$

$\dots$

$\bar{a}_n = \lambda_1^{(n-m)} \bar{a}_1 + \lambda_2^{(n-m)} \bar{a}_2 + \dots + \lambda_m^{(n-m)} \bar{a}_2$

ogni vettore di $\mathcal{L} \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \rangle$

$\bar{a} \in \mathcal{L} \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle$

$\bar{a} = t_1 \bar{a}_1 + t_2 \bar{a}_2 + \dots + t_m \bar{a}_m + t_{m+1} \bar{a}_{m+1} + \dots + t_n \bar{a}_n$

risulterà (sostituendo) c.l. di

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$

Teorema: (della base incompleta) Sia $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ una base di V

Presi r vettori l.i. $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_r)$ con $r \leq n$ si può formare una nuova base di V sostituendo r vettori $\bar{e}_i$ con $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r$

$B' = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r, \bar{e}_{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_{n-r}}\}$

$p = 1$ $\bar{v}$ linearmente indipendente $\bar{v} \neq \bar{0}$

$\bar{v} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$ $\quad x_1 \neq 0 \quad \exists\, x_1^{-1}$

$\bar{e}_1 = x_1^{-1} \bar{v} - x_1^{-1} x_2 \bar{e}_2 - \dots - x_1^{-1} x_n \bar{e}_n$

Ts $(\bar{v}, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ è una base di V

$\bar{w}$ di V

$\bar{w} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n =$

$\alpha_1 (x_1^{-1} \bar{v} - x_1^{-1} x_2 \bar{e}_2 - \dots - x_1^{-1} x_n \bar{e}_n) + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$

$(\alpha_1 x_1^{-1}) \bar{v} + (\alpha_2 - \alpha_1 x_1^{-1}) \bar{e}_2 + (\alpha_3 - \alpha_1 x_1^{-1}) \bar{e}_3 + \dots + (\alpha_n - \alpha_1 x_1^{-1}) \bar{e}$

$\{\bar{v}, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ sono linearmente indipendenti

infatti: $\alpha_1 \bar{v} + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = 0$

α_1 non può essere $\neq 0$, altrimenti $\exists\, a_1^{-1}$

quindi $a_1 = 0$, ovvero:

$\alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_1 = \bar{0}$

cioè $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$

quindi i vettori sono linearmente indipendenti

(3) Ma $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p$ sono l.i. quindi v_p non è d.

di $v_1, \dots, v_{p-1}$ [segnalazione errori sulle dispense]

Teorema delle dimensioni

Sia V uno spazio vettoriale in cui esiste una base composta da n vettori. $\Rightarrow n$ è il massimo numero di vettori l.i. di

$\Rightarrow$ ogni altra base è formata da n vettori

$B\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_p$ $\quad p > n$

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ formano una base

$v_{n+1} = y_1 \bar{v}_1 + \dots + y_n \bar{v}_n$ assurdo

$\{e_1, \dots, e_n\}$ base, l.i. $\qquad \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ l.i., base

$m \leq n$

$n \leq m$ $\Rightarrow m = n$

$\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ base $\Leftrightarrow$ generatori, l.i. $\qquad \dim \mathbb{R}^n = n$.

S_3 $\quad B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ $\quad \|\bar{i}\| = \|\bar{j}\| = \|\bar{k}\| = 1$ $\quad i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$

$\bar{v} = v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j} + v_3 \bar{k}$

$\bar{V} = V_1 \bar{i} + V_2 \bar{j} + V_3 \bar{k}$

$\bar{w} = w_1 \bar{i} + w_2 \bar{j} + w_3 \bar{k}$

$v \cdot V = v_1 V_1 + v_2 V_2 + v_3 V_3$

$$\bar{v} \wedge \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

formale

$$\bar{w} \cdot (\bar{v} \wedge \bar{V}) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

$\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$

$\bar{b} = 3\bar{i} \quad - \bar{k}$

$\bar{c} = \bar{i} + \bar{j}$ ~~$\bar{k}$~~

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \wedge \bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$1 - 3 \cdot (-1) + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$

$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{b} + \bar{c}) \wedge (\bar{c} + \bar{a})$

$\bar{a} + \bar{b} = 4\bar{i} - 2\bar{j}$

$\bar{b} + \bar{c} = 4\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$

$\bar{c} + \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 =$$

$4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 12$

TEOREMA DI CARNOT

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$

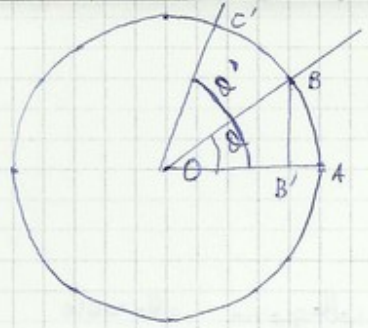
$\bar{u} = B - A \qquad C - B = \bar{u} - \bar{v}$

$\bar{v} = C - A$

$CB^2 = \|u - v\|^2 = (\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})$

$\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2 \cdot \bar{u} \cdot \bar{v}$

$AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos$



$B - O = \cos\vartheta\,\bar{\imath} + \sin\vartheta\,\bar{\jmath}$

$C - O = \cos\vartheta'\,\bar{\imath} + \sin\vartheta'\,\bar{\jmath}$

$(B-O)\cdot(C-O) = \overline{OB}\cdot\overline{OC}\cos(\vartheta'-\vartheta)$

$\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'$

II.14) $B = \{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$

$\overline{a_1} = \bar{\imath} - 3\bar{\jmath} + \bar{k}$

$\overline{a_2} = 3\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ linearmente dipendenti

$\overline{a_3} = 4\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + \bar{k}$

$\overline{a_4} = 5\bar{\imath} - 5\bar{\jmath} + 2\bar{k}$

$\overline{a_3} = \overline{a_1} + \overline{a_2}$

$\overline{a_4} = \overline{a_1} + \overline{a_3} = 2\cdot\overline{a_1} + \overline{a_2}$

$\overline{a_1}\cdot\overline{a_2} = 3\cdot 1 - 3\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0$

Base ortogonale $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_1}\wedge\overline{a_2}$

Base ortonormale

$$\frac{a_1}{\|\bar{a}_1\|}, \quad \frac{a_2}{\|\bar{a}_2\|}, \quad \frac{\overline{a_1}\wedge\overline{a_2}}{\|\overline{a_1}\wedge\overline{a_2}\|}$$

$M_{2,2}$

$$A = \left\{ \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} / a = 0 \quad c = b+d \right\} \qquad A = \begin{Vmatrix} 0 & b \\ b+d & d \end{Vmatrix}$$

$$A_1 + A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & b_1 \\ b_1+d_1 & d_1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b_2 \\ b_2+d_2 & d_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & b_1+b_2 \\ (b_1+b_2)+(d_1+d_2) & d_1+d_2 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda A_1 = \lambda\cdot\begin{Vmatrix} 0 & b_1 \\ b_1+d_1 & d_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \lambda b_1 \\ \lambda b_1+\lambda d_1 & \lambda d_1 \end{Vmatrix}$$

Basi: $b=1$, $d=0$ $h_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ $\quad b=0$, $d=1$ $h_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$

$$\begin{Vmatrix} 0 & b \\ b+d & d \end{Vmatrix} = b\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + d\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Base di $M_{2,2}$ $\left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \right\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Base di $H = \{h_1, h_2\}$

Sistema di generatori $\{a_1, a_2, a_3, a_4, h_1, h_2\}$

Base: → ogni sottoinsieme è costituito da vettori linearmente indipendenti
→ ogni sovrainsieme è un sistema di generatori

$h_1 = a_2 + a_3$

$h_2 = a_3 + a_4$

$a_3 = -a_4 + h_2$

$a_2 = h_1 - a_3 = h_1 - h_2 + a_4$

Base: $\{a_1, a_4, h_1, h_2\}$

$K = \left\{ \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \;\; b = 2a \;\; c = b+1 \right\}$ $\quad K = \begin{Vmatrix} a & 2a \\ 2a+1 & d \end{Vmatrix}$ no sottospazio vettoriale

$\mathbb{R}_3[t] = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 / a_i \in \mathbb{R}\}$

$A = \{p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 / p_2 = p_1 + p_3, \; p_0 = 0\}$

$p(t) = p_1 t + (p_1 + p_3) t^2 + p_3 t^3$

$q(t) = q_1 t + (q_1 + q_3) t^2 + q_3 t^3$

$p(t) + q(t) = (p_1 + q_1) t + [(p_1 + q_1) + (p_3 + q_3)] t^2 + (p_3 + q_3) t^3$

Base: $p_1 = 1 \quad p_3 = 0 \quad p(t) = t + t^2$

$p_1 = 0 \quad p_3 = 1 \quad p'(t) = t^2 + t^3$

$\text{Base}_H \cup \text{Base}_K$ è un sistema di generatori di $H+K$

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

$\dim \mathbb{R}^n = n$

Es. 5 vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti

2 vettori di $\mathbb{R}^3$ non sono generatori

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix}$$

$A = \|a_{ij}\| \qquad B = \|b_{ij}\| \qquad A + B = \|a_{ij} + b_{ij}\| \qquad \lambda A = \|\lambda a_{ij}\|$

$A = \|a_{ij}\| \qquad {}^tA = \|a_{ji}\|$

(matrice trasposta)

Def. Una matrice quadrata si dice simmetrica se ${}^tA = A$ [antisimmetrica se ${}^tA = -A$]

diagonale se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$

identica se $a_{ij} = 1$ per $i = j$ e $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$

Prodotto fra matrici righe per colonne

$A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m,n}$ $\quad B = ((b_{hk})) \in \mathcal{M}_{n,p}$

$C = ((c_{ij})) \in \mathcal{M}_{m,p}$

$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$

$A \cdot B$ - si considera la riga i-esima di A e la colonna j-esima di B.
- si fanno i prodotti dei termini corrispondenti
- si sommano i prodotti così ottenuti

Esempio:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$A \cdot B \begin{Vmatrix} 1+2-1 & 2+2-3 & -1 & 2+8-1 \\ 2-1+0 & 4-1+0 & -2 & 4-4+0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{Vmatrix}$$

$B \cdot A$ non si può fare; il prodotto fra matrici non è quindi commutativo

Altro esempio:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{Vmatrix} 1+4+0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 \end{Vmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Rango di una matrice

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

$\overline{R_1} = (1,0)$ $\quad \overline{R_2} = (2,1)$ $\quad \overline{R_3} = (3,1)$

$\overline{C_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \overline{C_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Teorema Considerata una matrice $A = \|a_{ij}\|$ lo spazio delle righe di A e lo spazio delle colonne di A, hanno la stessa dimensione:
$\dim R_A = \dim C_A$

Esempio precedente: $\mathcal{L} < \overline{R_1}, \overline{R_2}, \overline{R_3} > = R^2$
$\mathcal{L} < \overline{C_1}, \overline{C_2} >$ sottospazio di R^3 di $\dim = 2$

Def. Si dice rango di una matrice A e si indica con $r(A)$, il numero che rappresenta la dim comune degli spazi delle righe e delle colonne di A.

MATRICI RIDOTTE

Def. Una matrice $A = ((a_{ij}))$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si dice ridotta per righe (per colonne) se in ogni riga (colonna) non nulla esiste un elemento non nullo, che diremo speciale, al di sotto (a destra) del quale gli elementi di A sono tutti nulli.
Gli elementi dell'ultima riga (colonna) sono tutti speciali (a meno che non siano nulli)
In una riga (colonna) nulla non ci sono elementi speciali

Esempio:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$ ridotta per righe
ridotta per colonne

$$B = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

$$C = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$ non è ridotta per righe
è ridotta per colonne

$$D = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$$ non è ridotta per righe (nella prima riga l'unico elemento non nullo è il 3 che non è speciale)
non è ridotta per colonne

Teorema: Se $A = \|a_{ij}\|$ è $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è una matrice ridotta per righe (per colonne) il numero delle righe (colonne) non nulle coincide con il rango della matrice.

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \begin{matrix} a_{11} \neq 0 \\ a_{22} \neq 0 \\ \cdots \\ a_{rr} \neq 0 \end{matrix}$$

$\overline{R_1} = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$
$\overline{R_2} = (0, a_{22}, \cdots, a_{2n})$
. . . . . .
$\overline{R_r} = (0, 0, \cdots, a_{rn})$

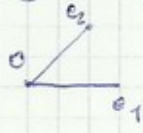
$\lambda_1 \overline{R_1} + \lambda_2 \overline{R_2} + \cdots + \lambda_r \overline{R_r} = \overline{0}$

$$(\lambda_1 a_{11},\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22},\ \dots,\ \lambda_1 a_{1r} + \lambda_2 a_{2r} + \dots + \lambda_r a_{rr}) = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} = 0 \implies \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} = 0 \implies \lambda_2 a_{22} = 0 \implies \lambda_2 = 0 \\ \dots\dots \implies \dots = 0 \\ \lambda_1 a_{1r} + \dots + \lambda_r a_{rr} = 0 \implies \lambda_r = 0 \end{cases}$$

GEOMETRIA PIANA

S_2 $\quad B\{e_1, e_2\}$



$P - O = x\bar{e_1} + y\bar{e_2}$

$P - O = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$ in riferimento cartesiano ortonormale

$P(x, y)$

$P_1\ (x_1, y_1)$

$P_2\ (x_2, y_2)$

$P_2 - P_1 = (P_2 - O) - (P_1 - O)$

$P_2 - P_1 = (x_2\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath}) - (x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath}) = (x_2 - x_1)\bar{\imath} + (y_2 - y_1)\bar{\jmath}$

$P_1 - P_2 = (x_2 - x_1)\bar{\imath} + (y_1 - y_2)\bar{\jmath}$

$M - O = \frac{1}{2}\left((P_1 - O) + (P_2 - O)\right)$

$\boxed{P - P_0 = t\vec{r}}$ Equazione vettoriale della retta

Esempio:

$P_0\ (2;3)$ $\quad \bar{r} = -\bar{\imath} + \sqrt{3}\bar{\jmath}$ $\quad (x-2)\bar{\imath} + (y-3)\bar{\jmath} = t(-\bar{\imath} + \sqrt{3}\bar{\jmath})$

$\begin{cases} x - 2 = -t \\ y - 3 = \sqrt{3}t \end{cases}$ retta passante per $(2;3)$ parallela al vettore $\bar{r}$.

Posto $\tau = l\bar{\imath} + m\bar{\jmath}$, possiamo genericamente scrivere:

$(x - x_0)\bar{\imath} + (y - y_0)\bar{\jmath} = tl\bar{\imath} + tm\bar{\jmath}$ $\quad l, m$ parametri direttori della retta

$\begin{cases} x - x_0 = lt \\ y - y_0 = mt \end{cases}$ I parametri direttori non sono unici, ma è unico il rapporto $\frac{l}{m}$ (o $\frac{m}{l}$ se m

Esempio

$(x-2)\bar{\imath} + (y-3)\bar{\jmath} = t(-\bar{\imath} + 3\bar{\jmath})$ parametri direttori $(-1, \sqrt{3})$, $(7, -\sqrt{3}\cdot 7)$ $(k, -\sqrt{3}\cdot k$ $k \in \mathbb{R} - \{0$

Equazione parametrica della retta $\quad (l, m) \neq (0, 0)$

se $l \neq 0 \ \wedge \ m \neq 0$

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Se $\quad l = 0 \quad x - x_0 = 0$

se $\quad m = 0 \quad y - y_0 = 0$

Retta $\times P_1, P_0$: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$

Se $x_1 = x_0$, allora $x = x_1 = x_0$

Se $y_1 = y_0$, allora $y = y_1 = y_0$

Infatti retta $\times P_0 \;//\; P_1 - P_0 = (x_1-x_0)\,\bar{\imath} + (y_1-y_0)\,\bar{\jmath}$ ($x_1-x_0 = l$, $y_1-y_0 = m$)

Equazione cartesiana: $ax+by+c=0$ $\quad a=m,\ b=-l$

parametri direttori: $(-b, a)$

$\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m}$

$mx - mx_0 = ly - ly_0$

$mx - ly + (-mx_0 + ly_0) = 0$

$a = m,\ b = -l,\ c = -mx_0 + ly_0$

Se $b \neq 0$ $\quad ax+by+c=0 \longrightarrow y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

$y = \dfrac{m}{l}x + \dfrac{ly_0 - mx_0}{l}$

Retta $\times P_0 \perp \bar{n}$

$P - P_0 \perp n$ $\quad (P-P_0)\cdot\bar{n} = 0 \longrightarrow (x-x_0; y-y_0)\cdot(a;b) = 0$

$P(x;y)$ $\quad P_0(x_0;y_0)$ $\quad a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$ dove a, b sono le componenti di n

Equazioni parametriche:

$$\begin{cases} y = t \\ x = -\dfrac{bt+c}{a} \end{cases}$$

Esempio:

r: $\sqrt{3}x - 5y + 2 = 0$

$y = 0 \longrightarrow x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad P_0\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}; 0\right)$ $\quad \bar{r}(5, \sqrt{3})$ $\quad l = -b,\ m = a$

Parametriche $\longrightarrow \begin{cases} y = t \\ x = \dfrac{5t-2}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Retta $\times Q(1;2) \;//\; r$: $\sqrt{3}(x-1) - 5(y-2) = 0$

Retta $\times Q(1;2) \perp r$: $\sqrt{3}(x-1) + 5(y-2) = 0$

Incontro di due rette:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \perp (a,b) \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \perp (a_1,b_1) \end{cases}$$

C'è 1 punto di intersezione se $(a,b) \not\parallel (a_1,b_1)$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Se invece $(a,b) \parallel (a_1,b_1) \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, allora $a_1 = ha$ e $b_1 = hb$ quindi:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ hax+hby+c_1=0 \end{cases}$$

Se $c_1 = hc$, allora le rette coincidono in quanto semplificando per h si ottiene la prima retta.

Se $c_1 \neq hc$, allora le rette sono distinte e parallele e pertanto non hanno punti in comune.

Esempi:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - 5y + 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{3}x - 5x + 2 = 0 \end{cases} \qquad x = -\frac{2}{\sqrt{3}-5} = \frac{2}{5-\sqrt{3}} \qquad \left(\frac{2}{5-\sqrt{3}}; \frac{2}{5-\sqrt{3}}\right)$$

rette incidenti

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - 5y + 2 = 0 \\ -3x + 5\sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

la seconda retta ha l'equazione della prima moltiplicata per $\sqrt{3}$; dunque le due rette coincidono.

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - 5y + 2 = 0 \\ \sqrt{3}x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$$

Se il sistema non ha soluzioni e le due rette sono parallele e distinte.

$\lambda(ax+by+c) + \mu(a_1x+b_1y+c_1) = 0$ retta $P_1 \in r$ $P_1 \in r'$

Equazione del fascio di rette per P_1.

Date $r: \begin{cases} x-2y+3=0 \end{cases}$

$r': \begin{cases} 3x-y+2=0 \end{cases}$

scrivere l'equazione di tutte le rette passanti per il loro punto di intersezione.

$\lambda(x-2y+3) + \mu(3x-y+2) = 0$

Retta per $P = r \cap r'$ e per l'origine: $\lambda c + \mu c_1 = 0$

$\lambda(3) + \mu(2) = 0$

$3\lambda + 2\mu = 0$

$(2; -3)$

$2(x-2y+3) - 3(3x-y+2) = 0$

$-7x - y = -(7x+y) = 0$

$(c_1; -c)$

$c_1(ax+by+c) - c(a_1x+b_1y+c_1) =$

rette $\times$ $P = r \cap r'$ è $// \; x - y = 0$

$b = -2\lambda - \mu = -\ell$

$a = \lambda + 3\mu = m$

$(\lambda + 3\mu)x + (-2\lambda - \mu)y + 3\lambda + 2\mu = 0$

$\lambda + 3\mu = -2\lambda - \mu$

RETTA

$r = \ell \bar{\imath} + m \bar{\jmath}$

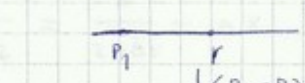
$P - P_0 = t\bar{r}$

$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \end{cases}$

$\ell \neq 0$, $m \neq 0$ $\quad \dfrac{x - x_0}{\ell} = \dfrac{y - y_0}{m}$

$P_2 - P_1 = (x_2 - x_1)\bar{\imath} + (y_2 - y_1)\bar{\jmath}$

$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



$$d(P_0, r) = \frac{|(P_0 - P_1) \cdot \bar{n}|}{\|n\|} = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$\frac{|ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

distanza di un punto da una retta

r, $x + 3y + 2 = 0$

r' $x + 3y - 7 = 0$

$d(r, r') = d(R_0, r')$

dove R_0 è un qualsiasi punto $\in r$.

CIRCONFERENZA

$C(\alpha, \beta)$ centro $\quad r > 0$ raggio

circonferenza $= \{P \,/\, \overline{PC} = r\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$

$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0 \rightarrow$ equazione di II grado in x, y

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ $\quad$ coefficiente x^2 = coefficiente y^2

dove $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$, $c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$ $\quad$ coefficiente $xy = 0$

$\alpha = -\dfrac{a}{2}$, $\beta = -\dfrac{b}{2}$, $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$ $\quad \dfrac{1}{4}a^2 + \dfrac{1}{4}b^2 - c \geq 0$

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ $\quad a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$

la retta s è esterna se $d(s, C) > r$

" " tangente " $d(s, C) = r$

" " secante " $d(s, C) < r$

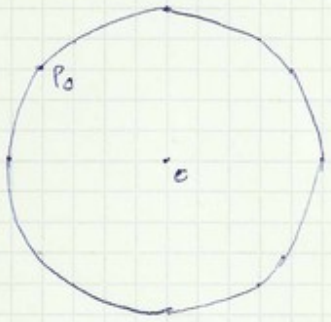
rette tangenti a σ: $\begin{cases} ax + by = 0 \\ \sigma \end{cases} \rightarrow \Delta = 0$ $\quad \dfrac{|2a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{5} \rightarrow \dfrac{a}{b} = 2 \pm \sqrt{6}$

passanti per l'origine

PROGRAMMA ESONERI

① Vettori in S_3
② Spazi vettoriali
③ Matrici
⑤ Rette nel piano (escluso traslazione e rotazione)

REGOLA DEGLI SDOPPIAMENTI



$C(\alpha;\beta) \quad r>0$

$\sigma: \; x^2+y^2+ax+by+c=0$

$P_0 \in \sigma \qquad P_0(x_0;y_0)$

$tg \text{ in } P_0 = \text{retta} \times P_0 \perp C-P_0 = \underset{a}{(\alpha-x_0)}\,\bar{i} + \underset{b}{(\beta-y_0)}\,\bar{j}$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

- $(\alpha-x_0)(x-x_0)+(\beta-y_0)(y-y_0)=0$

$\alpha x - \alpha x_0 - x_0 x + x_0^2 + \beta y - \beta y_0 - y_0 y + y_0^2 = 0$

$x_0^2+y_0^2 - ax_0 - \beta y_0 = \alpha x_0 + \beta y_0 + c$

- $x_0 x + y_0 y - \alpha(x+x_0) - \beta(y-y_0) + c = 0$
- $x_0 x + y_0 y + a\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + b\left(\frac{y+y_0}{2}\right) + c = 0$

MUTUE DISPOSIZIONI DI CIRCONFERENZE

$\sigma_1: \; x^2+y^2+ax+by+c=0$

$\sigma_2: \; x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$

Se concentriche $a=a_1$, $b=b_1$, una loro qualsiasi c.l. è concentrica.

$\lambda(x^2+y^2+ax+by+c)+\mu(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1)=0$

$(\lambda+\mu)(x^2+y^2+ax+by)+\lambda c+\mu c_1=0$

$x^2+y^2+ax+by+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}c+\frac{\mu}{\lambda+\mu}c_1=0$ posto $\lambda+\mu\neq 0$, se infatti $\lambda+\mu=0$: ~~si riduce ad una retta nel penultimo passaggio~~

$\lambda c+\mu c_1 \neq 0 \rightarrow \lambda c-\lambda c_1=0$

$\lambda(c-c_1)=0$

il che implica $\lambda=0 \vee c=c_1$

In generale:

$\lambda\sigma_1+\mu\sigma_2=0$

$(\lambda+\mu)(x^2+y^2)+(\lambda a+\mu a_1)x+(\lambda b+\mu b_1)y+\lambda c+\mu c_1$

Se $\lambda+\mu=0$ è una retta (asse radicale)

Se $\lambda+\mu\neq 0$ è una circonferenza

Se $A\in\sigma_1$, $A\in\sigma_2$, A è tutte le circonferenze del fascio.

L'equazione dell'asse radicale è $\lambda(a-a_1)x+\lambda(b-b_1)y+\lambda(c-c_1)=0$,

ovvero semplificando λ: $(a-a_1)x+(b-b_1)y+(c-c_1)=0$

La retta passante per i due centri è:

$$C_1C_2: \quad \frac{x+\frac{a}{2}}{-\frac{a_1}{2}+\frac{a}{2}} = \frac{y+\frac{b}{2}}{-\frac{b_1}{2}+\frac{b}{2}} \rightarrow \frac{2x+a}{a-a_1} = \frac{2y+b}{b-b_1}$$

Esonero: - Teoria
- vettori
- Spazi vettoriali
- Matrici (rango e inversa)
- Fasci

MATRICI RIDOTTE

Es. 3.1.6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rango di A è 3

Metodo di riduzione:

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

trovare B:

- $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
- B è ridotta per righe (colonne)
- A e B hanno lo stesso spazio delle righe (colonne)

Teor. Fondamento teorico del metodo di riduzione

Teor 3.1.3. Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $H = \mathcal{L}\langle \overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_m} \rangle$.

Scegliamo 2 generatori di H $\overline{w_i}, \overline{w_j}$ $(i \neq j)$ e poniamo

$\overline{w_i'} = \overline{w_i} + a \cdot \overline{w_j}$ dove $a \in \mathbb{R}$

$H' = \mathcal{L}\langle \overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_{i-1}}, \overline{w_i'}, w_{i+1}, \dots, \overline{w_m} \rangle$

Allora $H' = H$

Dim. Supponiamo $i=1$ $j=2$ $H' \subseteq H$

$\overline{v}' \in H'$, $\overline{v}' = \lambda_1(\overline{w_1} + a\overline{w_2}) + \lambda_2 \overline{w_2} + \dots + \lambda_m \overline{w_m} = \lambda_1 \overline{w_1} + (\lambda_1 a + \lambda_2)\overline{w_2} + \dots + \lambda_m \overline{v_m} \Rightarrow \overline{v}' \in H$

$v \in H \Rightarrow \overline{v} = \lambda_1 \overline{w_1} + \lambda_2 \overline{w_2} + \dots + \lambda_m \overline{w_m} = \lambda_1 \overline{w_1} + \lambda_1 a \overline{w_2} - \lambda_1 a \overline{w_2} + \lambda_2 \overline{w_2} + \dots + \lambda_m \overline{v_m}$

$\lambda_1(\overline{w_1} + a\overline{w_2}) + (\lambda_2 - a\lambda_1)\overline{w_2} + \dots + \lambda_m \overline{v_m} \Rightarrow \overline{v} \in H$

Dunque $H = H' \Rightarrow \dim H = \dim H'$

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \quad R_2 \to R_2 + x R_1 \quad 1 + 2 \cdot x = 0 \quad x = -\frac{1}{2} \quad R_2 \to R_2 - \frac{1}{2} \cdot R_1$$

$$R_3 \to R_3 + x' R_1 \quad 3 + 2 \cdot x' = 0 \quad x' = -\frac{3}{2} \quad R_3 \to R_3 - \frac{3}{2} \cdot R_1$$

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\cdot 2 & 2 - \frac{1}{2}\cdot 1 & 1 \\ 3 - \frac{3}{2}\cdot 2 & 1 - \frac{3}{2}\cdot 1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{Vmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + x'' R_2 \quad -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x = 0 \quad x = \frac{1}{3} \quad R_3 \to R_3 + \frac{1}{3} \cdot R_2$

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} & 2 + \frac{1}{3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{Vmatrix}$$

Determinanti

Def. 3.2.1. $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

complemento algebrico o cofattore dell'elemento A_{ij} il numero

Es. 3.2.1. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$ $\quad a_{32} = 1 \quad A_{32} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix} = -(5+3) = -8$

1x1 $|a_{11}| = a_{11}$

2x2 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\det \|a_{ij}\| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Esempio:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$

Esercizio:

Determinare per quali valori di λ si annulla il seguente determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{(sviluppando da } a_{22}\text{)}$$

$$(1-\lambda) \cdot \big((3-\lambda)(-3-\lambda) - 4 \cdot (-2)\big) = (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 9 + 8) = (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1) =$$

$$(1-\lambda) \cdot (\lambda-1) \cdot (\lambda+1) = 0 \iff \lambda = -1 \text{ oppure } \lambda = 1$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 10 + 7 = -6$$

$$\det \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \det \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -24 - 80 + 56 = -48$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) di una matrice quadrata per i complementi algebrici dei corrispondenti elementi di un'altra riga (o colonna) è zero: infatti si otterrebbe lo sviluppo di un determinante con due righe (o colonne) uguali.

$$a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Def Data la matrice A di tipo (m, n) si definisce sottomatrice quadrata di ordine p ($\leq m, \leq n$) una matrice quadrata che si ottiene da A considerando gli elementi che appartengono contemporaneamente a p righe e p colonne fissate

---

MATRICE INVERSA

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad {}^tA = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

$$A' = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

EQUAZIONI VETTORIALI

$x_1 \overline{a_1} + x_2 \overline{a_2} + \dots + x_n \overline{a_n} = \overline{b}$ ove $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}, \overline{b} \in \mathbb{R}^m$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ sono scalari da determinare

Es. Passare dall'equazione vettoriale al sistema associato.

$\overline{a_1} = (2,2) \quad \overline{a_2} = (1,3) \quad \overline{a_3} = (1,1) \quad \overline{b} = (4,5)$

$x_1 (2,2) + x_2 (1,3) + x_3 (1,-1) = (4,5)$

$(2x_1, 2x_1) + (x_2, 3x_2) + (x_3, -x_3) = (4,5)$

$(2x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3) = (4,5)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Viceversa dato il sistema scrivere l'equazione vettoriale associata

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

$x\overline{a_1} + y\overline{a_2} + z\overline{a_3} = \overline{b}$

$\overline{b} = (1; -2; 4) \quad \overline{a_1} = (-2; 1; 1) \quad \overline{a_2} = (1; -2; 1) \quad \overline{a_3} = (1; 1; -2)$

Il sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

si può rappresentare in forma sintetica come prodotto di matrici (righe × colonne):

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Def. Si dice **rango** di un sistema di vettori $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m\}$ la dimensione dello spazio da essi generato, che coincide con il massimo numero di vettori linearmente indipendenti contenuto nel sistema.

Teor. di Rouché - Capelli (per le equazioni vettoriali)

L'equazione vettoriale

$$x_1\bar{a}_1 + \dots + x_n\bar{a}_n = \bar{b}$$

ha soluzioni se e solo se

$$\text{rango}\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} = \text{rango}\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{b}\}$$

Dim. Se l'equazione vettoriale è compatibile

$\exists$ una soluz. $x_1^0\bar{a}_1 + x_2^0\bar{a}_2 + \dots + x_n^0\bar{a}_n = \bar{b}$

quindi b è c.l. di $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$.

Proviamo $\mathcal{L}\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle = \mathcal{L}\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, \bar{b} \rangle$

Ovviamente $\mathcal{L}\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \rangle \subseteq \mathcal{L}\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, b \rangle$

Viceversa:

$\bar{x} \in \mathcal{L}\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{b} \rangle$ risulta

$$\bar{x} = \lambda_1\bar{a}_1 + \dots + \lambda_n\bar{a}_n + \mu\bar{b}$$

$$\bar{x} = \lambda_1\bar{a}_1 + \dots + \lambda_n\bar{a}_n + \mu(x_1^0\bar{a}_1 + \dots + x_n^0\bar{a}_n) =$$

$$(\lambda_1 + \mu x_1^0)\bar{a}_1 + \dots + (\lambda_n \cup x_n^0)\bar{a}_n \Rightarrow \bar{x} \in \mathcal{L}\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle$$

Supponiamo ora che

$$\text{rango}\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\} = \text{rango}\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, \bar{b}\} = r = \text{rango}\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r\}$$

$$\bar{b} = \mu_1\bar{a}_1 + \dots + \mu_r\bar{a}_r + 0\bar{a}_{r+1} + \dots + 0\bar{a}_n$$

$$\begin{cases} x_1 = \mu_1 \\ \dots \\ x_r = \mu_r \\ x_{r+1} = \mu_{r+1} = 0 \\ \dots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

TEORETA DI BINET

Siano A, B due matrici quadrate. Allora $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$

Esempio 3.2.2. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$

$$AB = \begin{Vmatrix} -2+0 & 1+2 \\ 4+0 & -2+3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$BA = \begin{Vmatrix} -2-2 & -4+3 \\ 0-2 & 0+3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}$$

$\det(A) = 7$ $\quad \det(AB) = -14$

$\det(B) = -2$ $\quad \det(BA) = -14$

$A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice invertibile se $\exists$ una matrice inversa di A, che si indica con A^{-1}, tale che $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.

Teor. Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ sia invertibile è che $\boxed{\det A \neq 0}$

Dim. Se A è invertibile $\exists A^{-1}$ tale che $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ per il teorema di Binet $\det(A^{-1} \cdot A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A) = \det I = 1$. Allora necessariamente $\det(A) \neq 0$, poiché $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Ora, se $\det A \neq 0$, sia:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad A' = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

ovvero A' è la trasposta dei determinanti dei complementi algebrici dei termini di A'

Si ha ora:

$$AA' = \begin{Vmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn} \end{Vmatrix} =$$

(gli elementi non nella diagonale principale sono 0 per il teorema di Laplace)

$$AA' = \begin{Vmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{Vmatrix} = (\det A)^n \cdot I_n$$

$$\frac{AA'}{(\det A)^n} = I_n$$

$$A^{-1} = \frac{A'}{(\det(A))^n} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{Vmatrix}$$

Oss. Se si sa che la matrice A è invertibile (i.e. $\det A \neq 0$) allora basta una delle 2 verifiche $A \cdot B = B \cdot A = I$ per determinare l'inversa A^{-1}

Infatti, supponiamo sia $A \cdot B = I$. Si ha $B \cdot A = (A^{-1} \cdot A) \cdot B \cdot A = A^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot A =$
$(A^{-1} I) \cdot A = A^{-1} \cdot A = I$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$\det A = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-4) = 8 \neq 0$$

$$^tA = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \qquad A_{11} =$$

EQUAZIONI VETTORIALI : SECONDA PARTE

Teorema di Rouché - Capelli per i sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$ è equivalente

all'equazione vettoriale $x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = \bar{b}$

dove $\bar{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{m1})$

$\dots$

$\bar{a}_n = (a_{1n}, \dots, a_{mn})$

$\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$

Il sistema lineare ha soluzioni se e solo se rango $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ = rango $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, \bar{b}\}$

rango $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ = rango della matrice A dei coefficienti

rango $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{b}\}$ = rango della matrice completa B

Oss. Si ha una sola soluzione se il numero delle incognite è uguale al rango r delle 2 matrici: quella dei coefficienti e quella completa. Se le m equazioni sono più di r, allora $m-r$ equazioni sono combinazioni lineari delle rimanenti e si possono trascurare. Si ottiene un sistema di r equazioni ~~ed~~ r incognite avente la matrice A quadrata con det diverso da zero che si dice sistema di Cramer.

Regola di Cramer

n equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{Vmatrix} \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

$\boxed{AX = B}$ in notazione matriciale

A invertibile $\iff$ $\det A \neq 0$ $\exists A^{-1}$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \rightarrow I_n X = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{\det A}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n)$$

$$\dots\dots$$

$$x_n = \frac{1}{\det A}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n)$$

Es. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{1}{-5} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-14}{-5} = \frac{14}{5}$$

$$x_2 = \frac{1}{-5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

$$x_1 = \frac{14}{5}, \quad x_2 = -\frac{1}{5}$$

Sistemi lineari di 2 equazioni in 3 incognite.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{Vmatrix}$$

1) rango $A = 2$ rango $B = 2$ è compatibile

Es. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1 \neq 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = x_3 + 1 \\ 5x_1 + 8x_2 = -2x_3 + 3 \end{cases}$$

$$x_1 = \begin{vmatrix} x_3+1 & 3 \\ -2x_3+3 & 8 \end{vmatrix} = 14x_3 - 1$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 2 & x_3+1 \\ 5 & -2x_3+3 \end{vmatrix} = -9x_3 + 1$$

$x_1 = 14t - 1 \qquad x_2 = -9t + 1 \qquad x_3 = t$

2) rango $A = 1$ rango $B = 1$ $\quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 - 21x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$x_1 = h \qquad x_2 = k \qquad x_3 = 2h - 7k - 1$

3) rango $A = 1$ rango $B = 2$ $\quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$

sistema incompatibile per il teorema di Rouché-Capelli

Sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ESERCIZI

- Determinare il rango della seguente matrice:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

Abbiamo trovato una sottomatrice 3×3 con $\det \neq 0$, quindi il rango è 3.

$\{\mathbb{R}^4, +, \cdot\}$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$H = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 = 2a_2\} \qquad H = \{(2a_2, a_2, a_3, a_4)\}$

H è sottospazio vettoriale? $\qquad \bar{v} = (2b_2, b_2, b_3, b_4)$

$\bar{u} + \bar{v} = (2(a_2 + b_2), a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4) \in H$

$\lambda \bar{u} = (\lambda 2a_2, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4) \in H$

$(2a_2, a_2, a_3, a_4) = (2a_2, a_2, 0, 0) + (0, 0, a_3, 0) + (0, 0, 0, a_4) =$

$a_2 (2, 1, 0, 0) + a_3 (0, 0, 1, 0) + a_4 (0, 0, 0, 1)$

$H = \mathcal{L}\langle (2, 1, 0, 0) \quad (0, 0, 1, 0) \quad (0, 0, 0, 1) \rangle \qquad \dim H = 3 \quad (\text{sono l.i.})$

$M_{2,2}(\mathbb{R})$

$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a = c,\ d = 1 \right\}$ Non è sottospazio: infatti $(a, b; a, 1)$ non permette di ottenere il vettore nullo, quindi $0_1 \notin K$, e K non è sottospazio.

$R_3[x]$ $\quad \bar{v} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ $\quad$ grado ≤ 3

$H = \left\{ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) / a_0 + a_1 = a_2 \right\}$ è sottospazio vettoriale?

$H = \left\{ \bar{v} (a_0 + a_1 x + (a_0 + a_1) x^2 + a_3 x^3) \right\}$

$\bar{v} = b_0 + b_1 x + (b_0 + b_1) x^2 + b_3 x^3$

$\bar{u} + \bar{v} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_0 + a_1 + b_0 + b_1) x^2 + (a_3 + b_3) x^3$

$\lambda \bar{v} = \lambda b_0 + \lambda b_1 x + (\lambda b_0 + \lambda b_1) x^2 + \lambda b_3 x^3$

CONICHE



e eccentricità ≥ 0

Conica

$\left\{ P \in \mathbb{R}^2 / \frac{PF}{d(P,d)} = e \right\}$

$F(c; 0)$ $\quad$ d: $x = h$

$\frac{PF}{PH} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x-h|} = e$

$\frac{(x-c)^2 + y^2}{(x-h)^2} = e^2$

$(1-e^2) x^2 + y^2 - 2(c - e^2 h) x + c^2 - e^2 h^2 = 0$

Se $F \in d$, allora $c = h$ e quindi l'equazione diventa:

$(1-e^2) x^2 + y^2 + 2c(1-e^2) x + c^2 (1-e^2) = 0$

$(1-e^2)(x-c)^2 + y^2 = 0$

Se $1 - e^2 > 0 \rightarrow e^2 < 1$ allora $x = c$, $y = 0$, c'è solo $F(c; 0)$

Se $1 - e^2 = 0 \rightarrow e^2 = 1$ allora $y^2 = 0$ e degenera nell'asse x

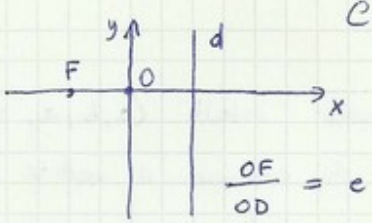
Se $1 - e^2 < 0 \rightarrow e^2 > 1$ allora $y^2 = -(1-e^2)(x-c)^2 = (e^2-1)(x-c)^2$

$y = \pm (x-c) \cdot \sqrt{e^2 - 1}$ due rette distinte che si incontrano in $F(c; 0)$

Se $F \notin d$, allora $c \neq h$

C simmetrica rispetto a O

$e^2 \neq 1$



$c - e^2 h = 0$

$\frac{OF}{OD} = e^2$

viene scelta l'origine in modo tale che ne risulti questa uguaglianza

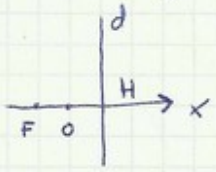
$$\frac{x^2}{c^2/e^2} + \frac{y^2}{c^2(1-e^2)/e^2} = 1$$

$e < 1$ $\quad b^2 = \frac{c^2(1-e^2)}{e^2}$ $\quad a^2 = \frac{c^2}{e^2}$ $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ellisse

$e > 1$ $\quad b^2 = \frac{c^2(e^2-1)}{e^2}$ $\quad a^2 = \frac{c^2}{e^2}$ $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Iperbole

$e^2 = 1$ $\quad e = 1$

Parabola è il luogo dei punti equidistanti da fuoco e direttrice



$y^2 - 2(c-h)x + c^2 - h^2 = 0$

Per annullare il termine noto, $c = h$ o $c = -h$;

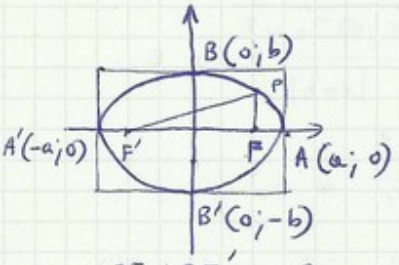
il primo caso non è possibile, altrimenti si degenera, nel secondo caso si ottiene: $y^2 + 4cx = 0$

Ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a^2 + b^2 = c^2$

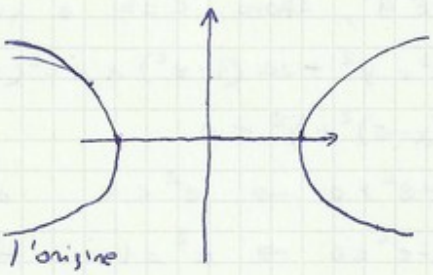
$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$



$PF + PF' = 2a$

Iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$



$|PF - PF'| = 2a$

Intersezione con rette passanti per l'origine

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases}$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2x^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{x^2(b^2 - a^2m^2)}{a^2b^2} = 1$

se $b^2 - a^2m^2 > 0$ e sol. reali distinte

se $b^2 - a^2m^2 = 0$ $\quad m = \pm \frac{b}{a}$ asintoti

Equazione dell' ellisse di fuochi $F_1(0;0)$ $F_2(4;4)$ $FP + PF' = 8a$
e semiasse maggiore $4 = a$

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} = 8$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = 64 + x^2 + y^2 - 16\sqrt{x^2+y^2}$$
$$16\sqrt{x^2+y^2} - 8x - 8y - 32 = 0$$
$$2\sqrt{x^2+y^2} = x + y + 4$$
$$4x^2 + 4y^2 = x^2 + y^2 + 16 + 2xy + 8x + 8y$$
$$-3x^2 - 3y^2 + 16 + 2xy + 8x + 8y = 0$$
$$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8x - 8y - 16 = 0$$

SISTEMI LINEARI

Casi particolari

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \qquad A=\begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix} \qquad B=\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{Vmatrix}$$

I caso: rango $A=2$

Si ha rango $B=2$, poiché rango $A \le$ rango $B \le 2$ (le matrici hanno 2 righe), e per il teorema di Rouché-Capelli ci sono ∞^1 soluzioni.

Es. Dato il sistema

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1 \\ 5x_1+8x_2+2x_3=3 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 16-15=1$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=1+x_3 \\ 5x_1+8x_2=3-2x_3 \end{cases}$$

$$x_1=\begin{vmatrix} 1+x_3 & 3 \\ -2x_3+3 & 8 \end{vmatrix} = 8x_3+8+6x_3-9=14x_3-1$$

$$x_2=\begin{vmatrix} 2 & x_3+1 \\ 5 & -2x_3+3 \end{vmatrix} = -4x_3+6-5x_3-5=-9x_3+1$$

$$\begin{cases} x_1=14t-1 \\ x_2=-9t+1 \\ x_3=t \end{cases}$$

II caso: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ rango $A=$ rango $B=1$

Per il teorema di Rouché-Capelli ci sono ∞ soluzioni

Es. $\begin{cases} 2x_1-7x_2-x_3=1 \\ 6x_1-21x_2-3x_3=3 \end{cases}$

Soluzioni: $x_1=h \quad x_2=k \quad x_3=2h-7k-1$

III caso: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$ rango $A=1$ rango $B=2$

Per il teorema di Rouché-Capelli non ci sono soluzioni

Es. $\begin{cases} 2x_1-7x_2-x_3=1 \\ -6x_1+21x_2+3x_3=4 \end{cases}$

Esempio:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=2 \\ 3x_1+x_2-2x_3=-1 \end{cases} \qquad \det A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

$$\begin{cases} x_1=10/7 \\ x_2=-9/7 \\ x_3=-2 \end{cases}$$

Il sistema lineare $AX = B$ si dice ridotto se la matrice A è ridotta per righe.

Es. $\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 2y - z = 2 \\ z = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 3 \end{cases}$

$$A = \left\| \begin{matrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Def. Due sistemi di equazioni lineari si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Prop. Le trasformazioni elementari:

1) scambiare fra loro due equazioni
2) moltiplicare primo e secondo membro di un'equazione per uno stesso scalare non nullo
3) sostituire un'equazione con quella ottenuta sommando ad essa un'altra equazione moltiplicata per una costante

trasformano un sistema lineare in un sistema equivalente

Dim.

$$A = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + k(a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p) = b_2 + k \cdot b_1 \end{cases}$$

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p)$ soluz di $A \Rightarrow$ soluz del II sistema

Viceversa se $(x_1', \dots, x_p')$ ...

Es.

$$\left\| \begin{matrix} 3 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \end{matrix} \right\| \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \end{matrix} \right\|$$

$R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_1$

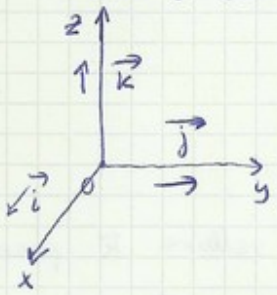
$$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & -7 & -16 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \end{matrix} \right\| \qquad R_3 \to R_3 - 3R_1 \qquad \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & -7 & -16 \\ 0 & 5 & -11 & -26 \end{matrix} \right\|.$$

$R_3 \to R_3 - \frac{5}{3} R_2$

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & -7 & -16 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right\|$$

$$\begin{cases} 3x+2y-2z=-2 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+3z=8 \end{cases} \to \begin{cases} x+y+3z=8 \\ 3y-7z=-16 \\ \frac{2}{3}z=\frac{2}{3} \end{cases} \to \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=1 \end{cases}$$

SPAZIO e GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO



$P(x,y,z) \longleftrightarrow P-O = x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$

in $j = k$

$P_1 - P_2 = (P_1-O) - (P_2-O) = (x_1-x_2)\bar{i} + (y_1-y_2)\bar{j} + (z_1-z_2)\bar{k}$

$P-P_0 = t\bar{v} \quad t \in \mathbb{R} \qquad P-P_0 \parallel \bar{v}$ $\quad \underline{P_0 \quad P}$

$P_0(x_0,y_0,z_0) \qquad \bar{v} = l\bar{i}+m\bar{j}+n\bar{k}$

$(x-x_0)\bar{i} + (y-y_0)\bar{j} + (z-z_0)\bar{k} = tl\bar{i} + tm\bar{j} + tn\bar{k}$

$$\begin{cases} x-x_0 = lt \\ y-y_0 = mt \\ z-z_0 = nt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0+lt & l \neq 0 \\ y = y_0+mt & m \neq 0 \\ z = z_0+nt & n \neq 0 \end{cases} \qquad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

Retta per $P_1(x_1,y_1,z_1) \quad P_2(x_2,y_2,z_2)$

Retta per $P_1(x_1,y_1,z_1)$ e $\parallel$ al vettore P_2-P_1 (oppure P_1-P_2)

$$\begin{cases} x-x_1 = t(x_2-x_1) & x_2 \neq x_1 \\ y-y_1 = t(y_2-y_1) & y_2 \neq y_1 \\ z-z_1 = t(z_2-z_1) & z_2 \neq z_1 \end{cases} \qquad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Retta per 2 punti $A(2,3,-3) \quad B(3,4,0)$ = retta per $A(2,3,-3)$ parallela a $B-A = (1,1,3)$

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \\ z = -3+3t \end{cases}$$

Individuano un piano

- 3 punti
- una retta che giace nel piano e un punto
- un punto e un vettore ortogonale
- un punto e 2 vettori complanari

- $P-P_0 \perp \bar{n} \qquad (P-P_0)\cdot\bar{n} = 0$

$P_0(x_0,y_0,z_0) \qquad \bar{n} = a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$

$P-P_0 = (x-x_0)\bar{i} + (y-y_0)\bar{j} + (z-z_0)\bar{k}$

$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$

retta $\perp$ piano

$\bar{r}(l,m,n)$ $\bar{n}(a,b,c)$ $\qquad \frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$

retta // piano $\qquad al + bm + cn = 0$

Es. Piano $P_0(2,-3,2)$

$\perp$ al vettore $\bar{n} = 2\bar{\imath} + 5\bar{\jmath} + \bar{k}$

$2(x-2) + 5(y+3) + 1(z-2) = 0$

$2x + 5y + z + 9 = 0$

In particolare il piano (x,y) è ortogonale al vettore $\bar{k}$ passa per l'O $(0,0,0)$ $\qquad 0(x-0) + 0(y+0) + 1(z-0) \qquad z = 0$

- piano per un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ e // ai vettori $\bar{v}$ e $\bar{w}$

$(P-P_0) \cdot \bar{v} \wedge \bar{w} = 0 \qquad \bar{v} = l\bar{\imath} + m\bar{\jmath} + n\bar{k}$

$\bar{w} = l'\bar{\imath} + m'\bar{\jmath} + n'\bar{k}$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

Es. $P_0(-1,-1,1) \qquad \bar{v} = \bar{\imath} + \bar{\jmath} - \bar{k} \qquad w = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (y+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$2(x+1) - (y+1) + (z-1) = 2x+2-y-1+z-1 = 0 \rightarrow 2x - y + z = 0$

- piano per tre punti $\qquad A(x_0,y_0,z_0) \qquad B(x_1,y_1,z_1) \qquad C(x_2,y_2,z_2)$

$(P-A) \cdot (B-A) \wedge (C-A) = 0$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Es. $\qquad A(1,2,3) \qquad B(1,0,2) \qquad C(0,0,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1-1 & 0-2 & 2-3 \\ 0-1 & 0-2 & 1-3 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 2x + y - 2z + 2 = 0$$

Parallelismo fra rette

$r: P - P_0 = t\bar{u} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \bar{u} = (l, m, n)$

$s: P - P_1 = k\bar{v} \quad k \in \mathbb{R} \qquad \bar{v} = (l', m', n')$

$$\bar{u} \parallel \bar{v} \iff \frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$$

$$u \perp v \iff u \cdot v = 0 \iff ll' + mm' + nn' = 0$$

$$r: \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 5+3t \\ z = -5-2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1-3t \\ y = 5-3t \\ z = -7+2t \end{cases}$$

$$r: \frac{x-4}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+5}{-2} \qquad s: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+7}{2}$$

$\bar{r} = (3, 3, -2) \qquad \bar{s} (-3, -3, 2)$

$$p: \begin{cases} x = 4+4t \\ y = 1+0t \\ z = 2+6t \end{cases} \qquad \bar{p} (4; 0; 6)$$

$$\begin{cases} \frac{x-4}{4} = \frac{z-2}{6} \\ y-1 = 0 \end{cases} \qquad \bar{r} \cdot \bar{p} = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 6 = 0$$

Parallelismo fra piani:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Ortogonalità fra piani:

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

$\alpha_1: 2x - y + 3z + 8 = 0$

$\alpha_2: 3x - 2z = 0$

$\alpha_3: 4x - 2y + 6z + 20 = 0$

$\alpha_4: -2x + y - 3z - 8 = 0$

$\alpha_1 \parallel \alpha_2$? No, infatti $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{-2}$ $\qquad \alpha_1 \parallel \alpha_3$? sì $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6}$

$a_1 \perp a_2$? sì $\quad 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = 0$

Es. Trovare due piani aventi per intersezione la retta $r: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -3+t \\ z = -1+3t \end{cases}$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} \\ \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{3} \end{cases}$$

Parametri direttori di una retta

$A \in r,\ B \in r \Rightarrow B - A$

retta per

$A\ (-1, 1, 0) \qquad B\ (27, -17, 2) \qquad B - A = (28, -18, 2) \simeq p\ (14, -9, 1)$

Condurre per $P(1,2,3)$ la retta ortogonale alle rette

$$r \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s = \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{n}$$

$$\begin{cases} l + 0 + 0 = 0 \\ m = 0 \end{cases}$$

retta cercata $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$

Es. Verificare che le rette

$$r: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t + 1 \\ z = -t + 4 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$$ sono incidenti

$$\begin{cases} x = z - 1 \\ y = z + 1 \\ z - 1 = t + 1 \\ z + 1 = 3t + 1 \\ z = 4 - t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z + 1 \\ z = t + 2 \\ z = 3t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad 3t = t + 2 \rightarrow t = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ t = 1 \\ z = 3 \\ z = 3 \end{cases}$$

Fasci di piani

$\pi: \ ax + by + cz + d = 0$

$\pi': \ a'x + b'y + c'z + d' = 0$

c.l. $\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0$

Gli eventuali punti in comune soddisfano $\lambda(0) + \mu(0) = 0$

Es. Determinare il piano che passa per la retta $r: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ e per il punto $Q\ (1; 2; -1)$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = t$$

$$r \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\lambda(2x - y - z) + \mu(3y - 2z) = 0$$

$\lambda(2-2-2) + \mu(6+2) = 0$

$-2\lambda + 8\mu = 0$

$\begin{cases} \lambda = 4 \\ \mu = 1 \end{cases}$

$4(2x-y-2) + 1(3y-2z) = 0$

Es. Determinare il piano per tre punti

Fasci impropri di piani

$ax+by+cz+k=0$ insieme dei piani paralleli al piano di equazione $ax+by+cz+d=0$

Ortogonalità e parallelismo retta-piano

$$r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad \pi: ax+by+cz+d=0$$

$r \parallel \pi \iff \bar{r} \perp \bar{n} \iff \bar{r} \cdot \bar{n} = 0 \iff al+bm+cn = 0$

$r \perp \pi \iff \bar{r} \parallel \bar{n} \iff \bar{r} = k \cdot \bar{n} \iff \frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$

Intersezione retta-piano:

$ax+by+cz+d=0$

$a(x_0+lt) + b(y_0+mt) + c(z_0+nt) + d = 0$

$\underbrace{ax_0+by_0+cz_0+d}_{B} + \underbrace{(al+mb+cn)}_{A} \cdot t = 0$

Se $A \neq 0$, $At+B=0$ diventa $t = -\frac{B}{A}$

Se $A=0$, $B=0$ ci sono infinite soluzioni. → parallelismo con coincidenza

Se $A=0$, $B \neq 0$ non ci sono soluzioni → parallelismo con distinzione

Es.: Determinare le equazioni della retta passante per $P(1,-1,2)$ perpendicolare ed incidente la retta $r \begin{cases} x-z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$

Il punto generico di r è $R(t,0,t)$, poichè dalle due equazioni di r si ricava $x=z$, $y=0$. Imponendo la condizione di perpendicolarità $ll' + mm' + nn' = 0$ si ricava la retta cercata

Es.: Date le rette $r \begin{cases} x = t+1 \\ y = t \\ z = t+3 \end{cases}$ ed $s \begin{cases} x+y-z+5=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ ed il punto $P(1,0,2)$

determinare il piano P e parallelo ad entrambe le rette.

$\bar{r}(1,1,1)$ $\qquad \bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k}$

L'equazione del piano $\bar{e}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x - 2y + z + 1 = 0$$

In alternativa:

$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$a(x-1) + by + c(z+2) = 0$

$r \parallel \pi \quad al + bm + cn = 0$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Def. 7.12.1 Due rette si dicano <u>sghembe</u> se non sono complanari.
In questo caso non sono parallele e non hanno punti in comune.

Es. asse z $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ retta r $\begin{cases} z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

$(0,0,1)$ $\qquad$ $(1,-1,0)$

$$\begin{cases} x = ot \\ y = ot \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -k - 1 \\ y = k \\ z = ok \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$ che non ha soluzioni

Dato un punto fisso $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e una misura r

$P(x,y,z) \qquad \|P - C\|^2 = r^2$

$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2}$ equazione della superficie sferica

Distanza di un punto da un piano: $d(P_0, \pi) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Distanza punto - retta:

Es. 7.13.5

Calcolare la distanza di $P(1,2,0)$ dalla retta $r \begin{cases} x = y + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$

$$r \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases} \qquad (l,m,n) \simeq (1,1,-1)$$

$r \perp \pi \quad \frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$

$x + y - z + d = 0$ ponendo $a = l$, $b = m$, $c = n$

Imponendo il passaggio per $P(1, 2, 0)$ si ottiene $d = -3$

Facendo l'intersezione tra la retta e il piano si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x = y + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione la terna $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$.

Dunque il punto H della retta tale che $\overline{PH} \perp r$ è $(2, 1, 0)$, e la distanza di P da r è quindi uguale a $\sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

Es. VII.18

Calcolare la distanza di $P(2, 3, -1)$ dalla retta $r \begin{cases} x = 2z \\ y = z + 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = r^2 \\ x = 2z \\ y = z + 2 \end{cases}$$

$(2z-2)^2 + (z-1)^2 + (z+1)^2 = r^2$

$4z^2 - 8z + 4 + z^2 - 2z + 1 + z^2 + 2z + 1 - r^2 = 0$

$6z^2 - 8z + (6 - r^2) = 0$

Si impone $\Delta = 0$

$64 - 4 \cdot 6 \cdot (6 - r^2) = 0$

$64 - 24 \cdot (6 - r^2) = 0$

$64 - 144 + r^2 = 0$

$r^2 = 80$

$r = 4\sqrt{5}$

Stesso esercizio, ma con un metodo differente.

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t + 2 \\ z = t \end{cases} \qquad (l, m, n) \sim (2, 1, 1)$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$\frac{x-2}{2-2t} = \frac{y-3}{3-t-2} = \frac{z+1}{-1-t} \qquad \frac{x-2}{2-2t} = \frac{y-3}{1-t} = \frac{z+1}{-1-t}$$

$2(2-2t) + (1-t) + (-1-t) = 0 \qquad 4 - 6t = 0 \qquad t = \frac{2}{3}$

$H\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$

- Equazione della retta r passante per $P(1;3;2)$, parallela al piano $\pi: x-2y+z=0$ ed $\perp$ alla retta $s: x=y=3z$

Il piano al quale appartiene r ha generica equazione $x-2y+z+d=0$ (poiché è parallelo a π) da cui sostituendo a x,y,z le coordinate di P risulta $d=3$. Dunque r appartiene al piano di equazione $x-2y+z+3=0$

Scriviamo s in forma parametrica. $s: \begin{cases} x=3t \\ y=3t \\ z=t \end{cases}$, s ha parametri direttori $(3;3;1)$; si può individuare un secondo piano a cui appartiene r imponendo la condizione:

$$\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$$

$$3(x-x_0)+3(y-y_0)+(z-z_0)=0$$

$$3(x-1)+3(y-3)+(z-2)=0$$

$$3x-3+3y-9+z-2=0$$

$$3x+3y+z-14=0$$

Dunque $r: \begin{cases} 3x+3y+z-14=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$

In alternativa si può scrivere la retta in forma scalare:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

che diventa:

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y-3}{m}=\frac{z-2}{n}$$

e trovare i parametri direttori imponendo la condizione $ll'+mm'+nn'=0$

$r: \frac{x-1}{-5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{9}$ svolgendo tutti i passaggi

- Determinare l'equazione della retta s per $P(1;2;3)$ $\perp$ e incidente la retta r di equazione $x=y=2z$

π_1 per P $\perp$ a r: $\begin{cases} x=2k \\ y=2k \\ z=k \end{cases} \rightarrow (2,2,1)$ $\quad 2x+2y+8z+d=0 \quad 2+4+3+d=0 \rightarrow d=-9$

π_2 : $r: \begin{cases} x=y \\ y=2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$

LA SFERA

Una sfera di centro $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e raggio r ha equazione:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$$

Per esempio, l'equazione della sfera di centro $C(1; 0; -2)$, passante per $Q(1; 3; 2)$ ha equazione $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$, poiché il suo raggio è 5

L'equazione della sfera di centro C e tangente al piano $\pi: x+2y+z-1=0$

$$r = d(C;\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1\cdot 1 + 2\cdot 0 - 1\cdot 2 - 1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\text{eq: } (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Sviluppando i calcoli dell'equazione della sfera si ottiene:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$$
$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 + z^2 - 2\gamma z + \gamma^2 - r^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$a = -2\alpha \quad b = -2\beta \quad c = -2\gamma$
$d = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2$

sfera di centro $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$

$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - d =$
$\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) - d \geq 0$
altrimenti si ottiene l'insieme vuoto

- Determinare l'equazione della sfera tangente alla sfera

$$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z - 3 = 0$$

nel suo punto $P(1; 2; 0)$ e passante per l'origine

Sia il punto $P: (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 0$, ovvero: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 5 = 0$. Appartiene al fascio una qualsiasi combinazione lineare di P ed Σ, in particolare la loro differenza, che è un piano di equazione $\pi: y - 2z - 2 = 0$. Ponendo $\lambda\Sigma + \mu\pi$ otteniamo che il fascio costituito da tutte le sfere tangenti alla sfera data in $P(1; 2; 0)$ ha equazione:

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z - 3) + \mu(y - 2z - 2) = 0$$

Sostituendo $x = y = z = 0$, per imporre il passaggio per l'origine, otteniamo:

$$-3\lambda + 2\mu = 0$$

Dunque $\lambda = -2$, $\mu = 3$, e sostituendo si trova l'equazione cercata.

- Determinare l'equazione della sfera tangente al piano $\pi: x + y - 2z + 1 = 0$ nel suo punto $P(-1, 0, 0)$ e passante per $Q(1, 2, 1)$

$$(x+1)^2 + y^2 + z^2 + k(x + y - 2z + 1) = 0$$

Imponendo il passaggio per Q si trova k e quindi l'equazione cercata

Potenza di un punto rispetto ad una sfera:

$\Sigma: x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\delta=0$

$P_0(x_0,y_0,z_0) \qquad C(\alpha,\beta,\gamma)$

$d^2(P_0,C) = (x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2+(z_0-\gamma)^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2-2\alpha x_0-2\beta y_0-2\gamma z_0+\alpha^2+\beta^2+\gamma$

$x_0^2+y_0^2+z_0^2-2\alpha x_0-2\beta y_0-2\gamma z_0+\delta \begin{cases} >0 \\ =0 \\ <0 \end{cases}$ $\qquad P_0 \in \Sigma$

$d^2(P_0,C)-r^2>0 \qquad P_0$ è esterno a Σ

$d^2(P_0,C)-r^2<0 \qquad P_0$ è interno a Σ

- Data $\Sigma: x^2+y^2+z^2-2z-3=0$

  e la retta di equazioni $x-1=y-2=0$

  (i) verificare che la retta è esterna
  (ii) scrivere le equazioni dei piani passanti per la retta e tangenti a Σ:

(i) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2z-3=0 \\ x=1 \\ y=2 \end{cases}$

$\begin{cases} 1+4+z^2-2z-3=0 \\ x=1 \\ y=2 \end{cases}$

$\begin{cases} z^2-2z+2=0 \\ x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Si ha $\Delta(z^2-2z+2) = 4-8=-4<0$, quindi la retta è esterna.

(ii) piani per r tangenti a Σ

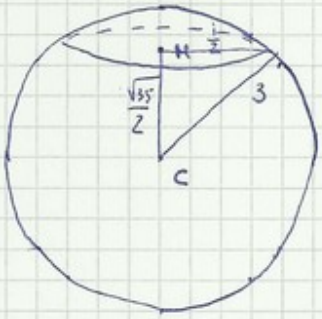
$h(x-1)+k(y-2)=0 \qquad hx+ky-h-2k=0 \qquad C(0,0,1) \qquad r=\sqrt{1+3}=2$

$d(C,\pi)=2$

$\dfrac{|1-h-2k|}{\sqrt{h^2+k^2}}=2 \qquad \dfrac{(h+2k)^2}{h^2+k^2}=4$

- Data la sfera $\Sigma: x^2+y^2+z^2-9=0$ ed il suo punto $V(1; 2\sqrt{2}; 0)$ determinare l'equazione del piano perpendicolare alla congiungente cv e che forma con la sfera una circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$.

$V - C = (1, 2\sqrt{2}, 0)$



$x + 2\sqrt{2}\,y \pm \frac{3}{2}\sqrt{35} = 0$

Infatti

$x + 2\sqrt{2}\,y + h = 0$

$HC = \sqrt{9 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{35}{4}} = \frac{\sqrt{35}}{2}$ $\qquad d(C, \pi_h) = \frac{\sqrt{35}}{2}$

- Dati i punti $A(2,0,0)$ $B(3,2,-1)$ $C(-2,1,1)$ scrivere le equazioni della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

Piano per ABC

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$3(x-2) - y(-3) + z(9) = 0$

$(x-2) + y + 3z = 0$

$x + y + 3z - 2 = 0$

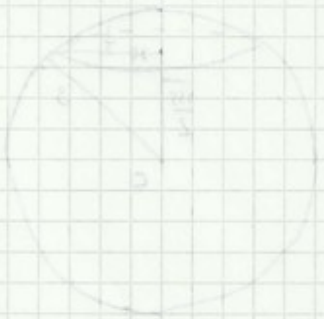
Sfera per ABC:

$\Sigma(A): \quad 2^2 - 2\alpha \cdot 2 + d = 0$

$\Sigma(B): \quad 9 + 4 + 1 - 2\alpha \cdot 3 - 2\beta \cdot 2 + 2\gamma + d = 0$

$\Sigma(C): \quad 4 + 1 + 1 - 2\alpha \cdot (-2) - 2\beta - 2\gamma = 0$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 14 - 6\alpha - 4\beta + 2\gamma = 0 \\ 6 + 4\alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2+y^2-x-3y=0 \\ x^2+y^2-4y=0 \end{cases}$$

$$-x+y=0$$

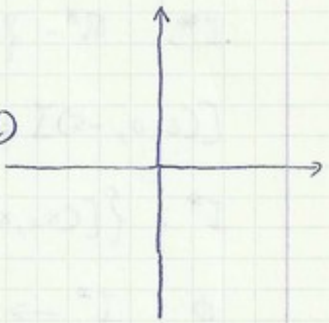
$$x=y$$

$$y^2+y^2-y-3y=0$$

$$2y^2-4y=0$$

$$y=0 \quad \vee \quad y=2$$

$P(0;0)$ $\qquad$ $P'(2;2)$



Eq. della parabola di vertice $(0,0)$ e fuoco $(2,2)$

direttrice $\perp \quad y=x \qquad x-y=0$

$x+y+k=0$; poiché passa per $(-2;-2)$ diventa $x+y+4=0$

$$FP=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$$

$$d(P,d)=\frac{|x+y+4|}{\sqrt{2}}$$

$$(x-2)^2+(y-2)^2=\frac{(x+y+4)^2}{2}$$

$$2(x^2-4x+4+y^2-4y+4)=x^2+y^2+16+2xy+8x+8y$$

$$2x^2+2y^2-8x-8y+16=x^2+y^2+2xy+8x+8y+16$$

$$x^2+y^2-2xy-16x-16y=0$$

$$x^2+y^2+2x+2y-6=0$$

$P(1;1)$

1) retta tg a σ in $P \qquad x+y-2=0$

infatti $\quad xx_0+yy_0+(x+x_0)+(y+y_0)-6=0$

$$x+y+x+1+y+1-6=0$$

$$2x+2y-4=0$$

Eq. della circonferenza tangente a σ in P, passante per O e appartenente al fascio $\begin{cases} \sigma \\ r \end{cases}$

$$\lambda(x^2+y^2+2x+2y-6)+\mu(x+y-2)=0$$

Sostituendo $(0;0)$ poiché passa per O si ottiene:

$$-6\lambda-2\mu=0 \qquad \lambda=1 \quad \mu=-3$$

$$x^2+y^2+2x+2y-6-3x-3y+6=x^2+y^2-x-y=0$$

Eq. della conica di direttrice r, $F(3,3)$, $e=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$

$$\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}}{\frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad 3x^2+3y^2-2xy-20x-20y+68=0$$

$\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \quad \begin{matrix} x_1 = \lambda y_1 \\ x_2 = \lambda y_2 \\ x_3 = \lambda y_3 \end{matrix}$

relazione di equivalenza

$I^*: \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} / \sim \}$

$[(2,0,-5)] = \{(2\lambda, 0, -5\lambda) / \lambda \in \mathbb{R}^*\}$

$I^*: \{[(x_1, x_2, x_3)] / x_3 = 0\}$

$\phi: I^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$[(x_1, x_2, x_3)] \longrightarrow \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$

ben definita, iniettiva e suriettiva:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \phi((x,y)) = [(x,y,1)]$

$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0$

$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$

Sia $x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$

Retta: $ax + by + c = 0$

$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$

$2x - y - 3 = 0 \longrightarrow 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$

$x_3 = 0$ retta all'infinito.

$2x_1 - x_2 - 3x_3 \qquad x_3 \neq 0$ retta $2x - y - 3 = 0$

$x_3 = 0 : \begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 = x_2 \end{cases}$ punto all'infinito $(1,2,0)$

punto del piano (x_0, y_0): $(x_0, y_0, 1)$ oppure $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$

punto all'infinito: $(p', p'', 0)$.

Retta $ax + by + c = 0 \rightarrow ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ punto all'infinito $P_\infty (-b, a, 0)$

Ellisse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0$

$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 0 \notin I$

Non ci sono punti all'infinito

Parabola: $x = 2py^2$

$\begin{cases} x_1 x_3 = 2p x_2^2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow 2p x_2^2 = 0 \rightarrow x_2^2 = 0$ i due rami si intersecano

$x_2 = 0$ nel punto all'infinito x_0

Iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0$$

$$x_1^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot x_2^2$$

asintoti $y = \pm \frac{b}{a} x$ $\qquad x_1 = \pm \frac{a}{b} x_2$

$\gamma \cap r_\infty = \{A, B\}$

$A = \left(\frac{a}{b} x_2, x_2, 0\right) = (a, b, 0)$

$B = \left(-\frac{a}{b} x_2, x_2, 0\right) = (-a, b, 0)$

- $2x^2 + y^2 - 3x + y - 5 = 0$

Determinare il tipo di conica.

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 x_3 + x_2 x_3 - 5x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$2x_1^2 + x_2^2 = 0$

no punti all'∞ $\rightarrow$ ellisse

- $2x^2 + xy - y^2 + x + y - 3 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_1 x_2 - 2x_2^2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 3x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$2x_1^2 + x_1 x_2 - 2x_2^2 = 0$

$2 \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \frac{x_1}{x_2} - 1 = 0$

$\frac{x_1}{x_2} = -1 \quad \vee \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$

C $\quad a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0$

Si definisce punto doppio di C un punto P le cui coordinate (x_1, x_2, x_3) sono soluzioni non tutte nulle del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3} \end{cases} \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = 0 \end{cases}$$

$a_{21} = a_{12}$

$a_{32} = a_{23}$

$a_{31} = a_{13}$

$\exists$ sol $\iff$ $\exists$ p. doppi $\iff$ C degenere $\iff$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 4y = 0$ $\qquad x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$

$x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -2 \\ 3/2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6+6-8-4 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 2x_3 = 0 \\ \frac{3}{2}x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 - 2x_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = 4x_3 \end{matrix}$$

Punto doppio $P(-4, 4)$

La conica è perciò l'unione di due rette, per trovarle risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 4y = 0 \\ x = -4 + lt \\ y = 4 + mt \end{cases}$$

$16 - 8lt + l^2t^2 + 3(-4+lt)(4+mt) + 2(16+8mt+m^2t^2) - 4(-4+lt) - 4(4+mt) = 0$

$(l^2 + 3lm + 2m^2)t^2 = 0$

Ci sono infinite soluzioni e quindi la retta appartiene alla conica se $l^2 + 3lm + 2m^2 = 0$, ovvero, poiché $l \neq 0$, $m \neq 0$, $\left(\frac{l}{m}\right)^2 + 3\left(\frac{l}{m}\right) + 2 = 0$

cioè $\frac{l}{m} = -2 \rightarrow l = -2m$ oppure $\frac{l}{m} = -1 \rightarrow l = -m$

$(-2, 1)$ $\quad \frac{x+4}{-2} = \frac{y-4}{1}$ $\qquad \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$(-1, 1)$ $\quad \frac{x+4}{-1} = \frac{y-4}{1}$

$(x+y)(x+2y-4) = 0$

$x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 4y = 0$

$x^2 + x(3y - 4) + 2y^2 - 4y = 0$

$x = \dfrac{-(3y-4) \pm \sqrt{9y^2 - 24y + 16 - 8y^2 + 16y}}{2} = \dfrac{-(3y-4) \pm \sqrt{y^2 - 8y + 16}}{2} =$

$\dfrac{-(3y-4) \pm (y-4)}{2}$

$x = \dfrac{-3y + 4 + y - 4}{2}$ $\qquad$ $x = \dfrac{-3y + 4 - y + 4}{2}$

$x = \dfrac{-2y}{2} = -y$ $\qquad$ $x = \dfrac{-4y+8}{2} = -2y + 4$

$x + y = 0$ $\qquad$ $x + 2y - 4 = 0$

$a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} < 0 \rightarrow A_{33} \gtrless 0 \rightarrow$ conica ellittica

$a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} = 0 \rightarrow A_{33} = 0 \rightarrow$ conica parabolica

$a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} > 0 \rightarrow A_{33} < 0 \rightarrow$ conica iperbolica

- $2x^2 + y^2 - 3x + y + 5 = 0$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ -3/2 & 1/2 & -5 \end{vmatrix} = -10 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \neq 0 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Intersezioni retta - conica

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

① $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$

$\alpha = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2$

$\beta = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})l + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})m$

$\gamma = f(x_0, y_0)$

$\begin{cases} 2xy + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow y(2x+1) = 0$ $\qquad$ identità $\quad 0 \equiv 0$

$\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x_1^2 - 9x_2^2 = x_3^2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$

la retta è tangente se $\beta = 0$

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

$P_0 \in C \quad (x_0, y_0)$

retta tg a C in P_0

$a_{11}x_0x + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_{22}y_0y + a_{13}(x+x_0) + a_{23}(y+y_0) + a_{33} = 0$

$x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + 1(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}) = 0$

$x_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{P_0} + x_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{P_0} + x_3\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{P_0} = 0$

$B(1,2)$

$3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$

$3x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_3^2 = 0$

$B(1,2,1)$

~~Parca~~ $3(1x) - 2(1y+2x) + 4(x+1) + 5 = 0$

$3x - 2y + 9 = 0$

$P_0 \in C \longmapsto$ tg a C in P_0

Polo — Polare

Polare di P_1 $\quad a_{11}x_1x + a_{12}(x_1y + y_1x) + a_{22}y_1y + a_{13}(x+x_1) + a_{23}(y+y_1) + a_{33} =$

Teorema di reciprocità

Data una conica C se P_0 è polare di P_1 rispetto a C allora P_1 è polare di P_0 rispetto a C.

Applicando questo teorema si trova che la polare di un punto rispetto ad una conica è la retta congiungente i punti di tangenza.

FASCI DI CONICHE E INTERSEZIONI DI CONICHE

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6xy + 2x + 4y + 1 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6xy + 2x + 4y + 1 = 0 \\ 5y^2 - 10xy - 5y = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{sottraendo la seconda dalla prima}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6xy + 2x + 4y + 1 = 0 \\ 5y\,(y - 2x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 - (2x+1)^2 + 6x\cdot(2x+1) + 2x + 4(2x+1) + 1 = 0 \end{cases}$$

$A = B = (-1; 0)$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 - 4x^2 - 4x - 1 + 12x^2 + 6x + 2x + 8x + 4 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 9x^2 + 12x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ (3x + 2)^2 = 0 \end{cases}$$

$C = D = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

Ci sono due soluzioni doppie: le coniche sono bitangenti

$\mathcal{C}_1 \quad f(x,y) = 0$

$\mathcal{C}_2 \quad g(x,y) = 0$

$hf + kg = 0$ $\qquad P_0 \in \mathcal{C}_1 \wedge P_0 \in \mathcal{C}_2 \Rightarrow P_0 \in$ a tutte le coniche del fascio

$$(ha_{11} + kb_{11})x^2 + (ha_{22} + kb_{22})y^2 + 2(ha_{12} + kb_{12})xy + 2(ha_{13} + kb_{13})x + 2(ha_{23} + kb_{23})y + (ha_{33} + kb_{33}) = 0$$

Coniche degeneri:

$$\begin{vmatrix} ha_{11} + kb_{11} & ha_{12} + kb_{12} & ha_{13} + kb_{13} \\ ha_{12} + kb_{12} & ha_{22} + kb_{22} & ha_{23} + kb_{23} \\ ha_{13} + kb_{13} & ha_{23} + kb_{23} & ha_{33} + kb_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Si ottiene un'equazione di terzo grado che significa che esiste o una o tre coniche degeneri.

Parabole:

$$\begin{vmatrix} ha_{11} + kb_{11} & ha_{12} + kb_{12} \\ ha_{12} + kb_{12} & ha_{22} + kb_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Si ottiene un'equazione di secondo grado che significa che esistono due parabole, o nessuna parabola.

Tutte le coniche che passano per quattro punti possono essere individuate da un fascio con generatrici le rette AB e CD, o AC e BD, o AD e BC

$$h(x^2-6x) + k(y^2+2xy-6x) = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} h & k & -3h-3k \\ k & k & 0 \\ -3h-3k & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(3h+3k)\cdot k\cdot(3h+3k) = 0$$

$$-k\cdot(3h+3k)^2 = 0$$

$k=0 \longrightarrow x(x-6)=0$

$h=-k \longrightarrow x^2-y^2-2xy=0$ } coniche degeneri

Punti base:

$$\begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=6 \\ y^2+12y-36=0 \end{cases}$$

$$y = -6 \pm \sqrt{36+36} = -6 \pm 6\sqrt{2}$$

le soluzioni, punti base del fascio, sono quindi: $A=B=(0;0)$, $C=(6;-6-6\sqrt{2})$, $D=(6;-6+6\sqrt{2})$

Le parabole del fascio hanno $A_{33}=0$ cioè $hk-k^2=0$, che ha soluzioni $k=0$ e $k=h$. Nel primo caso si ottiene la parabola degenere in due rette, nel secondo, scegliendo per semplicità $h=k=1$, si ottiene $x^2+y^2+2xy-12x=0$, che si può scrivere come $(x+y)^2-12x=0$

Conica: tg in O(0;0) alla retta $x-y=0$

tg in P(1;0) alla retta $x-y-1=0$

passante per il vertice della parabola $x^2=y-1$

Il vertice della parabola è $(0;1)$.

Tutte le coniche bitangenti appartengono al fascio avente come coniche degeneri (tg in O)·(tg in P) $=(x-y)\cdot(x-y-1)=0$ e la retta $(OP)^2=0$, in questo caso $y^2=0$.

Si ha quindi $h(x-y)(x-y-1)+ky^2=0$

Imponendo il passaggio per $(0;1)$ abbiamo: $h(-1)(-2)+k=0$, $2h+k=0$, $h=1$, $k=-2$.

Dunque la conica è: $x^2-xy-x-xy+y^2+y-2y^2=0$, ovvero

$x^2-2xy+y^2-x+y=0$

Es. Parabola non degenere passante per $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,2)$, $C(0,1)$.

Tutte le coniche passanti per quattro punti appartengono al fascio individuato dal ~~dove~~ prodotto di ~~rette~~ una retta passante per due dei quattro punti e la retta passante per gli altri due, e dal prodotto di ~~Per questo cosa prendiamo~~ una analoga coppia distinta.

In questo caso scegliamo $AO \cdot BC = 0$ e $AB \cdot OC = 0$ e otteniamo:

$h(x^2-2x) + k(xy+2y^2+2y) = 0$

poiché $AO: y=0$, $BC: (x-2y+2)=0$; $AB: x-2=0$, $OC: x=0$

Sviluppando otteniamo:

$hx^2 + kxy + 2ky^2 - 2hx + 2ky = 0$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} h & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & -2k \end{vmatrix} = 0$$

$$-2hk - \frac{k^2}{4} = 0$$

$$2hk + \frac{k^2}{4} = 0$$

$$8hk + k^2 = 0$$

$$k(8h+k) = 0$$

Possiamo prendere le coppie $h=1, k=0$ e $h=1, k=-8$ e trovare la parabola.

Es. ~~Parabola non degenere~~ Conica passante per $A(1;0)$, $B(2;0)$, $C(0;1)$ e tangente in $D(0;3)$ alla retta $y=3$

Scriviamo il fascio di coniche passanti per A, C e tangenti in D alla retta data. In questo caso le coniche degeneri sono: la tangente in D e la retta per AC e la retta AD e la retta CD.

Si ha:

$$AC: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} \rightarrow x+y-1=0$$

$t_{g_D} \rightarrow y-3=0$ (è data)

$$AD: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} \rightarrow 3x+y-3=0$$

$CD \rightarrow x=0$ (C e D hanno entrambi ascissa 0)

Il fascio è quindi:

$h(y-3)(x+y-1) + k(3x+y-3)\cdot x = 0$

$\mathcal{C}$ $\quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$

C degenere

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

rg $A = 2$ $\quad$ 1 p doppio $\mathcal{C}$ prodotto di 2 rette
rg $A = 1$ $\quad$ ∞ p doppio $\mathcal{C} = (r)^2$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{ll} > 0 & \text{ellisse} \\ = 0 & \text{parabola} \\ < 0 & \text{iperbole} \end{array}$$

Se degenere: $\quad > 0$ $\cdot$ $\quad = 0$ $=$ $\quad < 0$ $\times$

Diametro = polare di P_∞

Conica a centro, $A_{33} \neq 0$ $\quad$ i diametri formano un fascio proprio di centro il Polo di r_∞ = Centro di $\mathcal{C}$

$$C \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

Assi = diametri coniugati ortogonali

$$a_{12}l^2 - (a_{11} - a_{22})lm - a_{12}m^2 = 0$$

Forma canonica: $Lx^2 + My^2 + N = 0$

$$\begin{cases} LMN = A \\ LM = A_{33} \\ L + M = T \end{cases}$$

- Nel caso dell'iperbole possiamo trovare gli asintoti direzionali:

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

Nel caso dell'iperbole equilatera deve essere $a_{11} + a_{22} = 0$ (asintoti $\perp$)

- Nel caso della parabola si ha $A_{33} = 0$ e $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ è quadrato $= (ax_1 + bx_2)^2$

$$\mathcal{P} \quad (ax_1 + bx_2)^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \qquad P_\infty\ (b, -a, 0)$$

$A_\infty\ (l, m, 0)$ diametro

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,l + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,m = 0$$
$$(a^2x_1 + abx_2 + a_{13}x_3)\,l + (abx_1 + b^2x_2 + a_{13}x_3)\,m = 0$$
$$ax_1(al + bm) + bx_2(al + bm) + (a_{13}l + a_{23}m)x_3 = 0$$

Scelto il riferimento canonico, con l'asse X come asse della parabola e l'origine come vertice, si ha:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{Q}{2} \\ 0 & P & 0 \\ \frac{Q}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad Py^2 + Qx = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{PQ^2}{4} = A \\ T = P \end{cases}$$

Siano le rette $x-y=0$ e $x-y-1=0$. Trovare Tutte le coniche tangenti a r in $O(0,0)$, a s in $P(1,0)$ appartengono al fascio individuato dalle coniche degeneri $r \cdot s$ e dalla retta OP contata 2 volte.

$(x-y)(x-y-1)=0$

retta OP $y=0$ contata 2 volte.

$\lambda(x-y)(x-y-1)+\mu y^2=0$
$\lambda x^2-2\lambda xy+\lambda y^2-\lambda x+\lambda y+\mu y^2=0$
$\lambda x^2-2\lambda xy+(\lambda+\mu)y^2-\lambda x+\lambda y=0$

Determinando le parabole del fascio, dovendo essere $A_{33}=0$
$\lambda(\lambda+\mu-\lambda)=0$ $\quad \lambda=0$ $\quad y^2=0$ doppiamente degenere
$\lambda\mu=0$ $\quad \mu=0$ $\quad (x-y)(x-y-1)=0$ degenere
troviamo che non ci sono parabole non degeneri.

Determiniamo l'iperbole equilatera. Deve essere:

$T=0$ $\quad \lambda+\lambda+\mu=0 \rightarrow 2\lambda+\mu=0$ $\quad \lambda=1,\ \mu=-2$
$x^2-2xy-y^2-x+y=0$

centro $\left(\frac{1}{2};0\right)$

- Es. Nello spazio:

(i) verificare che la retta:

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t \\ z=-2t \end{cases}$$

è contenuta nel piano della circonferenza

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-3=0 \\ x^2+y^2+z^2+3x+3y+3z-4=0 \end{cases}$$

(ii) trovare i punti di r che distano $\sqrt{\frac{2}{3}}$ dal centro della circonf. C

(i) Il piano della circonferenza è la differenza delle due equazioni:

$x+y+z-1=0$

e $(t+1)+t-2t-1$ fa appunto 0

(ii) Sia il fascio:

$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-3+k(x+y+z-1)=0$

$x^2+y^2+z^2+(k+2)x+(k+2)y+(k+2)z-(3+k)=0$

$C_k\left(-\frac{k}{2}-1;-\frac{k}{2}-1;-\frac{k}{2}-1\right)$

$-\frac{k}{2}-1-\frac{k}{2}-1-\frac{k}{2}-1-1=-\frac{3}{2}k-4=0$ $\quad k=-\frac{8}{3}$

$C_{-\frac{8}{3}}\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

(i) Verificare che la circonferenza

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-3=0 \\ x-y+z+2=0 \end{cases}$$

appartiene alla sfera $x^2+y^2+z^2+4x+4y+4z-1=0$

(ii) Trovare il volume del cono di ~~vertice~~ circonferenza c e altezza

Es. 8.5.1.

$$r = \begin{cases} x=1 \\ y=2z \end{cases} \qquad P(1,2t,t)$$

SOLIDI DI ROTAZIONE

- Sia $\mathcal{L}$ $f(x,z)=y=0$
  ruotando attorno all'asse z
  $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$
  ruotando attorno all'asse x
  $f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

- Sia $\mathcal{L}$ $f(x,y)=z=0$
  ruotando attorno all'asse y
  $f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$
  ruotando attorno all'asse x
  $f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

- Sia $\mathcal{L}$ $f(y,z)=x=0$
  ruotando attorno all'asse z
  $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$
  ruotando attorno all'asse y
  $f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$

Cilindro: generato da rette dette generatrici che incidono una curva detta direttrice e sono parallele ad una direzione fissa $\bar{v}$

$P = Q(u) + t\bar{v}$

Cono: generato da rette dette generatrici che incidono una curva detta direttrice e passanti per un punto detto vertice.

$P - V = (Q(u) - V)\,\bar{v}$

Oss: $xz-y^2=0$ è un cono con vertice nell'origine

omogenea di grado k $f(tx,ty,tz) = t^k \cdot f(x,y,z)$:

$\Rightarrow OP_0 \in S \quad (x_0t, y_0t, z_0t)$

$$\frac{x-0}{x_0-0} = \frac{y-0}{y_0-0} = \frac{z-0}{z_0-0} = t \qquad x_0t\,z_0t - (y_0t)^2 = t^2(x_0z_0 - y_0^2) = t^2\cdot 0 =$$

Es. Data la superficie del cono di equazione:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (z-3)^2$$

i) Scrivere le coordinate del vertice

ii) trovare le equazioni delle curve sezioni con i piani coordinati

iii) trovare i punti di intersezione del cono con la retta $x=y=z$

(i) L'equazione è omogenea in $(x-1)$, $(y-2)$, $(z-3)$ e quindi $V(1,2,3)$

(ii) • $\begin{cases} z = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \end{cases}$ circonferenza di centro $C(1;2;0)$ e raggio $r=3$

• $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - z^2 - 4y + 6z - 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$$H: \begin{cases} x = 0 \\ 2y - 4 = 0 \\ -2z + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \qquad H(0;2;3)$$

asintoti:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

• $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - z^2 - 2x + 6z - 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

$$H: \begin{cases} y = 0 \\ 2x - 2 = 0 \\ -2z + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \qquad H(1;0;3)$$

(iii) Ponendo $x = y = z$ si ottiene: $(x-1)^2 + (x-2)^2 = (x-3)^2$

ovvero:

$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 = x^2 - 6x + 9$

$2x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9$

$x = \pm 2$

quindi $P_1(-2;-2;-2)$ e $P_2(2;2;2)$

Es. Cono di vertice $V(1;-1;2)$ e direttrice $t: x - y + 2z - 1 = x^2 - 2xy - 2y + 1 = 0$

retta per V // $P_0 - V$

$$\begin{cases} x = 1 + t(x_0 - 1) \\ y = -1 + t(y_0 + 1) \\ z = 2 + t(z_0 - 2) \\ x_0 - y_0 + 2 \cdot z_0 - 1 = 0 \\ x_0^2 - 2x_0 y_0 - 2y_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

SOLIDI DI ROTAZIONE VARI

- Sia $C: \begin{cases} x - hz = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $(h \neq 0)$ $\qquad O(0;0;0)$

  $x^2 + y^2 - h^2 z^2 \leq 0$, poichè $\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (hz)^2$

- Sia $C: \begin{cases} x = h \\ y = 0 \end{cases}$ $(h \neq 0)$

  $x^2 + y^2 = h^2$, poichè $\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (h)^2$

Es. Determinare l'equazione del cono rotondo di asse la retta $a: \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ di vertice il punto $V(0;2;2)$ e passante per il punto $A(2;0;0)$, studiando in seguito la linea di intersezione del cono con il piano $z=0$

Es Cilindro avente come direttrice la circonferenza: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-3=0 \\ y=1 \end{cases}$ e avente generatrici parallele all'asse y.

$P(h,1,k)$

$h^2 + 1 + k^2 - 2h - 2 + 4k - 3 = 0$

$h^2 + k^2 - 2h + 4k - 4 = 0$

$x^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0$ ← cilindro

Es. Cilindro avente come direttrice la circonferenza $\begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2+z^2=16 \end{cases}$ e avente generatrici parallele alla retta $\begin{cases} x-y+1=0 \\ z=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y+p \\ z = q \end{cases}$ generica retta // alla retta data

$P(0,-p,q)$

$(-p)^2 + q^2 = 16$

$(y-x)^2 + z^2 = 16$