GEOMETRIA II (GANDINI)

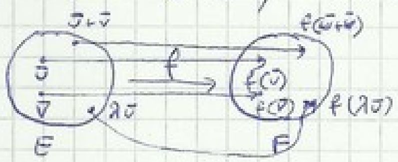
MARKUS ION STOKA - ~~Lezioni~~ Corso di Geometria . ISBN 88-13-19192-8
$\simeq$ € 22.72

APPLICAZIONE LINEARE o OMOMORFISMO

$f: E \to F$

i) $\forall \bar{u}, \bar{v} \in E \qquad f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v})$

ii) $\forall \bar{u} \in E, \ \forall \lambda \in K \qquad f(\lambda\bar{u}) = \lambda \cdot f(\bar{u})$



$K \to$ campo degli scalari (generalmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

Definizione equivalente:

$f: E \to F$

i') $\forall \bar{u}, \bar{v} \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in K \qquad f(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) = \alpha \cdot f(\bar{u}) + \beta \cdot f(\bar{v})$

- Le due definizioni sono equivalenti, infatti:

i), ii) $\longrightarrow$ i')

$f(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) = f(\alpha\bar{u}) + f(\beta\bar{v}) = \alpha \cdot f(\bar{u}) + \beta \cdot f(\bar{v})$

i') $\longrightarrow$ i), ii)

Ponendo $\alpha = 1$, $\beta = 1$ si trova la i)

Ponendo $\alpha = \lambda$, $\beta = 0$ si trova la ii)

Se $E = F$ si parla di <u>endomorfismi</u>

Se l'applicazione è iniettiva si parla <u>monomorfismo</u>; se è suriettiva <u>epimorfismo</u>; se è biettiva <u>isomorfismo</u>.

Infine, se $E = F$ e l'applicazione è biettiva, si parla di <u>automorfismo</u>.

Esempi:

- $i: E \to E \qquad i: \bar{u} \to \bar{u} \qquad i(\bar{u}) = \bar{u}$ identità

  È un'applicazione lineare poiché soddisfa la i'), infatti:

  $i(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} = \alpha \cdot i(\bar{u}) = \beta \cdot i(\bar{v})$

- $f: E \to F$

  $\forall \bar{u} \in E \qquad f(\bar{u}) = \bar{o}' \in F$ [con $\bar{o}$ si indica spesso lo zero di E, con $\bar{o}'$ quello di F]

  Anche questa è un'a.l.:

  $f(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) = \alpha \cdot f(\bar{u}) + \beta \cdot f(\bar{v})$

  $\bar{o}' = \alpha \cdot \bar{o}' + \beta \cdot \bar{o}'$

  $\bar{o}' = \bar{o}'$

  Questa a.l. è nota come omomorfismo nullo

- $f: E \longrightarrow E$

  $\bar{u} \longrightarrow k_0 \bar{u} \qquad k_0 \in K$

  Rispetta la (i) e la (ii), infatti:

  (i) $f(\bar{u}+\bar{v}) = k(\bar{u}+\bar{v})$

  $f(\bar{u}) + f(\bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$

  (ii) $f(\lambda \bar{u}) = k(\lambda \bar{u})$

  $\lambda \cdot f(\bar{u}) = \lambda \cdot k \cdot \bar{u}$

Proprietà varie:

$f: E \to F$

- $f(\bar{o}) = \bar{o}'$ infatti: $\bar{o} + \bar{o} = \bar{o} \Rightarrow f(\bar{o}+\bar{o}) = f(\bar{o}) \Rightarrow f(\bar{o}) + f(\bar{o}) = f(\bar{o})$ da cui semplificando $f(\bar{o}) = \bar{o}'$

- $f(-\bar{u}) = -f(\bar{u})$ infatti; partendo dalla tesi $f(-\bar{u}) + f(\bar{u}) = \bar{o}'$, otteniamo: $f(-\bar{u}+\bar{u}) = \bar{o}'$, da cui $f(\bar{o}) = \bar{o}'$

- $f: E \to F$

  $H \subseteq E$

  $H \to f(H) \qquad \bar{u}', \bar{v}' \in f(H) \qquad \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha \bar{u}' + \beta \bar{v}' \in f(H)$

  Se H è sottospazio v., allora $f(H)$ è sottospazio v.

  $f(H) \subseteq F$

  $\bar{u}', \bar{v}' \in f(H) \rightarrow \exists\, \bar{u}, \bar{v} \in H \mid \begin{matrix} f(\bar{u}) = \bar{u}' \\ f(\bar{v}) = \bar{v}' \end{matrix}$

  $\alpha \bar{u}' + \beta \bar{v}' = \alpha \cdot f(\bar{u}) + \beta \cdot f(\bar{v}) = f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v})$

  Poiché $\alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in H$, $\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}' \in f(H)$.

  Dunque $f(H)$ verifica la i') ed è quindi sottospazio vettoriale.

In particolare, posto $H = E$, si trova che $f(E)$ è sottospazio di F.
Vale anche il contrario, cioè se $K \subseteq F$ è sottospazio vettoriale, allora lo è anche $f^{-1}(K) \subseteq E$.
Poiché $\{\bar{o}'\}$ è un sottospazio vettoriale (il solo elemento nullo), anche $f^{-1}(\{\bar{o}'\})$ è un sottospazio vettoriale. Questo sottospazio viene definito nucleo dell'applicazione lineare e denominato con $\ker f$. Proviamo questo caso:

$\bar{u}, \bar{v} \in \ker f \qquad \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in \ker f$

poiché $f(\bar{u}) = \bar{o}$, $f(\bar{v}) = \bar{o}$, allora $f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha \cdot f(\bar{u}) + \beta \cdot f(\bar{v}) = \bar{o}$ il che dimostra che il nucleo è un sottospazio.

Esempio: $E \to E \qquad f: \bar{u} \to k \cdot \bar{u} \qquad f(\bar{u}) = \bar{o} \rightarrow k \cdot \bar{u} = 0$

Se $k \neq 0$ il nucleo è costituito dal

Se $k = 0$ " " da tutto E

$f: E \to F$

$H \subseteq E$

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m$ generatori di H

Allora $f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), \dots, f(\bar{e}_m)$ sono generatori di $f(H)$

Dimostrazione:

$\forall \bar{v}' \in f(H) \to \exists \bar{v} \in H \,/\, \bar{v}' = f(\bar{v})$

$\bar{v}' = f(\bar{v}) = f(\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \dots + \lambda_m \bar{e}_m) =$ *

$\lambda_1 \cdot f(\bar{e}_1) + \lambda_2 \cdot f(\bar{e}_2) + \dots + \lambda_m \cdot f(\bar{e}_m)$

Nel caso particolare in cui $H = E$, generatori di E si trasformano in generatori di $f(E)$. Se f è suriettiva, generatori di E si trasformano in generatori di F.

Non è però vero che una base si trasformi in una base, poiché vettori linearmente indipendenti non è detto che vadano in vettori linearmente indipendenti.

$f: E \to F$

$\dim H = m$ $\quad \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m$ base di H

$f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), \dots, f(\bar{e}_m)$ generatori di $f(H)$

Poiché da un insieme di generatori posso estrarre una base, e il numero di vettori di una base coincide con la dimensione del sottospazio vettoriale, allora $\dim f(H) \leq m$.

Ne segue che $\dim f(H) \leq \dim H$.

* Si noti che la condizione i') può essere scritta generalizzando nel caso di m vettori:

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m \in E \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$

$f(\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_m \bar{v}_m) = \alpha_1 \cdot f(\bar{v}_1) + \alpha_2 \cdot f(\bar{v}_2) + \dots + \alpha_m \cdot f(\bar{v}_m)$

Teorema $\quad \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n = \dim E$ $\quad \operatorname{Im} f = f(E)$

Dim. $\quad$ Sia $p = \dim \ker f$, $q = \dim \operatorname{Im} f$. $\quad \ker f = \{\bar{v} \in E \,/\, f(\bar{v}) = \bar{0}$

La tesi si trasforma in questo modo in $p + q = n$

Esiste una base di $\ker f$ $\quad \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_p$;

esiste una base di $\operatorname{Im} f$ $\quad \bar{f}_{p+1}, \bar{f}_{p+2}, \dots, \bar{f}_{p+q}$.

Per definizione di immagine esiste un vettore $\bar{e}_{p+1}$ tale che $f(\bar{e}_{p+1}) = \bar{f}_{p+1}$; analogamente esiste $\bar{e}_{p+2}$ tale che $f(\bar{e}_{p+2}) = \bar{f}_{p+2}$, e così via fino all'indice $p+q$.

Abbiamo in questo modo individuato in E $p+q$ vettori:

$\overline{e_1}, \dots, \overline{e_p}$ che sono una base di $\ker f$,

$\overline{e}_{p+1}, \dots, \overline{e}_{p+q}$ che sono controimmagini di una base di $\operatorname{Im} f$.

Proviamo ora che $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_{p+q}$ formano una base di E, il che, poiché $n = \dim E$ e non ci potrebbero essere ripetizioni fra vettori, proverebbe la tesi.

Possiamo dimostrare la tesi iniziando dalla dimostrazione che sono linearmente indipendenti:

$\lambda_1 \overline{e_1} + \dots + \lambda_p \overline{e_p} + \lambda_{p+1} \overline{e}_{p+1} + \dots + \lambda_{p+q} \overline{e}_{p+q} = \overline{o} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_{p+q} = 0$

Svolgiamo una serie di passaggi:

$f(\lambda_1 \overline{e_1} + \dots + \lambda_p \overline{e_p} + \lambda_{p+1} \overline{e}_{p+1} + \dots + \lambda_{p+q} \overline{e}_{p+q}) = f(\overline{o})$

$\lambda_1 \cdot f(\overline{e}_1) + \dots + \lambda_p \cdot f(\overline{e}_p) + \lambda_{p+1} \cdot f(\overline{e}_{p+1}) + \dots + \lambda_{p+q} \cdot f(\overline{e}_{p+q}) = f(\overline{o})$

Tenendo conto del fatto che $\overline{e}_1, \dots, \overline{e_p} \in \ker f$ e che quindi ~~le cui controim~~ le loro immagini sono $\overline{o}'$:

$\overline{o}' + \dots + \overline{o}' + \lambda_{p+1} \cdot \overline{f}_{p+1} + \dots + \lambda_{p+q} \cdot \overline{f}_{p+q} = \overline{o}'$

Poiché $\overline{f}_{p+1}, \dots, \overline{f}_{p+q}$ sono linearmente indipendenti per ipotesi, i coefficienti $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}$ devono valere 0. Dunque:

~~Quindi~~ $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_{p+q} = 0$.

Di conseguenza, ci resta da dimostrare che:

$\lambda_1 \overline{e_1} + \dots + \lambda_p \overline{e_p} = \overline{o} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = \overline{o}$

Ma anche $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_p}$ sono linearmente indipendenti per ipotesi, e perciò $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

Dunque $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p+q} = 0$, come volevasi dimostrare

Resta da dimostrare che $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_{p+q}$ formano un insieme di generatori

Si ha che $\forall \overline{u} \in E$, $f(\overline{u}) \in \operatorname{Im} f$, cioè:

$f(\overline{u}) = \lambda_{p+1} \cdot \overline{f}_{p+1} + \dots + \lambda_{p+q} \cdot \overline{f}_{p+q}$

$f(\overline{u}) = \lambda_{p+1} \cdot f(\overline{e}_{p+1}) + \dots + \lambda_{p+q} \cdot f(\overline{e}_{p+q})$

$f(\overline{u}) = f(\lambda_{p+1} \cdot \overline{e}_{p+1} + \dots + \lambda_{p+q} \cdot \overline{e}_{p+q})$

$f(\overline{u}) - f(\lambda_{p+1} \cdot \overline{e}_{p+1} + \dots + \lambda_{p+q} \cdot \overline{e}_{p+q}) = \overline{o}'$

$f(\overline{u} - \lambda_{p+1} \cdot \overline{e}_{p+1} - \dots - \lambda_{p+q} \overline{e}_{p+q}) = \overline{o}'$

da cui $\overline{u} - \lambda_{p+1} \cdot \overline{e}_{p+1} - \dots - \lambda_{p+q} \cdot \overline{e}_{p+q} \in \ker f$

Pertanto si può scrivere come combinazione lineare di vettori di una base di $\ker f$; in particolare di $\overline{e}_1, \dots, \overline{e_p}$.

$\overline{u} - \lambda_{p+1} \cdot \overline{e}_{p+1} - \dots - \lambda_{p+q} \cdot \overline{e}_{p+q} = \lambda_1 \cdot \overline{e_1} + \lambda_2 \cdot \overline{e_2} + \dots + \lambda_p \cdot \overline{e_p}$

$\overline{u} = \lambda_1 \cdot \overline{e_1} + \dots + \lambda_p \cdot \overline{e_p} + \lambda_{p+1} \cdot \overline{e}_{p+1} + \dots + \lambda_{p+q} \cdot \overline{e}_{p+q}$

Abbiamo scritto $\overline{u}$ come combinazione lineare dei $\overline{e_1}, \dots, \overline{e}_{p+q}$

Pertanto $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{p+q}$ formano un insieme di generatori.
Poiché un insieme di generatori linearmente indipendenti forma una base, la tesi è dimostrata.

<u>Teorema</u> Primo teorema di equivalenza

Siano E ed F due spazi vettoriali ed $f: E \Rightarrow F$ un'applicazione lineare di E in F. Sono equivalenti le seguenti quattro condizioni:

(i) $\ker f = \{\bar{o}\}$

(ii) f è iniettiva

(iii) $\forall\ \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ vettori l.i. di E
$\Rightarrow f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n)$ vettori l.i. in F

(iv) $\forall\ H \subseteq E \quad \dim f(H) = \dim H$

cioè, se ne vale una di queste, valgono anche le altre.

Dimostrazione:

(ii) $\rightarrow$ (i)

Per ipotesi f è iniettiva, cioè ogni elemento del codominio ha al più una controimmagine; in particolare $\bar{o}'$ ha almeno $\bar{o}$ come controimagine, e poiché f è iniettiva ha solo $\bar{o}$.
Pertanto $f^{-1}(\bar{o}') = \ker f = \{\bar{o}\}$

(i) $\rightarrow$ (ii)

$u, v \in E \quad \bar{v} \neq \bar{v} \Rightarrow f(\bar{v}) \neq f(\bar{v})$

Supponiamo che $f(\bar{v}) = f(\bar{v})$. Ne segue che $f(\bar{v}) - f(\bar{v}) = \bar{o}'$, cioè $f(\bar{v} - \bar{v}) = \bar{o}'$. Per quanto detto al punto precedente, $\bar{v} - \bar{v} = \bar{o}$, cioè $\bar{v} = \bar{v}$. Dunque $f(\bar{v}) = f(\bar{v}) \Rightarrow \bar{v} = \bar{v}$, da cui poiche $A \Rightarrow B \rightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ segue la tesi.

(ii) $\rightarrow$ (iii)

$\lambda_1 \cdot f(\bar{v}_1) + \dots + \lambda_p \cdot f(\bar{v}_p) = \bar{o}'$

$f(\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_p \bar{v}_p) = \bar{o}'$

$\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_p \bar{v}_p = \bar{o}$ poiché, essendo stata supposta f iniettiva, il nucleo $\ker f$ è costituito dal solo vettore nullo.

$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ poiché per ipotesi $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p$ sono l.i.

(iii) $\rightarrow$ (iv)

Sia $\dim H = h$. Si ha che $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h$ è una base di H.
Prendiamo ora i vettori $f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_h)$. Abbiamo che:

1) $\in f(H)$ per costruzione
2) sono linearmente indipendenti per la (iii)
3) sono generatori poiché f manda sempre generatori in generatori

Dunque $f(e_1), \dots, f(e_h)$ formano una base di $f(H)$, ed essendo in numero di h $\dim f(H) = h = \dim H$.

(iv) $\rightarrow$ (i)

Applichiamo la (iv) in particolare per $\ker f$, asserendo che:
$\dim f((\ker f)) = \dim \ker f$.

Svolgendo i passaggi otteniamo che:

$\dim \{\bar{o}'\} = \dim \ker f$

$0 = \dim \ker f$

$\ker f = \{\bar{o}\}$

come volevasi dimostrare.

ESERCIZIO

- Siano E_n ed E_m due spazi vettoriali di dimensioni n e m, con $n > m$. Dimostrare che non può esistere un'applicazione lineare iniettiva fra E_n ed E_m.

θ Supponiamo per assurdo che esiste. Si avrebbe:
$\ker f = \{\bar{o}\}$, $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$
ma $\dim \ker f = 0$, $\dim \operatorname{Im} f \leq m < n$, dunque
$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f < n$, il che è assurdo. $\diamond$

- Se invece $n < m$, non può esistere un'applicazione lineare suriettiva. Infatti in tal caso $\operatorname{Im} f = E_m$, quindi $\dim \operatorname{Im} f = \dim E_m = m$, per cui $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f \geq m > n$, il che è assurdo. $\diamond$

<u>Teorema</u> Secondo teorema di equivalenza

Siano E_n e F_n due spazi vettoriali di dimensione n ed $f: E_n \rightarrow F_n$ una loro applicazione lineare. Allora:

(i) $\ker f = \{\bar{o}\}$

(ii) f è iniettiva

(iii) l'immagine di una base di E_n è una base di F_n

(iv) f è suriettiva

(v) f è isomorfismo

Dimostrazione:

(i) $\rightarrow$ (ii)
(ii) $\rightarrow$ (i) } Abbiamo visto nel primo teorema di equivalenza.

(ii) $\rightarrow$ (iii)

Poiché se f è iniettiva, come visto nel primo teorema, manda vettori l. i. in vettori l. i., prendendo un insieme di n vettori l. i. di E_n le loro immagini saranno n vettori l. i. di F_n, cioè una base di F_n poiché sono in numero di n.

(iii) $\rightarrow$ (iv)

Consideriamo una base $e_1, e_2, \dots, e_n$ di E. Valendo la condizione (iii) $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ è una base di F.

Se $\bar{U}' \in F_n$, allora è combinazione lineare degli elementi della base di F sopra citata; pertanto possiamo scrivere:

$\bar{U}' = \lambda_1 \cdot f(\bar{e}_1) + \lambda_2 \cdot f(\bar{e}_2) + \dots + \lambda_n \cdot f(e_n)$.

Applicando la nozione di applicazione lineare otteniamo:

$\bar{U}' = f(\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n)$

La parte tra parentesi è la controimmagine di $\bar{U}'$, ma allora ogni $\bar{U}'$ ammette controimmagine, e quindi la funzione è suriettiva.

(iv) $\rightarrow$ (i)

Consideriamo il primo teorema: $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n = \dim E$

Se f è suriettiva, allora $\operatorname{Im} f = F$. Poiché $\dim F = n$, allora $\dim \operatorname{Im} f = n$ e quindi $\dim \ker f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = n - n = 0$, e quindi $\ker f = \{\bar{0}\}$

(iv) $\rightarrow$ (v)

Poiché (iv) $\rightarrow$ (i) $\rightarrow$ (ii), allora f è sia iniettiva che suriettiva, quindi biettiva.

(v) $\rightarrow$ (iv).

Se f è biettiva, in particolare è suriettiva.

Oltre a queste condizioni, è equivalente anche la (iii'):

Esiste una base di E la cui immagine è una base di F.

Infatti dalla (iii) segue per forza la (iii'); poiché dalla (iii') segue (iv), poiché nella dimostrazione (iii) $\rightarrow$ (iv) che abbiamo svolto non abbiamo supposto che tutte le basi fossero mandate in basi, ma era sufficiente che una sola base fosse mandata in una base, le condizioni sono equivalenti.

Teorema: Sia E_n uno spazio vettoriale di dimensione n e base $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$; sia F un altro spazio vettoriale. Allora esiste una ed una sola applicazione lineare di E_n in F tale che $f(\overline{e_1}) = \overline{e_1}'$, $f(\overline{e_2}) = \overline{e_2}'$, ..., $f(\overline{e_n}) = \overline{e_n}'$

Dimostrazione: Proviamo prima che ne esiste una:

$$\overline{u} = u_1 \overline{e_1} + u_2 \overline{e_2} + \dots + u_n \overline{e_n}$$

Poniamo ora, per definizione:

$$f(\overline{u}) = u_1 \overline{e_1}' + u_2 \overline{e_2}' + \dots + u_n \overline{e_n}'$$

Dobbiamo dimostrare che si tratta di un'applicazione lineare.

Sia $\overline{v} = v_1 \overline{e_1} + v_2 \overline{e_2} + \dots + v_n \overline{e_n}$; ne segue:

$$f(\overline{v}) = v_1 \overline{e_1}' + v_2 \overline{e_2}' + \dots + v_n \overline{e_n}'$$

Di conseguenza:

$$\overline{u} + \overline{v} = (u_1 + v_1)\overline{e_1} + (u_2 + v_2)\overline{e_2} + \dots + (u_n + v_n) \cdot \overline{e_n}$$

$$f(\overline{u} + \overline{v}) = (u_1 + v_1)\overline{e_1}' + (u_2 + v_2)\overline{e_2}' + \dots + (u_n + v_n) \cdot \overline{e_n}'$$

$$f(\overline{u}) + f(\overline{v}) = u_1 \overline{e_1}' + v_1 \overline{e_1}' + u_2 \overline{e_2}' + v_2 \overline{e_2}' + \dots + u_n \overline{e_n}' + v_n \overline{e_n}' =$$

$$= (u_1 + v_1) \cdot \overline{e_1}' + (u_2 + v_2) \cdot \overline{e_2}' + \dots + (u_n + v_n) \cdot \overline{e_n}'$$

$$\lambda \overline{u} = \lambda u_1 \overline{e_1} + \lambda u_2 \overline{e_2} + \dots + \lambda u_n \overline{e_n}$$

$$f(\lambda \overline{u}) = \lambda u_1 \overline{e_1}' + \lambda u_2 \overline{e_2}' + \dots + \lambda u_n \overline{e_n}' = \lambda (u_1 \overline{e_1}' + u_2 \overline{e_2}' + \dots + u_n \overline{e_n}')$$

$$= \lambda \cdot f(\overline{u})$$

e quindi si tratta di un'applicazione lineare, poiché rispetta la (i) e la (ii)

Ora, poiché $\overline{e_1} = 1 \cdot \overline{e_1} + 0 \cdot \overline{e_2} + \dots + 0 \cdot \overline{e_n}$,

$$f(\overline{e_1}) = 1 \cdot \overline{e_1}' + 0 \cdot \overline{e_2}' + \dots + 0 \cdot \overline{e_n}' = \overline{e_1}'$$

dunque f manda $\overline{e_1}$ in $\overline{e_1}'$. Analogamente si dimostra che per ogni $1 \leq i \leq n$, $f(\overline{e_i}) = \overline{e_i}'$

Dunque questa è un'applicazione lineare che soddisfa le condizioni che abbiamo posto. Dimostriamo ora che è unica.

Sia g un'altra applicazione lineare che soddisfi le condizioni:

$$g(\overline{u}) = g(u_1 \overline{e_1} + u_2 \overline{e_2} + \dots + u_n \overline{e_n}) = u_1 \cdot g(\overline{e_1}) + \dots + u_n \cdot g(\overline{e_n}).$$

Poiché per ipotesi g manda gli $\overline{e_i}$ in $\overline{e_i}'$, allora:

$$u_1 \cdot g(\overline{e_1}) + \dots + u_n \cdot g(\overline{e_n}) = u_1 \cdot \overline{e_1}' + \dots + u_n \cdot \overline{e_n}' = f(\overline{u})$$

il che significa che g ed f coincidono, e quindi f è unica.

Corollario: Due spazi vettoriali sono isomorfi se e soltanto se hanno la stessa dimensione.

Dimostrazione: $\rightarrow$ $f: E \rightarrow F$

$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E = n$

Se sono isomorfi, $\dim \ker f = 0$, poiché f è iniettiva

$\dim \operatorname{Im} f = \dim E = n$

Poiché f è suriettiva, allora $\operatorname{Im} f = F$ quindi $\dim \operatorname{Im} f = \dim F$ e in particolare $= \dim E$.

Dunque se sono isomorfi hanno la stessa dimensione

$\leftarrow$ Sia supposto $\dim E = \dim F = n$

Sia una base di E $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$; sia una base di F $\overline{e_1}', \overline{e_2}', \dots, \overline{e_n}'$. Per il secondo teorema di equivalenza, f tale che $f(\overline{e_1}) = \overline{e_1}', \dots, f(\overline{e_n}) = \overline{e_n}'$, poiché è costruita in modo che soddisfi la (iii'), soddisfa anche la (v) e quindi f è un isomorfismo.

Esempi:

- $f: E_3 \rightarrow E_3$

  $\overline{u} = (2,1,0)$ $\quad$ $\overline{v}(3,0,1)$ $\quad$ V $\dim = 2$

  $\ker f = V$

  $\dim \operatorname{Im} f = 2$

  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 4 \neq \dim E$

  Non esiste una siffatta applicazione lineare.

- Siano $\overline{u} = (2,1,0)$ $\overline{v} = (3,0,1)$ $\in \ker f$ e $f[(1,0,0)] = (1,0,0)$

  Poiché: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$, i tre vettori sono definiti e può essere definita un'applicazione lineare.

- Siano $\overline{u} = (2,1,0)$ $\overline{v} = (3,0,1)$ $\in \ker f$ e $f[(2,3,-\frac{4}{3})] = (1,1,1)$

  Poiché $(2,3,-\frac{4}{3}) = 3\overline{u} - \frac{4}{3}\overline{v}$, si dovrebbe avere:

  $f[(2,3,-\frac{4}{3})] = 3 \cdot f[(2,1,0)] - \frac{4}{3} \cdot f[(3,0,1)] = 3 \cdot (0,0,0) - \frac{4}{3} \cdot (0,0,0) = (0,0,0)$, ma per ipotesi $f[(2,3,-\frac{4}{3})] = (1,1,1) \neq (0,0,0)$.

  Dunque abbiamo un assurdo e non definiamo un'applicazione lineare.

Matrici e applicazioni lineari

$f: E \to F$

$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$

$\overline{e_1}', \overline{e_2}', \dots, \overline{e_m}'$

$v \to f(\overline{v}) = \overline{v}' \qquad \overline{v}' = f(\overline{v})$

$\overline{v}' = y_1 \overline{e_1}' + y_2 e_2' + \dots + y_m e_m' \qquad \overline{v} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2} + \dots + x_n \overline{e_n}$

$y_1 \overline{e_1}' + y_2 \overline{e_2}' + \dots + y_m \overline{e_m}' = f(x_1 \overline{e_1} + \dots + x_n \overline{e_n}) = x_1 \cdot f(\overline{e_1}) + \dots + x_n \cdot f(\overline{e_n})$

$f(\overline{e_1}), f(\overline{e_2}), \dots, f(\overline{e_n}) \in F$

$f(\overline{e_1}) = a_{11} \cdot \overline{e_1}' + a_{21} \cdot \overline{e_2}' + \dots + a_{m1} \cdot \overline{e_m}'$

$f(\overline{e_2}) = a_{12} \cdot \overline{e_1}' + a_{22} \cdot \overline{e_2}' + \dots + a_{m2} \cdot \overline{e_m}'$

$\dots$

$f(\overline{e_n}) = a_{1n} \cdot \overline{e_1}' + a_{2n} \cdot \overline{e_2}' + \dots + a_{mn} \cdot \overline{e_m}'$

$y_1 \overline{e_1}' + y_2 \overline{e_2}' + \dots + y_m \overline{e_m}' = x_1 (a_{11} \cdot e_1 + \dots$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \dots \\ y_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{cases}$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = A$$

$f(\overline{e_1}) \quad f(\overline{e_2}) \qquad f(\overline{e_n})$

Le colonne corrispondono alle immagini dei vettori della base del dominio espresse in funzione ~~dell'immagine~~ della base del codominio.

Esempio:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad E_3 \to E_3$$

se la base del dominio è $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, e la base del codominio è anche $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, la matrice rappresenta l'identità.

Tuttavia le basi possono anche essere diverse, e non è detto quindi che venga rappresentata l'identità.

Sia E uno spazio vettoriale, $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ una base, $\overline{e_1}', \overline{e_2}', \dots, \overline{e_n}'$ un'altra base. Possiamo scrivere:

$$\bar{v} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2} + \dots + x_n \overline{e_n}$$

$$\bar{v} = x_1' \overline{e_1}' + x_2' \overline{e_2}' + \dots + x_n' \overline{e_n}'$$

$$x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2} + \dots + x_n \overline{e_n} = x_1' \overline{e_1}' + x_2' \overline{e_2}' + \dots + x_n' \overline{e_n}'$$

Ora, anche $\overline{e_1}', \overline{e_2}', \dots, \overline{e_n}'$, in quanto vettori di E, possono essere espressi come c. l. di $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$.

$$\begin{cases} \overline{e_1}' = a_{11} \overline{e_1} + a_{21} \overline{e_2} + \dots + a_{n1} \overline{e_n} \\ \overline{e_2}' = a_{12} \overline{e_1} + a_{21} \overline{e_2} + \dots + a_{n2} \overline{e_n} \\ \dots \\ \overline{e_n}' = a_{1n} \overline{e_1} + a_{2n} \overline{e_2} + \dots + a_{nn} \overline{e_n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} x_1' + a_{12} x_2' + \dots + a_{1n} x_n' \\ x_2 = a_{21} x_1' + a_{22} x_2' + \dots + a_{2n} x_n' \\ x \dots \\ x_n = a_{n1} x_1' + a_{n2} x_2' + \dots + a_{nn} x_n' \end{cases}$$

Sia ora P la matrice dei coefficienti:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\overline{e_1}' \quad \overline{e_2}' \quad \dots \quad \overline{e_n}'$ espressi nella base $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Siano X' e X le matrici delle incognite:

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Effettuiamo ora il prodotto PX':

$$PX' = \begin{bmatrix} a_{11} x_1' + a_{12} x_2' + \dots + a_{1n} x_n' \\ a_{21} x_1' + a_{22} x_2' + \dots + a_{2n} x_n' \\ \dots \\ a_{n1} x_1' + a_{n2} x_2' + \dots + a_{nn} x_n' \end{bmatrix}$$

Si può notare che $X = PX'$, inoltre $X' = P^{-1} X$ (si noti che P è invertibile poiché le sue colonne, essendo vettori di una base, sono (l.i.)

Sia ora $f: E \to F$, B una base di E, C una base di F.
Se si sostituiscono le basi B e C con rispettivamente B' e C', come cambiano i coefficienti della matrice che rappresenta l'applicazione lineare?

$\bar{v} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n \longrightarrow f(\bar{v}) = y_1 \bar{e}_1 + \dots + y_m \bar{e}_m$

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$$
$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n$$
$$\dots$$
$$y_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$Y = MX$ — M matrice $B \to C$

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{bmatrix} \qquad Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{bmatrix}$$

$X = NX'$ — N matrice $B \to B'$

$Y = PY'$ — P matrice $C \to C'$

$Y = MX$

$PY' = MNX'$ sostituendo

$P^{-1}PY' = MNX'$ moltiplicando a sinistra per P^{-1}

$Y' = P^{-1}MNX'$

Nel caso particolare in cui si ha un endomorfismo $f: E \to E$ e $B = C$, $B' = C'$, quindi la matrice $B \to C$ e la matrice $B' \to C'$ corrispondono (chiamiamola P), la formula diventa $Y' = P^{-1}MPX'$

AUTOVETTORI/AUTOVALORI DI UN ENDOMORFISMO

$f: E \to E$

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \quad \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$

$\bar{u}$ è un ~~autovalore~~ autovettore di E se:

(i) non è nullo: $\bar{u} \neq \bar{o}$

(ii) $\exists \lambda \in K \ / \ f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$

Un ~~autovalore~~ autovettore è un vettore che l'endomorfismo trasforma in un suo multiplo (non necessariamente intero). λ viene chiamato autovalore.

Proprietà fondamentale: un autovettore non può essere autovettore di due differenti autovalori, ovvero lo è di uno e uno solo.
Infatti, se $\lambda \neq \lambda'$, $f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$, $f(\bar{u}) = \lambda' \cdot \bar{u}$, facendo la differenza risulta $(\lambda - \lambda') \cdot \bar{u} = \bar{o}$, da cui poiché $\lambda - \lambda' \neq 0$ per ipotesi, $\bar{u} = \bar{o}$, ma ciò è in contrasto con l'ipotesi di essere autovettore per la (i).
Invece, un autovalore è autovalore di infiniti autovettori, sia infatti $f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$, abbiamo $f(k\bar{u}) = k \cdot f(\bar{u}) = k(\lambda \bar{u}) = \lambda(k\bar{u})$, e quindi se λ è autovalore di $\bar{u}$, lo è anche di ogni suo multiplo, fatto salvo il vettore nullo.

Proprietà: • Dato λ, sia $E_\lambda = \{\bar{u} \in E \ / \ f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}, \bar{o}\}$.
E_λ è sottospazio vettoriale, detto autospazio.
Infatti:

1) $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{o}$
$f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha \cdot f(\bar{u}) + \beta \cdot f(\bar{v}) = \alpha \cdot (\lambda \bar{u}) + \beta \cdot (\lambda \bar{v}) = \lambda(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v})$

2) $\bar{u} = \bar{v} = \bar{o}$
$\alpha \cdot \bar{o} + \beta \cdot \bar{o} = \bar{o} \in E_\lambda$

3) $\bar{u} \neq \bar{o} \quad \bar{v} = \bar{o}$
$f(\alpha \bar{u}) = \alpha \cdot f(\bar{u}) = \alpha \cdot (\lambda \bar{u}) = \lambda \cdot (\alpha \bar{u})$

• L'intersezione di due autospazi distinti è costituita dal solo vettore nullo.
Sia infatti $\bar{u} \in E_\lambda \cap E_{\lambda'}$, cioè $\bar{u} \in E_\lambda$, $\bar{u} \in E_{\lambda'}$.
Abbiamo quindi $f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$, $f(\bar{u}) = \lambda' \cdot \bar{u}$, da cui, poiché $\lambda \neq \lambda'$, risulterebbe che $\bar{u}$ è autovettore per due autovalori distinti, il che non è possibile. Per cui $\bar{u}$ non può essere diverso da $\bar{o}$; parimenti, tutti gli autospazi contengono $\bar{o}$, che per cui è l'unico elemento.

$f: E \xrightarrow[A]{} E$ $\qquad \bar{v} \neq \bar{o} \quad f(\bar{v}) = \lambda \cdot \bar{v}$

$e_1, \dots, e_n \quad e_1, \dots, e_n$

$\bar{v} = x_1 \bar{e_1} + \dots + x_n \bar{e_n}$

$$\lambda (x_1 \bar{e_1} + \dots + x_n \bar{e_n}) = f(x_1 \bar{e_1} + \dots + x_n \bar{e_n}) =$$
$$= x_1 \cdot f(\bar{e_1}) + x_2 \cdot f(\bar{e_2}) + \dots + x_n f(\bar{e_n})$$
$$= x_1 (a_{11} \bar{e_1} + a_{21} \bar{e_2} + \dots + a_{n1} \bar{e_n}) +$$
$$x_2 (a_{12} \bar{e_1} + a_{22} \bar{e_2} + \dots + a_{n2} \bar{e_n}) +$$
$$\dots +$$
$$x_n (a_{1n} \bar{e_1} + a_{2n} \bar{e_2} + \dots + a_{nn} \bar{e_n})$$

$$\begin{cases} \lambda x_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ \lambda x_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \dots \\ \lambda x_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

Se questo sistema omogeneo ammette soluzioni diverse da quella composta da tutti 0, ~~abbiamo~~ allora possiamo trovare un autovettore per un dato valore di λ, che è quindi autovalore

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Esercizi:

1) $f: E_3 \to E_3$

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\det = (3-\lambda) \cdot [\lambda(2-\lambda) - 2] - [2(2-\lambda) - 4] + 2 - 2\lambda = 0$$
$$(3-\lambda) \cdot \lambda \cdot (2-\lambda) - 2(3-\lambda) + 2\lambda + 2 - 2\lambda = 0$$
$$\lambda(3-\lambda)(2-\lambda) - 6 + 2\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda(3-\lambda)(2-\lambda) - 2(2-\lambda) = 0 \qquad \lambda = 2$$

$\lambda(3-\lambda)+2=0$

$\lambda^2-3\lambda+2=0 \quad \begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=2\end{cases}$

$\lambda=1$ e $\lambda=2$ (doppia) annullano il determinante.

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ 2x_1 - \lambda x_2 + 2x_3 = 0\\ 2x_1 - x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0\end{cases}$$

$\lambda = 1$:

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x_1 = t\\ x_2 = 2t\\ x_3 = 0\end{cases} \quad \dim 1$$

$\lambda = 2$:

$$\begin{cases}x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0\\ 2x_1 - x_2 = 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x_1 = t\\ x_2 = 2t\\ x_3 = t\end{cases} \quad \dim 1$$

2) $\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 0 & 8 & 9\\ 4 & 0 & 0 & 10\end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{Vmatrix}$

- Polinomio caratteristico dell'endomorfismo:

$$(-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n-1} \cdot (a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \det A$$

$a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn} = \mathrm{tr}\, A$ (traccia di A; somma degli elementi della diagonale principale)

- Proprietà della traccia:

$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$

$\mathrm{tr}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \mathrm{tr}\, A$

Esercizio. Sia A una matrice quadrata, con $\mathrm{tr}\, A = 2\cdot\sqrt{\det A}$ e ordine della matrice 2. Provare che questa matrice ammette un solo autovalore e calcolarlo.

$$\begin{Vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix}\lambda & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda\end{Vmatrix} = A-\lambda$$

Il polinomio caratteristico può essere scritto come $\det(A-\lambda\cdot I)$

$AX = \lambda X$

Cambiando la base autovettori e autovalori non cambiano:

sia infatti $f: E \longrightarrow E$, A la matrice di partenza,

$P \left(\begin{matrix} \overline{e_1}, \dots, \overline{e_n} \\ \overline{e_1}', \dots, \overline{e_n}' \end{matrix} \right. \quad \left. \begin{matrix} \overline{e_1}, \dots, \overline{e_n} \\ \overline{e_1}', \dots, \overline{e_n}' \end{matrix} \right) P$, $P^{-1}AP$ la matrice di arrivo.

Proviamo che $\det(P^{-1}AP - \lambda \cdot I) = \det(A - \lambda I)$.

Poiché $(\lambda I) \cdot P = P(\lambda I)$, dal momento che entrambe le operazioni consistono nel moltiplicare per λ tutti gli elementi di P, possiamo scrivere $P^{-1}AP - \lambda \cdot I = P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P$, da cui raccogliendo $P^{-1} \cdot (A - \lambda I) \cdot P$.

Si ha perciò: $\det(P^{-1}AP - \lambda \cdot I) = \det(P^{-1} \cdot (A - \lambda I) \cdot P) = (\det P^{-1}) \cdot (\det(A - \lambda I)) \cdot (\det P)$
$(\det P)^{-1} \cdot (\det(A - \lambda I)) \cdot (\det P) = \det(A - \lambda I)$, ovvero la tesi. Dunque gli autovalori non cambiano.

Quanto agli autovettori, $AX = \lambda_0 X$ diventa:

$$APX' = \lambda_0 (PX')$$
$$APX' = P(\lambda_0 X')$$
$$(P^{-1}AP)\, X' = \lambda_0 X'$$

pertanto si ritrovano gli stessi vettori, semplicemente espressi nella nuova base.

- La dimensione dell'autospazio E_{λ_0} è compresa fra 1 e h.

Infatti, è maggiore di 0 perché non può essere composto dal solo vettore nullo, e non può essere maggiore di h. Data $\dim E_\lambda = k$ e $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_k}$ una base di E_{λ_0}, per il teorema della base incompleta posso formare una base di E formata da $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}, \overline{e_{k+1}}, \overline{e_n}$. Ora, poiché

$f(\overline{v_1}) = \lambda_0 \cdot \overline{v_1}$ $\quad f(\overline{v_2}) = \lambda_0 \cdot \overline{v_2}$ $\quad \dots \quad f(\overline{v_k}) = \lambda_0 \cdot \overline{v_k}$

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{Vmatrix}$$

$$A - \lambda \cdot I = \begin{Vmatrix} \lambda_0 - \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & \dots & 0 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} - \lambda & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{Vmatrix}$$

sviluppando sempre rispetto alla prima colonna

$$\det(A - \lambda \cdot I) = (\lambda - \lambda_0)^k \cdot B$$

Dunque λ_0 ha molteplicità almeno k, e per cui $h \geq k$, da cui $k \leq h$.

Esercizio enunciato prima.

Si scrive il polinomio caratteristico: poiché $n=2$, questo è dato da

$$\lambda^2 - (\mathrm{tr}\,A)\cdot\lambda + \det A = 0$$

Per l'ipotesi ~~[illegible]~~ che lega tr A e det A abbiamo:

$$\lambda^2 - 2\cdot\sqrt{\det A}\cdot\lambda + \det A = 0$$

$$(\lambda - \sqrt{\det A})^2 = 0$$

Per cui l'unico autovalore è dato da $\sqrt{\det A}$

Esercizio:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \det\begin{Vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{Vmatrix} \qquad \lambda = 1 \text{ doppio}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \det\begin{Vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{Vmatrix} \qquad \lambda = 1 \text{ doppio}$$

Gli autovalori sono gli stessi, ma gli autospazi sono differenti:

nel primo caso si ha il sistema $\begin{cases} (1-\lambda)\,x_1 + x_2 = 0 \\ (1-\lambda)\,x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = 0 \end{cases}$

nel secondo caso si ha il sistema $\begin{cases} (1-\lambda)\,x_1 = 0 \\ (1-\lambda)\,x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = h \\ x_2 = k \end{cases}$

per cui nel primo i vettori con $x_2 = 0$ sono autovettori, nel secondo tutti i vettori lo sono (si tratta infatti dell'identità)

Diagonalizzazione di un endomorfismo

$f: E_n \to E_n$

$e_1, \dots, e_n \quad A \quad e_1, \dots, e_n$

Def. Una matrice si definisce diagonale se tutti gli elementi che non stanno sulla diagonale principale valgono 0.

Def. Un endomorfismo si dice diagonalizzabile se esiste una base di E tale che, rappresentando l'endomorfismo rispetto a questa base, la matrice risulta essere diagonale.

Def. Una matrice si definisce diagonalizzabile se è matrice di un endomorfismo diagonalizzabile; in altre parole se è simile ad una matrice diagonale. Si dice che una matrice B è simile ad una matrice A se esiste una matrice P invertibile tale che $B = P^{-1}AP$

Un endomorfismo è diagonalizzabile se e soltanto se esiste una base di autovettori.

Sia una base $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}$ tale che $f(\overline{v_1}) = \lambda_1 \cdot \overline{v_1}, \dots, f(\overline{v_n}) = \lambda_n \cdot \overline{v_n}$.

Allora:

$$B = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

Un endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se la somma diretta degli autospazi coincide con E.

$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$

$\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n} \quad A \quad \overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ P

$\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n} \quad D \quad \overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}$

$D = P^{-1}AP$

D e A hanno lo stesso polinomio caratteristico e in particolare

$\operatorname{tr} D = \operatorname{tr} A \quad , \quad \det D = \det A$

Esercizio:

Una matrice di ordine 4 ha due autovalori doppi, reali e positivi. Sapendo che $\det(A^{-36}) = 36^{-36}$, trovare gli autovalori. La matrice è diagonalizzabile e invertibile. La traccia della matrice vale 10.

Dimostrazione:

Ip: f diagonalizzabile Tesi: $E_n = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$

Poiché $E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p} \subseteq E_n$ è sempre vera, poiché la somma di sottospazi è a sua volta un sottospazio, ci resta da dimostrare che
$E_n \subseteq E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$

Esprimiamo ora $\overline{v}$ come c.l. di autovettori:
$$\overline{v} = \alpha_1 \overline{v}_1 + \alpha_2 \overline{v}_2 + \alpha_3 \overline{v}_3 + \alpha_4 \overline{v}_4 + \alpha_5 \overline{v}_5 + \ldots + \alpha_n \overline{v}_n$$
Supponiamo ora, per esempio, che $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ stiano in E_{λ_1}, $\overline{v}_4, \overline{v}_5$ stiano in E_{λ_2}, e così via. Poiché $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots$ sono sottospazi, si ha che $\alpha_1 \overline{v}_1 + \alpha_2 \overline{v}_2 + \alpha_3 \overline{v}_3$ appartiene ad E_{λ_1}, $\alpha_4 \overline{v}_4 + \alpha_5 \overline{v}_5$ appartiene ad E_{λ_2}, e così via.

Dunque un qualsiasi vettore $\overline{v} \in E_n$ appartiene anche a $E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$.

Ip: ~~Tesi~~: $E_n = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$ Tesi: f diagonalizzabile

Per l'ipotesi una base di E si ottiene con l'unione delle basi di $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ che formano quindi una base di autovettori, per cui f è diagonalizzabile.

<u>Criterio</u>: f è diagonalizzabile se e solo se:

(i) $P(\lambda)$ è interamente decomponibile (la somma delle molteplicità delle radici reali è pari al grado)

(ii) la molteplicità geometrica e quella algebrica coincidono:
$\forall \lambda_i$, $\dim E_{\lambda_i} = h_i$

Dim. "$\Rightarrow$" Per quanto visto prima $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$

Ne segue che: $n = \dim E = \dim(E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}) =$
$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \ldots + \dim E_{\lambda_p}$.

Supponiamo ora per assurdo che la (ii) non valga.

Ciò significa che esiste un indice m tale per cui $\dim E_{\lambda_m} < h_m$. Ma allora $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} < h_1 + \ldots + h_p$, da cui $n < h_1 + \ldots + h_p$, il che però non può essere, perché la somma delle molteplicità delle radici non può superare il grado del polinomio.

Poiché allora $n = h_1 + \ldots + h_p$, è verificata anche la (i).

"$\Leftarrow$" Consideriamo $\dim(E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p})$. Sappiamo che questa è uguale a $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p}$. Valendo la (ii) per ipotesi questa è uguale a $h_1 + \ldots + h_p$; valendo anche la (i) per ipotesi questa è uguale a n; ne segue che $E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$ coincide con E, che quindi risulta essere diagonalizzabile

Corollario: Se il polinomio caratteristico ammette n valori semplici, allora f è diagonalizzabile.

Infatti $1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq h_i$, per ipotesi $\forall i$ $h_i = 1$, e quindi $\dim E_{\lambda_i} = 1$, in particolare $\dim E_{\lambda_i} = h_i$, e quindi vale la (ii). Vale anche la (i) poiché, dal momento che sono ammessi dal polinomio n valori semplici, il polinomio è completamente decomponibile in fattori di primo grado.

Esercizio:

Si ha una matrice diagonalizzabile invertibile. Provare che il determinante è positivo se e soltanto se la somma delle molteplicità degli autovalori negativi è pari.

Esercizio:

Sia $A = \begin{Vmatrix} 1 & - & 0 \\ 0 & - & 1 \\ - & - & 1 \end{Vmatrix}$. Completare la matrice sapendo che $f(\overline{e_2} + \overline{e_3}) = -2\overline{e_1} + 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$ e $\lambda = -1$ è autovalore.

$f(\overline{e_2}) + f(\overline{e_3}) = -2\overline{e_1} + 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$

$f(\overline{e_2}) = -2\overline{e_1} + \overline{e_2}$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ k & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (1-\lambda)^2 - 2k = (1-\lambda)^3 - 2k = 0$$

da cui, ponendo $\lambda = -1$:

$8 - 2k = 0$

$k = 4$

Esercizio:

Sia $A = \begin{Vmatrix} 1 & - & 3 \\ 2 & - & 4 \\ 1 & - & - \end{Vmatrix}$. Completare la matrice sapendo che $\overline{e_1} + \overline{e_2}$ è autovettore di autovalore 2 e che f non è iniettiva.

$f(\overline{e_1} + \overline{e_2}) = 2 \cdot (\overline{e_1} + \overline{e_2}) = 2\overline{e_1} + 2\overline{e_2}$

$f(\overline{e_1}) + f(\overline{e_2}) = 2 \cdot \overline{e_1} + 2 \cdot \overline{e_2}$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & k \end{Vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & k \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (k+3) - 4 \cdot (-2) = 0$$

$-2k - 6 + 8 = 0$

$-2k + 2 = 0$

$k = 1$

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad f(\overline{e_2}) = 2e_1$

$$A = \begin{Vmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} a-\lambda & 2 \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (a-\lambda)(-\lambda) - 2b = 0$$
$$\lambda^2 - a\lambda - 2b = 0$$

$$\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 1 - a - 2b = 0 \\ 4 - 2a - 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \overline{e_1}, \overline{e_2}$ base canonica, matrice simmetrica, autovalori opposti
$f(\overline{e_1} + \overline{e_2}) = 3 \cdot \overline{e_1} - \overline{e_2}$

Verificare che se la matrice dell'endomorfismo è di questo tipo, allora sono sempre ammessi valori reali.

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ b & d \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{Vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0 \qquad a + d = 0$$

$$f(\overline{e_1}) + f(\overline{e_2}) = 3\overline{e_1} - \overline{e_2}$$

$$a\overline{e_1} + b\overline{e_1} + b\overline{e_2} - a\overline{e_2} = 3\overline{e_1} - \overline{e_2}$$

$$(a+b)\,\overline{e_1} + (b-a)\,\overline{e_2} = 3\overline{e_1} - \overline{e_2} \qquad b = 1 \qquad a = 2$$

$$\Delta \quad (a+d)^2 - 4ad + 4b^2$$
$$a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4b^2$$
$$a^2 + d^2 - 2ad + 4b^2$$
$$(a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$$

Forme bilineari e forme quadratiche

Def. Siano E, F, G tre spazi vettoriali con lo stesso campo degli scalari. Sia il prodotto cartesiano $E \times F$. Si definisce come applicazione bilineare una funzione $\varphi: E \times F \to G$, che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\varphi: E \times F \to G$$

$\bar{x} \in E, \bar{y} \in F \; (\bar{x}, \bar{y}) \to \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in G$

$\bar{x_1}, \bar{x_2} \in E$ 1) $\varphi(\bar{x_1} + \bar{x_2}, \bar{y}) = \varphi(\bar{x_1}, \bar{y}) + \varphi(\bar{x_2}, \bar{y})$

$\bar{y_1}, \bar{y_2} \in F$ 2) $\varphi(\bar{x}, \bar{y_1} + \bar{y_2}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y_1}) + \varphi(\bar{x}, \bar{y_2})$

$\lambda \in k$ 3) $\varphi(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda \cdot \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{x}, \lambda \cdot \bar{y})$

Def. Si definisce forma bilineare un'applicazione lineare nel campo degli scalari.

$$\varphi: E \times F \to k$$

$E \quad \bar{e_1}, \bar{e_2}, \dots, \bar{e_n} \qquad \bar{x} = x_1\bar{e_1} + x_2\bar{e_2} + \dots + x_n\bar{e_n}$

$F \quad \bar{f_1}, \bar{f_2}, \dots, \bar{f_m} \qquad \bar{y} = y_1\bar{f_1} + y_2\bar{f_2} + \dots + y_m\bar{f_m}$

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(x_1\bar{e_1} + x_2\bar{e_2} + \dots + x_n\bar{e_n}, \; y_1\bar{f_1} + y_2\bar{f_2} + \dots + y_m\bar{f_m}) =$$

$$\left[\begin{array}{l} \varphi(x_1\bar{e_1}, y_1\bar{f_1} + y_2\bar{f_2} + \dots + y_m\bar{f_m}) + \\ \varphi(x_2\bar{e_2}, y_1\bar{f_1} + y_2\bar{f_2} + \dots + y_m\bar{f_m}) + \dots + \\ \varphi(x_n\bar{e_n}, y_1\bar{f_1} + y_2\bar{f_2} + \dots + y_m\bar{f_m}) \end{array}\right. =$$

$$= x_1 \cdot \varphi(\bar{e_1}, y_1\bar{f_1} + \dots + y_m\bar{f_m}) + x_2 \cdot \varphi(\bar{e_2}, y_1\bar{f_1} + \dots + y_m\bar{f_m}) + \dots + x_n\varphi(\bar{e_n}, y_1\bar{f_1} + \dots$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 \cdot (\varphi(\bar{e_1}, y_1\bar{f_1}) + \varphi(\bar{e_1}, y_2\bar{f_2}) + \dots + \varphi(\bar{e_1}, y_m\bar{f_m})) + \\ x_2 \cdot (\varphi(\bar{e_2}, y_1\bar{f_1}) + \varphi(\bar{e_2}, y_2\bar{f_2}) + \dots + \varphi(\bar{e_2}, y_m\bar{f_m})) + \dots + \\ x_n \cdot (\varphi(\bar{e_n}, y_1\bar{f_1}) + \varphi(\bar{e_n}, y_2\bar{f_2}) + \dots + \varphi(\bar{e_n}, y_m\bar{f_m})) \end{array}\right. =$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1y_1 \cdot \varphi(\bar{e_1}, \bar{f_1}) + x_1y_2 \cdot \varphi(\bar{e_1}, \bar{f_2}) + \dots + x_1 \cdot y_m \cdot \varphi(\bar{e_1}, \bar{f_m}) + \\ x_2y_1 \cdot \varphi(\bar{e_2}, \bar{f_1}) + x_2y_2 \cdot \varphi(\bar{e_2}, \bar{f_2}) + \dots + x_2 \cdot y_m \cdot \varphi(\bar{e_2}, \bar{f_m}) + \dots + \\ x_ny_1 \cdot \varphi(\bar{e_n}, \bar{f_1}) + x_ny_2 \cdot \varphi(\bar{e_n}, \bar{f_2}) + \dots + x_n \cdot y_m \cdot \varphi(\bar{e_n}, \bar{f_m}) \end{array}\right.$$

$\varphi(\bar{e_1}, \bar{f_1}) = a_{11} \qquad \varphi(\bar{e_1}, \bar{f_2}) = a_{12} \qquad \dots \qquad \varphi(\bar{e_1}, \bar{f_m}) = a_{1m}$

$\varphi(\bar{e_2}, \bar{f_1}) = a_{21} \qquad \varphi(\bar{e_2}, \bar{f_2}) = a_{22} \qquad \dots \qquad \varphi(\bar{e_2}, \bar{f_m}) = a_{2m}$

$\dots \dots \qquad \dots \dots \qquad \dots \qquad \dots \dots$

$\varphi(\bar{e_n}, \bar{f_1}) = a_{n1} \qquad \varphi(\bar{e_n}, \bar{f_2}) = a_{n2} \qquad \dots \qquad \varphi(\bar{e_n}, \bar{f_m}) = a_{nm}$

$$A = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{matrix}\right\| \qquad \varphi(\bar{e_i}, \bar{f_j}) = a_{ij}$$

matrice della forma bilineare

$$X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix} \right\| \qquad Y = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{matrix} \right\| \qquad {}^tX = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{matrix} \right\|$$

$$AY = \left\| \begin{matrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1m}y_m \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nm}y_m \end{matrix} \right\|$$

$${}^tXAY = \left\| x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1m}y_m) + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m) + \dots + x_n(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nm}y_m) \right\| =$$

$$\left\| a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{1m}x_1y_m + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \dots + a_{2m}x_2y_m + \dots + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \dots + a_{nm}x_ny_m \right\| = \left\| \varphi(\overline{x},\overline{y}) \right\|$$

$$\varphi(\overline{x},\overline{y}) = {}^tX \cdot A \cdot Y = {}^t({}^tX \cdot A \cdot Y) = {}^tY \cdot {}^tA \cdot X$$

Cambio di base:

$$N \circlearrowleft \begin{matrix} E \\ \overline{e_1}, \dots, \overline{e_n} \\ \overline{e_1}', \dots, \overline{e_n}' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} F \\ \overline{f_1}, \dots, \overline{f_n} \\ \overline{f_1}', \dots, \overline{f_n}' \end{matrix} \circlearrowright P \qquad \begin{matrix} \overline{x} = x_1'\overline{e_1}' + \dots + x_n'\overline{e_n}' \\ \overline{y} = y_1'\overline{f_1}' + \dots + y_m'\overline{f_m}' \end{matrix}$$

$X = NX'$

$Y = PY'$

$\varphi(\overline{x},\overline{y}) = {}^tXAY = {}^t(NX')APY' = {}^tX'\,{}^tNAPY'$

Sia ora $E = F$. Abbiamo ~~una~~ ~~questa~~ un'applicazione così definita:

$\varphi: E \times E \to K$

$\overline{x}, \overline{y} \in E \qquad (\overline{x},\overline{y}) \to \varphi(\overline{x},\overline{y}) \in K$

Def. Una forma bilineare si dice simmetrica se, comunque scelti $\overline{x}, \overline{y} \in E$, si ha $\varphi(\overline{x},\overline{y}) = \varphi(\overline{y},\overline{x})$.

Def. Sia $\varphi: E \times E \to K$, si definisce forma quadratica e si indica con $\Phi(\overline{x})$ l'applicazione $\overline{x} \to \varphi(\overline{x},\overline{x})$ [φ simmetrica]

Proprietà della forma quadratica:

1) $\Phi(\lambda\overline{x}) = \varphi(\lambda\overline{x},\lambda\overline{x}) = \lambda^2 \cdot \varphi(\overline{x},\overline{x}) = \lambda^2 \cdot \Phi(x)$

2) $\Phi(\overline{x}+\overline{y}) = \varphi(\overline{x}+\overline{y},\overline{x}+\overline{y}) = \varphi(\overline{x},\overline{x}+\overline{y}) + \varphi(\overline{y},\overline{x}+\overline{y}) =$
$\varphi(\overline{x},\overline{x}) + \varphi(\overline{x},\overline{y}) + \varphi(\overline{y},\overline{x}) + \varphi(\overline{y},\overline{y}) = \Phi(x) + \Phi(y) + 2 \cdot \varphi(\overline{x},\overline{y})$

$$\varphi(\overline{x},\overline{y}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\Phi(\overline{x}+\overline{y}) - \Phi(x) - \Phi(y) \right]$$

Espressioni matriciali

$\Phi(x) = \varphi(\bar{x}, \bar{x}) = {}^tXAX$

${}^tXAX = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots +$
$a_{n1}x_1x_n + a_{n2}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2 =$
$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2$

Def. Due vettori si dicono coniugati se $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

Proprietà del coniugio:

- se il vettore x è coniugato ai vettori $y_1, y_2, \dots, y_m$, allora è coniugato anche ad una qualsiasi loro combinazione lineare;
- il vettore nullo è coniugato di ogni vettore.

Def. Si definisce nucleo della forma bilineare e si indica con $\ker\varphi$ l'insieme dei vettori coniugati di ogni vettore.

$\ker\varphi = \{\bar{x} \in E \,/\, \forall y \in E \;\; \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}$ $\quad 0 \in \ker\varphi$

Se il nucleo si riduce al solo vettore nullo, la forma bilineare simmetrica e la corrispondente forma quadratica associata si dicono NON DEGENERI; altrimenti si dicono DEGENERI.

Prop. Sia F sottoinsieme (non per forza sottospazio) di E. Consideriamo i vettori x di E che sono coniugati di ogni vettore y di F. Allora l'insieme degli x è un sottospazio vettoriale.

Dim. Ipotesi: $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \{\bar{x} \in E \,/\, \forall \bar{y} \in F \;\; \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}$

Tesi: $\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2 \in \{\bar{x} \in E \,/\, \forall \bar{y} \in F \;\; \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}$

$\varphi(\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2, \bar{y}) = \alpha \cdot \varphi(\bar{x}_1, \bar{y}) + \beta \cdot \varphi(\bar{x}_2, \bar{y}) = \bar{0}$, poiché per ipotesi $\varphi(\bar{x}_1, \bar{y}) = \varphi(\bar{x}_2, \bar{y}) = 0$, il che prova la tesi.

Come trovare $\ker\varphi$

Prop. $\bar{x} \in \ker\varphi \iff \forall \bar{y} \in E \;\; \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \varphi(\bar{x}_1, \bar{e}_1) = \dots = \varphi(\bar{x}_1, \bar{e}_n) =$

$\iff \varphi(\bar{e}_1, \bar{x}) = \varphi(\bar{e}_2, \bar{x}) = \dots = \varphi(\bar{e}_n, \bar{x}) = \bar{0}$

$\varphi(\bar{e}_1, x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n) = 0 = \dots = \varphi(\bar{e}_n, x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n)$

$x_1 \cdot \varphi(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + x_2 \cdot \varphi(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + \dots + x_n \cdot \varphi(\bar{e}_1, \bar{e}_n)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \implies A = 0$$

$\bar{x} \in E$ ISOTROPO se $\Phi(\bar{x}) = 0 \iff \varphi(\bar{x}, \bar{x}) = 0$

$\bar{x} \in \ker\varphi \to \bar{x}$ isotropo

Esercizi

- $A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2\sqrt{2} \\ -3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 6 \end{Vmatrix}$

$\varphi(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 2\sqrt{2}\,x_1y_3 - 3x_2y_1 + x_2y_2 + 2\sqrt{2}\,x_2y_3 - 2\sqrt{2}\,x_3y_1 + 2\sqrt{2}\,x_3y_2 + 6x_3y_3$

$\Phi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x},\bar{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 - 4\sqrt{2}\,x_1x_3 + x_2^2 + 4\sqrt{2}\,x_2x_3 + 6x_3^2$

- $\Phi(\bar{x}) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$

$A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 5 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 3 & 1 \end{Vmatrix}$

- $F = \{\bar{x} \,/\, \varphi(\bar{x},\bar{a}) = 0 \quad \bar{a} = (0,-1,0)\}$ $\quad A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2\sqrt{2} \\ -3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 6 \end{Vmatrix}$

$\varphi(\bar{x},\bar{a}) = 0(x_1 - 3x_2 - 2\sqrt{2}\,x_3) - 1(-3x_1 + x_2 + 2\sqrt{2}\,x_3) + 0(-2\sqrt{2}\,x_1 + 2\sqrt{2}\,x_2 + 6x_3) =$

$= 3x_1 - x_2 - 2\sqrt{2}\,x_3 = 0 \rightarrow x_2 = 3x_1 - 2\sqrt{2}\,x_3$

$\bar{x} \mid (x_1,\ 3x_1 - 2\sqrt{2}\,x_3,\ x_3) = x_1(1,3,0) + x_3(0,-2\sqrt{2},1)$

- $E_2 \quad \bar{e_1}, \bar{e_2} \qquad \bar{u} = \bar{e_1} + \bar{e_2} \qquad \bar{v} = -\bar{e_1} + \bar{e_2} \qquad \bar{w} = \bar{e_1} - 2\bar{e_2}$

$\Phi(\bar{u}) = -2 \qquad \Phi(\bar{v}) = 6 \qquad \Phi(\bar{w}) = 13$

$A = \begin{Vmatrix} \varphi(\bar{e_1},\bar{e_1}) & \varphi(\bar{e_1},\bar{e_2}) \\ \varphi(\bar{e_1},\bar{e_2}) & \varphi(\bar{e_2},\bar{e_2}) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Phi(\bar{e_1}) & \varphi(\bar{e_1},\bar{e_2}) \\ \varphi(\bar{e_1},\bar{e_2}) & \Phi(\bar{e_2}) \end{Vmatrix}$

$\Phi(\bar{u}) = -2 \qquad \Phi(\bar{e_1}+\bar{e_2}) = -2 = \Phi(\bar{e_1}) + 2\cdot\varphi(\bar{e_1},\bar{e_2}) + \Phi(\bar{e_2})$

$\Phi(\bar{v}) = 6 \qquad \Phi(-\bar{e_1}+\bar{e_2}) = 6 = \Phi(-\bar{e_1}) + 2\cdot\varphi(-\bar{e_1},\bar{e_2}) + \Phi(\bar{e_2}) =$

$\Phi(\bar{e_1}) - 2\cdot\varphi(\bar{e_1},\bar{e_2}) + \Phi(\bar{e_2})$

$\Phi(\bar{w}) = 13 \qquad \Phi(\bar{e_1} - 2\bar{e_2}) = 13 = \Phi(\bar{e_1}) + 2\cdot\varphi(\bar{e_1},-2\bar{e_2}) + \Phi(-2\bar{e_2}) =$

$\Phi(\bar{e_1}) - 4\cdot\varphi(\bar{e_1},\bar{e_2}) + 4\cdot\Phi(\bar{e_2})$

$$\begin{cases} \Phi(\bar{e_1}) + 2\cdot\varphi(\bar{e_1},\bar{e_2}) + \Phi(\bar{e_2}) = -2 \\ \Phi(\bar{e_1}) - 2\cdot\varphi(\bar{e_1},\bar{e_2}) + \Phi(\bar{e_2}) = 6 \\ \Phi(\bar{e_1}) - 4\cdot\varphi(\bar{e_1},\bar{e_2}) + 4\cdot\Phi(\bar{e_2}) = 13 \end{cases}$$

- $A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & a & b \end{Vmatrix}$ $\qquad \bar{v_1} = \bar{e_1} + \bar{e_2} + \bar{e_3}$, $\quad \bar{v_2} = 2\bar{e_1} - \bar{e_3}$, $\quad \bar{v_3} = \bar{e_1} + \bar{e_2}$

a) Scrivere φ

b) Per quali valori di a, b v_1 è coniugato sia con v_2, sia con v_3

c) Per i valori trovati nel punto b), v_1 è coniugato anche con $2v_2 + v_3$?

d) Per quali valori di a, b u_2 è vettore isotropo?

e) $u_2 \in \ker f$?

f) Provare che per $b = 4$ la forma quadratica è non definita

g) Per quali valori di a, b φ è non degenere?

h) Per quali valori di a, b la matrice A è invertibile?

i) Provare che $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ sono una base di E_3

l) Perché anche $f(\bar{u}_1), f(\bar{u}_2), f(\bar{u}_3)$ sono una base di E_3, per $a \neq b$?

$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$

$\phi : E \to \mathbb{R} \qquad \phi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}, \bar{x})$

Una forma quadratica si dice semidefinita positiva, se, $\forall x \in E$, $\phi(\bar{x}) \geq 0$; si dice semidefinita negativa se, $\forall x \in E$, $\phi(\bar{x}) \leq 0$.

Una forma quadratica si dice definita positiva se è semidefinita positiva e $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{o}$; si dice definita negativa se è semidefinita negativa e $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{o}$; si dice non definita se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa.

Una forma quadratica definita è non degenere.

- Disuguaglianza di Schwarz: sia una forma quadratica semidefinita, allora dati due vettori $\bar{x}, \bar{y} \in E$ $|\varphi(\bar{x}, \bar{y})| \leq \sqrt{\Phi(x) \cdot \Phi(y)}$

Dimostrazione: sia $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\Phi(\lambda\bar{x} + \bar{y}) = \Phi(\lambda\bar{x}) + 2\varphi(\lambda\bar{x}, \bar{y}) + \Phi(\bar{y}) =$
$\lambda^2 \cdot \Phi(\bar{x}) + 2\lambda \cdot \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \Phi(\bar{y})$.

Supponiamo ora $\Phi(\bar{x}) \neq 0$. Otteniamo un trinomio di secondo grado in λ. Affinché questo trinomio non cambi di segno deve verificarsi $\frac{\Delta}{4} \leq 0$, ossia $\varphi^2(\bar{x}, \bar{y}) - \Phi(x) \cdot \Phi(y) \leq 0$, da cui $\varphi^2(\bar{x}, \bar{y}) \leq \Phi(\bar{x}) \cdot \Phi(\bar{y})$. Estraendo la radice da entrambi i membri si ottiene la tesi.

Se invece $\Phi(\bar{x}) = 0$, il trinomio diventa un binomio di primo grado $2\lambda \cdot \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \Phi(\bar{y})$. Affinché il binomio non cambi di segno deve essere costante, in quanto una funzione di primo grado non costante cambia di segno. Ne segue che $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. La tesi è dimostrata poiché, sostituendo nella disuguaglianza ne risulta l'identità $0 \leq 0$

- Disuguaglianza di Minkowski: sia una forma quadratica semidefinita positiva, comunque scelti due vettori $\bar{x}, \bar{y}$ ne segue che $\sqrt{\Phi(\bar{x}+\bar{y})} \leq \sqrt{\Phi(\bar{x})} + \sqrt{\Phi(\bar{y})}$

Dimostrazione: $\Phi(\bar{x}+\bar{y}) = \Phi(x) + 2\cdot\varphi(\bar{x},\bar{y}) + \Phi(y) \leq \Phi(x) + 2\cdot|\varphi(\bar{x},\bar{y})| + \Phi(y)$

Per la disuguaglianza di Schwarz si ottiene:

$\Phi(x) + 2\cdot|\varphi(\bar{x},\bar{y})| + \Phi(y) \leq \Phi(x) + 2\cdot\sqrt{\Phi(x)\cdot\Phi(y)} + \Phi(y)$

che è uguale a $(\sqrt{\Phi(x)} + \sqrt{\Phi(y)})^2$

Estraendo la radice di entrambi i membri si ottiene la tesi.

- Per ogni forma quadratica semidefinita, ogni vettore isotropo appartiene al nucleo.

x isotropo $\rightarrow$ $\bar{x} \in \ker\varphi$

$\Phi(x) = 0 \rightarrow \forall y \in E,\ \varphi(\bar{x},\bar{y}) = 0$

Si dimostra sostituendo a secondo membro nella disuguaglianza di Schwarz $\Phi(x) = 0$, da cui $\sqrt{\Phi(x)\cdot\Phi(y)} = 0$ e quindi $|\varphi(\bar{x},\bar{y})| = 0$, da cui la tesi.

Conseguenza: se si trova un vettore isotropo che non sta nel nucleo, si può dedurre che la forma quadratica è non definita.

Esercizio:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & a & b \end{Vmatrix}$$

a). $\varphi(\bar{x},\bar{y}) = 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + a\cdot x_2y_3 + x_3y_1 + a\cdot x_3y_2 + b\cdot x_3y_3$

$\Phi(x) = 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2a\cdot x_2x_3 + b\cdot x_3x_3$

b). $\bar{u}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ $\quad \bar{u}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_3$ $\quad \bar{u}_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$

$\varphi(\bar{u}_1,\bar{u}_2) = 0 \quad \varphi(\bar{u}_1,\bar{u}_3) = 0 \rightarrow \begin{cases} 5-a-b=0 \\ 5+a=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a=-5 \\ b=10 \end{matrix}$

c) $\bar{u}_1$ è coniugato di $2\bar{u}_2 + \bar{u}_3$ poiché essendo coniugato di $\bar{u}_2$ e $\bar{u}_3$ è coniugato di ogni loro combinazione lineare.

d) $\Phi(\bar{u}_2) = 0 \rightarrow \varphi(\bar{u}_2,\bar{u}_2) = 0 \rightarrow b = 4$

e) $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2\cdot x_1 + a\cdot x_3 = 0 \\ x_1 + a\cdot x_2 + b\cdot x_3 = 0 \end{cases}$

Sostituendo i valori di $\bar{u}_2 = (2,0,-1)$ si ottiene una contraddizione per cui $\notin \ker f$

f) Perché si trova un vettore isotropo che non sta nel nucleo.

g) $\det A \neq 0 \Rightarrow a \neq 6$ $\qquad$ h) $\det A \neq 0 \Rightarrow a \neq 6$

i) $\det \neq 0$ ..

l) Perché con $a \neq 6$ f è isomorfismo.

SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI

E: spazio vettoriale che ha come campo degli scalari R e che va considerato congiuntamente con una forma bilineare simmetrica la cui forma quadratica associata è definita positiva.

$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}$ prodotto scalare

$\Phi(x) = \varphi(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{x} = \bar{x}^2$

proprietà da essere verificate

$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{y}, \bar{x})$ 1) $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$

$\varphi(\bar{x}+\bar{x}', \bar{y}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \varphi(\bar{x}', \bar{y})$ 2) $(\bar{x}+\bar{x}') \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x}' \cdot \bar{y}$

$\varphi(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda \cdot \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ 3) $(\lambda \bar{x}) \cdot \bar{y} = \lambda (\bar{x} \cdot \bar{y})$

$\Phi(x) \geq 0$ $\bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0$ 4) $\forall \bar{x}$ $x^2 \geq 0$

$\Phi(x) = 0 \iff \bar{x} = \bar{0}$ 5) $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \iff \bar{x} = 0$

In uno spazio vettoriale euclideo è possibile definire la norma di un vettore:

$0 \leq \|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x}^2} = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{\Phi(x)} = \sqrt{\varphi(\bar{x}, \bar{x})}$

$\|\bar{x}\| = 0 \iff \bar{x} = \bar{0}$, in quanto:

$\|\bar{x}\| = 0 \iff \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = 0 \iff \bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \iff \bar{x} = 0$

Proprietà della norma:

$\|\lambda \bar{x}\| = \sqrt{\Phi(\lambda \bar{x})} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \Phi(x)} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\Phi(x)} = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$

$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$ (segue dalla disuguaglianza di Schwarz)

$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (segue dalla disuguaglianza di Minkowski)

Dalla disuguaglianza di Schwarz segue:

$$0 \leq \frac{|\bar{x} \cdot \bar{y}|}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|} \leq 1$$

Si definisce angolo di due vettori l'angolo α per cui:

$$\cos \alpha = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$$

Esempio:

$E = R^n$ $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

Valgono tutte e cinque le proprietà:

$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$

$(\bar{x} + \bar{x}') \cdot y = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x}' \cdot \bar{y}$ posto $\bar{x}' = (x_1', \dots, x_n')$

$(\lambda \bar{x}) \cdot \bar{y} = \lambda (\bar{x} \cdot \bar{y})$

$\Phi(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$ $\Phi(x) = 0 \to x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \to x_1 = \dots = x_n = 0$

$$(\overline{x}+\overline{x}')\cdot\overline{y} = [(x_1, x_2, \dots, x_n) + (x_1', x_2', \dots, x_n')], (y_1, y_2, \dots, y_n) =$$
$$(x_1+x_1', x_2+x_2', \dots, x_n+x_n')(y_1, y_2, \dots, y_n) =$$
$$(x_1+x_1')y_1 + (x_2+x_2')y_2 + \dots + (x_n+x_n')y_n =$$
$$x_1y_1 + x_1'y_1 + x_2y_2 + x_2'y_2 + \dots + x_ny_n + x_n'y_n$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n + x_1'y_1 + x_2'y_2 + \dots + x_n'y_n$$
$$\overline{x}\cdot\overline{y} + \overline{x}'\cdot\overline{y}$$

-ecc...

Due vettori coniugati, tali che $\varphi(\overline{x},\overline{y}) = \overline{x}\cdot\overline{y} = 0$, si dicono ortogonali

Una base si dice ortonormale se è costituita da vettori ortogonali a due a due e di norma 1

In una base ortonormale:

$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + \dots + x_n\overline{e_n}$ $\qquad$ $\overline{y} = y_1\overline{e_1} + \dots + y_n\overline{e_n}$

$$\overline{x}\cdot\overline{y} = (x_1\overline{e_1} + \dots + x_n\overline{e_n})\cdot(y_1\overline{e_1} + \dots + y_n\overline{e_n}) =$$
$$x_1y_1\,\overline{e_1}\cdot\overline{e_1} + x_1y_2\,\overline{e_1}\cdot\overline{e_2} + \dots + x_1y_n\,\overline{e_1}\cdot\overline{e_n} +$$
$$x_2y_1\,\overline{e_2}\cdot\overline{e_1} + x_2y_2\,\overline{e_2}\cdot\overline{e_2} + \dots + x_2y_n\,\overline{e_2}\cdot\overline{e_n} +$$
$$\dots +$$
$$x_ny_1\,\overline{e_n}\cdot\overline{e_1} + x_ny_2\,\overline{e_n}\cdot\overline{e_2} + \dots + x_ny_n\,\overline{e_n}\cdot\overline{e_n} =$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n, \quad \text{poiché} \quad \overline{e_i}\cdot\overline{e_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1y_1 + \dots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2} + \sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}}$$

$$\|x\| = \sqrt{\overline{x}\cdot\overline{x}} = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$$

Un insieme di vettori ortogonali (non nulli) è linearmente indipendente

$\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$ ortogonali, $\alpha_1\overline{v_1} + \alpha_2\overline{v_2} + \dots + \alpha_n\overline{v_n} = \overline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Infatti:

$(\alpha_1\overline{v_1} + \alpha_2\overline{v_2} + \dots + \alpha_n\overline{v_n})\cdot\overline{v_1} = \overline{0}\cdot\overline{v_1}$

$\alpha_1\overline{v_1}\cdot\overline{v_1} + \alpha_2\overline{v_2}\cdot\overline{v_1} + \dots \alpha_n\overline{v_n}\cdot\overline{v_1} = 0$

$\alpha_1\cdot\|\overline{v_1}\|^2 = 0$

$\alpha_1 = 0$ poiché i vettori non sono nulli.

Moltiplicando invece per $\overline{v_2}$ si trova che $\alpha_2 = 0$, e così via fino a provare che $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$
$\overline{e_1}', \overline{e_2}', \dots, \overline{e_n}'$ 2 basi ortonormali

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad \begin{aligned} \overline{e_1}' &= a_{11}\cdot\overline{e_1} + a_{21}\cdot\overline{e_2} + \dots + a_{n1}\cdot\overline{e_n} \\ \overline{e_2}' &= a_{12}\cdot\overline{e_1} + a_{22}\cdot\overline{e_2} + \dots + a_{n2}\cdot\overline{e_n} \\ &\dots \\ \overline{e_n}' &= a_{1n}\cdot\overline{e_1} + a_{2n}\cdot\overline{e_2} + \dots + a_{nn}\cdot\overline{e_n} \end{aligned}$$

$${}^tA = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

$${}^tA\cdot A = \begin{Vmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + \dots + a_{n1}a_{n2} & \dots \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + \dots + a_{n2}a_{n1} & a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{n2}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \|e_1'\|^2 & e_1\cdot e_2 & \dots \\ e_2\cdot e_1 & \|e_2'\|^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix} = I_n$$

Dunque la matrice A è ortogonale.

Trasformazione di una base in una base ortonormale

base $\longrightarrow$ base ortogonale $\longrightarrow$ base ortonormale

$\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}$

$$\overline{e_1} = \frac{\overline{u_1}}{\|\overline{u_1}\|} \quad \overline{e_2} = \frac{\overline{u_2}}{\|\overline{u_2}\|} \quad \dots \quad \overline{e_n} = \frac{u_n}{\|\overline{u_n}\|}$$

$$\overline{e_1}\cdot\overline{e_2} = \frac{\overline{u_1}}{\|\overline{u_1}\|}\cdot\frac{\overline{u_2}}{\|\overline{u_2}\|} = \frac{1}{\|\overline{u_1}\|\cdot\|\overline{u_2}\|}\cdot(\overline{u_1}\cdot\overline{u_2}) = 0$$

$$\overline{e_1}\cdot\overline{e_1} = \frac{\overline{u_1}}{\|\overline{u_1}\|}\cdot\frac{\overline{u_1}}{\|\overline{u_1}\|} = \frac{1}{\|\overline{u_1}\|\cdot\|\overline{u_1}\|}\cdot(\overline{u_1}\cdot\overline{u_1}) = \frac{\|\overline{u_1}\|^2}{\|\overline{u_1}\|^2} = 1$$

Procedimento di Gram - Schmidt

Sia $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots \overline{v_n}$ la base di partenza; $\overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_n}$ la base da costruire

$\overline{w_1} = \overline{v_1}$

$\overline{w_2} = \overline{v_2} + h\cdot\overline{w_1}$ si determina h in modo che $\overline{w_1}$ e $\overline{w_2}$ siano ortogonali

$$h = \frac{\overline{v_2}\cdot\overline{w_1}}{\|\overline{w_1}\|^2}$$

$\overline{w_3} = \overline{v_3} + a\cdot\overline{w_1} + b\cdot\overline{w_2}$ si determinano a e b in modo che $\overline{w_1}\cdot\overline{v_3} = \overline{w_2}\cdot\overline{w_3} = 0$

$$a = -\frac{\overline{v_3}\cdot\overline{w_1}}{\|\overline{w_1}\|^2} \qquad b = -\frac{\overline{v_3}\cdot\overline{w_2}}{\|\overline{w_2}\|^2}$$

$\overline{w_4} = \overline{v_4} + l\cdot\overline{w_1} + m\cdot\overline{w_2} + n\cdot\overline{w_3}$ si determinano l, m, n in modo che $\overline{w_1}\cdot\overline{w_4} = \overline{w_2}\cdot\overline{w_4} = \overline{w_3}\cdot\overline{w_4} = 0$

e così via.

Esercizio:

$\mathbb{R}^3 \qquad B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \qquad \bar{v}_1\,(1,1,1) \qquad \bar{v}_2\,(1,-1,1) \qquad \bar{v}_3\,(-1,-1,1)$

È una base poiché $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

$\bar{w}_1 = \bar{v}_1 = (1,1,1)$

$\bar{w}_2 = \bar{v}_2 + h \cdot \bar{w}_1 = (1,-1,1) + h \cdot (1,1,1) = (h+1, h-1, h+1)$

Imponendo $\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2 = 0$ otteniamo

$(1,1,1) \cdot (h+1, h-1, h+1) = 0$

$1 \cdot (h+1) + 1 \cdot (h-1) + 1 \cdot (h+1) = 3h + 1 = 0 \rightarrow h = -\frac{1}{3} \qquad \left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$

$\bar{w}_3 = \bar{v}_3 + h \cdot \bar{w}_1 + k \cdot \bar{w}_2 \qquad (-1,-1,1) + h \cdot (1,1,1) + k \cdot (1,-1,1) = (h+k-1, h-k-1, h+k+1)$

Imponendo $\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_3 = 0$ otteniamo

$(1,1,1) \cdot (h+k-1, h-k-1, h+k+1) = 3h + k - 1 = 0$

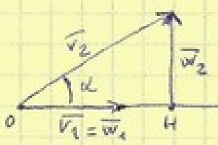
Imponendo $\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_3 = 0$ otteniamo

$\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right) \cdot (h+k-1, h-k-1, h+k+1) = \frac{8}{3} k + \frac{4}{3} = 0$

da cui $h = \frac{1}{2}, \quad k = -\frac{1}{2} \qquad (-1, 0, 1)$

Esercizio analogo con $\bar{v}_1\,(0,0,2) \qquad \bar{v}_2\,(0,1,-1) \qquad \bar{v}_3\,(2,-1,-1)$

Interpretazione geometrica del procedimento di ~~Graham~~ Gram-Schmidt



$w_2 = \bar{v}_2 - \dfrac{\bar{v}_2 \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}\|^2} \cdot \bar{w}_1$

$\dfrac{\bar{v}_2 \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}\|^2} \cdot \bar{w}_1 = \dfrac{\|\bar{v}_2\| \cdot \|w_1\| \cdot \cos\alpha}{\|\bar{w}\|^2} \cdot \|\bar{w}\|$

$\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - (H - O)$

$(H - O) + \bar{w}_2 = \bar{v}_2$

SPAZI UNITARI O HERMITIANI

Def. Si definisce forma sesquilineare una forma φ ($E \times E \to \mathbb{C}$) che associa alla coppia $(\bar{x}, \bar{y})$ il numero complesso $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ in modo tale che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

- $\forall \bar{x}, \bar{x}', \bar{y} \in E \quad \varphi(\bar{x}+\bar{x}', \bar{y}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \varphi(\bar{x}', \bar{y})$
- $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}' \in E \quad \varphi(\bar{x}, \bar{y}+\bar{y}') = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \varphi(\bar{x}, \bar{y}')$
- $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \varphi(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda \cdot \varphi(\bar{x}, \bar{y})$
- $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \varphi(\bar{x}, \lambda\bar{y}) = \bar{\lambda} \cdot \varphi(\bar{x}, \bar{y})$

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n,\ y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) =$$

$$\varphi(x_1\bar{e}_1,\ y_1\bar{e}_1+\dots+y_n\bar{e}_n) + \varphi(x_2\bar{e}_2,\ y_1\bar{e}_1+\dots+y_n\bar{e}_n) + \dots + \varphi(x_n\bar{e}_n,\ y_1\bar{e}_1+\dots+y_n\bar{e}_n)$$

$$x_1\cdot\varphi(\bar{e}_1,\ y_1\bar{e}_1+\dots+y_n\bar{e}_n) + x_2\cdot\varphi(\bar{e}_2,\ y_1\bar{e}_1+\dots+y_n\bar{e}_n) + \dots + x_n\cdot\varphi(\bar{e}_n,\ y_1\bar{e}_1+\dots+y_n\bar{e}_n)$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1\cdot\varphi(\bar{e}_1, y_1\bar{e}_1) + x_1\cdot\varphi(\bar{e}_1, y_2\bar{e}_2) + \dots + x_1\cdot\varphi(\bar{e}_1, y_n\bar{e}_n) \ + \\ x_2\cdot\varphi(\bar{e}_2, y_1\bar{e}_1) + x_2\cdot\varphi(\bar{e}_2, y_2\bar{e}_2) + \dots + x_2\cdot\varphi(\bar{e}_2, y_n\bar{e}_n) \ + \\ \dots\dots \qquad + \\ x_n\cdot\varphi(\bar{e}_n, y_1\bar{e}_1) + x_n\cdot\varphi(\bar{e}_n, y_2\bar{e}_2) + \dots + x_n\cdot\varphi(\bar{e}_n, y_n\bar{e}_n) \end{array}\right. =$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1\bar{y}_1\cdot\varphi(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + x_1\bar{y}_2\cdot\varphi(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + \dots + x_1\bar{y}_n\cdot\varphi(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \ + \\ x_2\bar{y}_1\cdot\varphi(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + x_2\bar{y}_2\cdot\varphi(\bar{e}_2, \bar{e}_2) + \dots + x_2\bar{y}_n\cdot\varphi(\bar{e}_2, \bar{e}_n) \ + \\ \dots\dots \qquad + \\ x_n\bar{y}_1\cdot\varphi(\bar{e}_n, \bar{e}_1) + x_n\bar{y}_2\cdot\varphi(\bar{e}_n, \bar{e}_2) + \dots + x_n\bar{y}_n\cdot\varphi(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{array}\right. =$$

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad a_{ij} = \varphi(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$$

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} \qquad Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Vmatrix}$$

$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = {}^tX A \bar{Y}$, dove $\bar{Y}$ segnato è la matrice i cui termini sono coniugati ai termini della matrice Y. (coniugati nel senso di numeri complessi coniugati)

$$\| x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \| \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \dots \\ \bar{y}_n \end{Vmatrix} =$$

$$\| x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \| \begin{Vmatrix} a_{11}\bar{y}_1 + a_{12}\bar{y}_2 + \dots + a_{1n}\bar{y}_n \\ a_{21}\bar{y}_1 + a_{22}\bar{y}_2 + \dots + a_{2n}\bar{y}_n \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}\bar{y}_1 + a_{n2}\bar{y}_2 + \dots + a_{nn}\bar{y}_n \end{Vmatrix} = a_{11}x_1\bar{y}_1 + a_{12}x_1\bar{y}_2 + \dots + a_{nn}x_n\bar{y}_n$$

Def. Una forma sesquilineare si dice hermitiana se $\varphi(\bar{x},\bar{y}) = \overline{\varphi(\bar{y},\bar{x})}$ per $\forall\, \bar{x},\bar{y} \in E$

Una matrice si dice hermitiana se ${}^tA = \bar{A}$. In una matrice hermitiana $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$ e quindi $\varphi(\bar{e}_j,\bar{e}_i) = \overline{\varphi(\bar{e}_i,\bar{e}_j)}$; quindi una matrice hermitiana rappresenta una forma sesquilineare hermitiana e viceversa.

Le matrici simmetriche reali sono particolari matrici hermitiane, poiché ${}^tA = A = \bar{A}$ (la parte immaginaria di un numero reale è 0)

Sia ora $\Phi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x},\bar{x}) = \overline{\varphi(\bar{x},\bar{x})} \in \mathbb{R}$. Φ opera fra E ed $\mathbb{R}$ e viene chiamata forma quadratica associata alla forma sesquilineare. In questo modo, grazie al fatto che il codominio $\in \mathbb{R}$, si può parlare di forme quadratiche semidefinite o definite (positive o negative).

Si possono estendere anche altre definizioni come quella di vettori coniugati (se $\varphi(\bar{x},\bar{y}) = \overline{\varphi(\bar{y},\bar{x})} = 0$), nucleo di φ, e così via.

Valgono anche le disuguaglianze di Schwarz e Minkowsky, mentre alcune proprietà subiscono lievi modifiche. Per esempio:

$$\Phi(\lambda\bar{x}) = \varphi(\lambda\bar{x},\lambda\bar{x}) = \lambda\cdot\bar{\lambda}\cdot\varphi(\bar{x},\bar{x}) = \lambda\cdot\bar{\lambda}\cdot\Phi(\bar{x}) = |\lambda|^2\cdot\Phi(\bar{x})$$

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{x}+\bar{y}) &= \Phi(\bar{x}) + \varphi(\bar{x},\bar{y}) + \varphi(\bar{y},\bar{x}) + \Phi(\bar{y}) = \\ &= \Phi(\bar{x}) + \varphi(\bar{x},\bar{y}) + \overline{\varphi(\bar{x},\bar{y})} + \Phi(\bar{y}) = \\ &= \Phi(\bar{x}) + 2\cdot \mathrm{Re}(\varphi(\bar{x},\bar{y})) + \Phi(\bar{y})\end{aligned}$$

Def. Uno spazio unitario è uno spazio vettoriale con $\mathbb{C}$ come campo degli scalari e che va considerato congiuntamente con una forma ~~quadratica~~ sesquilineare hermitiana la cui forma quadratica associata risulta essere definita positiva.

$\varphi(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}\cdot\bar{y}$ prodotto scalare hermitiano

In questo modo:

$(\bar{x}+\bar{x}')\cdot\bar{y} = \bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{x}'\cdot\bar{y}$

$\bar{x}\cdot(\bar{y}+\bar{y}') = \bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{x}\cdot\bar{y}'$

$(\lambda\bar{x})\cdot\bar{y} = \lambda\cdot(\bar{x}\cdot\bar{y})$

$\bar{x}\cdot(\lambda\bar{y}) = \bar{\lambda}\cdot(\bar{x}\cdot\bar{y})$

$\bar{x}\cdot\bar{y} = \overline{\bar{y}\cdot\bar{x}}$

Ne consegue che:

$\|\bar{x}\| = \sqrt{\Phi(\bar{x})} = \sqrt{\varphi(\bar{x},\bar{x})} = \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}} = \sqrt{\bar{x}^2}$

$\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda|\cdot\|\bar{x}\|$

Si può estendere anche la definizione di ortogonalità, se $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} = 0$.
In questo caso $\Phi(\bar{x}+\bar{y}) = \Phi(\bar{x}) + \Phi(\bar{y})$, $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$, che corrisponde al teorema di Pitagora.

PROPRIETÀ DI SPAZI EUCLIDEI E HERMITIANI

- Sia $V \subseteq E$, e $V^{\perp} = \{\bar{x} \in E \,/\, \forall \bar{y} \in V \ \ \bar{x} \cdot \bar{y} = 0\}$. Si ha $V \oplus V^{\perp} = E$.

Dim. Proviamo prima che la somma è diretta. Si vuole provare che $V \cap V^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Se $\bar{x}$ sta in V e in $V^{\perp}$, allora è ortogonale a sé stesso, $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0$, e quindi $\bar{x} = \bar{0}$.
Ora: $V \oplus V^{\perp} \subseteq E$ è ovvio, poiché la somma di due sottospazi di un dato spazio è a sua volta un sottospazio.
Proviamo quindi che $E \subseteq V \oplus V^{\perp}$. Sia $\dim V = r$, $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r$ base di V. Per il teorema della base incompleta è possibile completare la base con i vettori $\bar{u}_{r+1}, \dots, \bar{u}_n$, per ottenere una base di E. Sia ora la base canonica di E $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$. Possiamo ottenere questa base canonica con il procedimento di Gram-Schmidt; ne segue che i vettori $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$ appartengono a V, poiché sono combinazione lineare di $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r$. Poiché sono in numero di r, i suddetti vettori formano un'altra base di V. Ora, poiché $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_{r+1} = 0, \dots, \bar{e}_r \cdot \bar{e}_{r+1} = 0$, $\bar{e}_{r+1}$ è ortogonale ad ogni combinazione lineare di $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$ e quindi ad ogni vettore di V. $\bar{e}_{r+1}$ sta quindi in $V^{\perp}$. Analogo discorso può essere effettuato per $\bar{e}_{r+2}, \bar{e}_{r+3}, \dots, \bar{e}_n$, che appartengono dunque tutti a $V^{\perp}$. Ne segue infine che:
$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_r \bar{e}_r + x_{r+1} \bar{e}_{r+1} + \dots + x_n \bar{e}_n$, con i primi r termini che formano un vettore appartenente a V e quelli dall'$(r+1)$-esimo all'n-esimo che formano un vettore appartenente a $V^{\perp}$.

~~Def. Si dice prodotto scalare autoaggiunto~~

Def. Un endomorfismo si dice autoaggiunto se $f(\bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot f(\bar{y})$ per ogni $\bar{x}, \bar{y} \in E$.

Prop. Gli autovalori di un endomorfismo autoaggiunto sono reali, se esistono.
Nel caso euclideo il campo degli scalari è $\mathbb{R}$, per cui l'asserto è ovvio.
Nel caso hermitiano, invece, valendo $f(\bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot f(\bar{y})$ per

ogni coppia di vettori, in particolare varrà anche per $\bar{x}$ e $\bar{y}$ autovettori di autovalore λ. Si ottiene quindi:

$(\lambda \bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot (\lambda \bar{y})$

$\lambda (\bar{x} \cdot \bar{y}) = \bar{\lambda} \cdot (\bar{x} \cdot \bar{y})$

$(\lambda - \bar{\lambda})(\bar{x} \cdot \bar{y}) = 0$

Poiché $\bar{x} \cdot \bar{y} \neq 0$, allora $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, ovvero $\lambda = \bar{\lambda}$, e quindi λ è reale.

Def. Sia un endomorfismo autoaggiunto, e W un sottospazio $\subseteq E$. Si definisce sottospazio invariante un sottospazio $W \subseteq E$ tale che $f(W) \subseteq W$.

Per esempio, il sottospazio V_λ, autospazio di autovalore λ, è invariante, poiché $\bar{y} \in f(V_\lambda) \Rightarrow f(\bar{x}) \in f(V_\lambda) \Longrightarrow \bar{x} \in V_\lambda$ $\Rightarrow \lambda \bar{x} \in V_\lambda \Rightarrow f(\bar{x}) \in V_\lambda \Rightarrow \bar{y} \in V_\lambda$.

Anche il sottospazio $f(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}) \subseteq V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$.

Sia infatti $\bar{y} = f(\bar{x}) = f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_r) = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \dots + f(\bar{x}_r) =$ $\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_r \bar{x}_r \in V_1 \oplus \dots \oplus V_r$

Prop. Sia $f: E \to E$, $f(V) \subseteq V$. Allora $f(V^\perp) \subseteq V^\perp$

Dim. $\bar{y} \in f(V^\perp) \Rightarrow \bar{y} \in V^\perp$

$\Updownarrow$

$\underset{\bar{x} \in V^\perp}{\bar{y} = f(\bar{x})} \qquad \forall \bar{z} \in V \qquad \bar{y} \cdot \bar{z} = 0$

Infatti $\bar{y} \cdot \bar{z} = f(\bar{x}) \cdot \bar{z} = \underset{\in V^\perp}{x} \cdot \underset{\in V}{f(\bar{z})} = 0 \qquad \bar{z} \in \bar{V} \Rightarrow f(\bar{z}) \in f(\bar{V}) \Rightarrow f(\bar{z}) \in \bar{V}$

Prop. Siano V_{λ_1}, V_{λ_2} con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Allora, se l'endomorfismo è autoaggiunto, i due spazi sono ortogonali, ovvero $\forall x \in V_{\lambda_1}$, $\forall y \in V_{\lambda_2}$, si ha $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$.

Dim. $f(\bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot f(\bar{y})$

$(\lambda_1 \bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot (\lambda_2 \bar{y})$

$\lambda_1 \cdot (\bar{x} \cdot \bar{y}) = \lambda_2 (\bar{x} \cdot \bar{y})$ anche nel caso hermitiano, poiché $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \cdot (\bar{x} \cdot \bar{y}) - \lambda_2 (\bar{x} \cdot \bar{y}) = 0$

$(\lambda_1 - \lambda_2)(\bar{x} \cdot \bar{y}) = 0$

$(\bar{x} \cdot \bar{y}) = 0$ poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2$ per ipotesi

e ciò dimostra la tesi

Prop. $f: E \to E \qquad \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ base ortonormale

$$A = \begin{array}{c} \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| \\ \begin{matrix} f(\bar{e}_1) & f(\bar{e}_2) & \quad & f(\bar{e}_n) \end{matrix} \end{array}$$

Allora f è autoaggiunto se e solo se A è hermitiana

Dim. $f(\bar{e}_i) \cdot \bar{e}_j = (a_{1i} \cdot \bar{e}_1 + a_{2i} \cdot \bar{e}_2 + \dots + a_{ni} \cdot \bar{e}_n) \cdot \bar{e}_j = a_{ji}$

$\bar{e}_i \cdot f(\bar{e}_j) = \bar{e}_i \cdot (a_{1j}\, \bar{e}_1 + a_{2j} \cdot \bar{e}_2 + \dots + a_{nj} \cdot \bar{e}_n) = \overline{a_{ij}}$

"$\Rightarrow$" Se f è autoaggiunto, $f(\bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot f(\bar{y})$, in particolare

$f(\bar{e}_i) \cdot \bar{e}_j = \bar{e}_i \cdot f(\bar{e}_j)$, dunque $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$ e A risulta essere hermitiana

"$\Leftarrow$" · $f(\bar{x}) \cdot \bar{y} = f(x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n) \cdot (y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + \dots + y_n \bar{e}_n) =$

$[x_1 \cdot f(\bar{e}_1) + x_2 \cdot f(\bar{e}_2) + \dots + x_n \cdot f(\bar{e}_n)] \cdot (y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + \dots + y_n \bar{e}_n) =$

$x_1 \cdot y_1 \cdot f(\bar{e}_1) \cdot \bar{e}_1 + x_1 \cdot y_2 \cdot f(\bar{e}_1) \cdot \bar{e}_2 + \dots + x_1 \cdot y_n \cdot f(\bar{e}_1) \cdot \bar{e}_n +$
$x_2 \cdot y_1 \cdot f(\bar{e}_2) \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot y_2 \cdot f(\bar{e}_2) \cdot \bar{e}_2 + \dots + x_2 \cdot y_n \cdot f(\bar{e}_2) \cdot e_n +$
$\dots +$
$x_n \cdot y_1 \cdot f(\bar{e}_n) \cdot \bar{e}_1 + x_n \cdot y_2 \cdot f(\bar{e}_n) \cdot \bar{e}_2 + \dots + x_n \cdot y_n \cdot f(\bar{e}_n) \cdot \bar{e}_n$

· $\bar{x} \cdot f(\bar{y}) = (x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n) \cdot [y_1 \cdot f(\bar{e}_1) + y_2 \cdot f(\bar{e}_2) + \dots + y_n \cdot f(\bar{e}_n)] =$

$x_1 \cdot \overline{y_1} \cdot \bar{e}_1 \cdot f(\bar{e}_1) + x_1 \cdot \overline{y_2} \cdot \bar{e}_1 \cdot f(\bar{e}_2) + \dots + x_1 \cdot \overline{y_n} \cdot \bar{e}_1 \cdot f(\bar{e}_n) +$
$x_2 \cdot \overline{y_1} \cdot \bar{e}_2 \cdot f(\bar{e}_1) + x_2 \cdot \overline{y_2} \cdot \bar{e}_2 \cdot f(\bar{e}_2) + \dots + x_2 \cdot \overline{y_n} \cdot \bar{e}_2 \cdot f(\bar{e}_n) +$
$\dots +$
$x_n \cdot \overline{y_1} \cdot \bar{e}_n \cdot f(\bar{e}_1) + x_n \cdot \overline{y_2} \cdot \bar{e}_n \cdot f(\bar{e}_2) + \dots + x_n \cdot \overline{y_n} \cdot \bar{e}_n \cdot f(\bar{e}_n)$

Poiché si ha uguaglianza sulle coppie di elementi della base, si ha uguaglianza in generale.

Prop. Sia E uno spazio vettoriale euclideo, $e_1, \dots, e_n$ una base ortonormale, A la matrice di f. Si ha che f è autoaggiunto se e solo se A è simmetrica reale.

Dim. "$\Rightarrow$" $f(\bar{e}_i) \cdot \bar{e}_j = a_{ji} = a_{ij} = \bar{e}_i \cdot f(\bar{e}_j)$

"$\Leftarrow$" Si ripetono i calcoli del caso hermitiano, con la differenza che invece di $\bar{y}_i$ si ha y_i. Si nota poi la simmetria.

SPAZI HERMITIANI

Una matrice A hermitiana ha n autovalori complessi, ognuno contato con la sua molteplicità.

Sia $\mathbb{C}^n$ spazio hermitiano. Si definisce prodotto scalare hermitiano la quantità, posti $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$ e $\bar{y} = y_1 \bar{e}_1 + \dots + y_n \bar{e}_n$:
$x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$

Poiché una matrice hermitiana rappresenta un endomorfismo autoaggiunto, gli n autovalori sono reali.

Dal momento che ogni endomorfismo autoaggiunto ha n autovalori reali, ha almeno un autovettore.

Da una matrice hermitiana possiamo ricavare un endomorfismo aggiunto:

$$A = \begin{Vmatrix} & & \\ & & \\ f(\bar{e}_1) & \dots & f(\bar{e}_n) \end{Vmatrix} \qquad \mathbb{C}^n \quad \begin{array}{l} \bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ \bar{e}_2 = (0, 1, \dots, 0) \\ \bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1) \end{array}$$

e viceversa

<u>Teor.</u> Un endomorfismo autoaggiunto è diagonalizzabile, per cui ammette una base di autovettori, e in particolare una base ortonormale di autovettori

<u>Dim.</u> Sia $f: E \to E$, $W \subseteq E$. Può estendersi il prodotto scalare definito in E nel suo sottospazio W restringendo la φ in $\varphi/_{W \times W}$, definita $W \times W \to \mathbb{R}$.

Ora, se $f(W) \subseteq W$, allora la restrizione $f/_W \; W \to W$ è un endomorfismo autoaggiunto.

Si ha poi $n = \dim E = \dim (W \oplus W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp$, quindi se $\dim W < n$, $\dim W^\perp > 0$, per cui $W^\perp \supset \{\bar{0}\}$

Passiamo alla dimostrazione vera e propria. Supponiamo per assurdo che l'endomorfismo non sia diagonalizzabile. In questo caso, per una nota proprietà, $W = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r} \subset E$. Poiché W è somma di autospazi, $f(W)$ risulta essere contenuta in esso, cioè $f(W) \subseteq W$, e anche $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$. Ne segue che $\dim W < n$ per cui $W^\perp \supset \{\bar{0}\}$. Consideriamo ora $f/_{W^\perp}: W^\perp \to W^\perp$; questo risulterebbe essere un endomorfismo autoaggiunto, per cui esiste $\bar{v}$ autovettore di $f/_{W_\perp}$. Ma essendo $\bar{v}$ autovettore, $\bar{v} \in W$. Dunque $\bar{v} \in (W \cap W^\perp)$, cioè $\bar{v} = \bar{0}$ poiché l'intersezione è nulla, il che risulta essere assurdo perché il vettore nullo non è mai autovettore

Per provare che ammette una base ortonormale di autovettori, si consideri $E = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_p}$ e si applichi Gram-Schmidt sui singoli V_{λ_i}; ~~essa~~ se $i \neq j$ allora tutti i vettori di V_{λ_i} sono perpendicolari a tutti i vettori di V_{λ_j}, per cui si ottiene in effetti una base ortonormale. Si noti che, se si applicasse Gram-Schmidt su E, non si otterrebbe una base ortonormale.

SPAZI EUCLIDEI

Sia A simmetrica reale

$$A = \left\| \quad \right\| \qquad R^n \qquad \begin{array}{l} \bar{e}_1 = (1,0,\dots,0) \\ \bar{e}_2 = (0,1,\dots,0) \\ \bar{e}_n = (0,0,\dots,1) \end{array}$$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ f autoaggiunto

$$\begin{array}{ccc} \bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n & A & \bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ \bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n & D & \bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n \end{array} \qquad D = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

A base canonica

D base ortonormale di autovettori

$D = P^{-1}AP = {}^tPAP$ P matrice ortogonale in quanto di passaggio fra due basi ortonormali

$X = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n = x_1'\bar{v}_1 + \dots + x_n'\bar{v}_n$

$\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(\bar{x},\bar{y}) \to \varphi(\bar{x},\bar{y})$

$$\Phi(x) = \varphi(\bar{x},\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \cancel{a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3} +$$
$$a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n +$$
$$\dots\dots\dots +$$
$$a_{nn}x_n^2$$

Si può semplificare la forma scrivendola rispetto ai v_i:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} \qquad X' = \begin{Vmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{Vmatrix} \qquad X = PX'$$

quindi la formula generale della forma quadratica ${}^tXAX$ diventa:

$${}^tXAX = {}^t(PX')\cdot A\cdot(PX') = {}^tX'\,{}^tPAPX' = {}^tX'DX' =$$

$$\| x_1 \ \dots \ x_n \| \cdot \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{Vmatrix} = \| x_1 \ \dots \ x_n \| \cdot \begin{Vmatrix} \lambda_1 x_1' \\ \lambda_2 x_2' \\ \dots \\ \lambda_n x_n' \end{Vmatrix} = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2$$

Esercizio

- $A = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ $\qquad P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$

$\lambda_1 = -2$ semplice $\qquad v_{\lambda_1} = (1,1,-1) \to \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\lambda_2 = 1$ doppia $\qquad v_{\lambda_2} = \begin{matrix}(1,0,1) \\ (0,1,1)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(1,0,1) \to \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \to \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\end{matrix}$

$P = \begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{Vmatrix} \qquad {}^tPAP = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$

- $\Phi(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

$A = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda_1 = 1$ —— $\longrightarrow \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

$\lambda_2 = -2$ —— $\longrightarrow \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

$\lambda_3 = 4$ —— $\longrightarrow \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

$P = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}$

Rispetto a P $\quad \Phi(x) = x_1'^2 - 2x_2'^2 + 4x_3'^2$

Se tutti i λ_i sono > 0, allora la forma quadratica è definita positiva

Se tutti i λ_i sono ≥ 0, allora è semidefinita positiva

Se tutti i λ_i sono < 0, allora è definita negativa

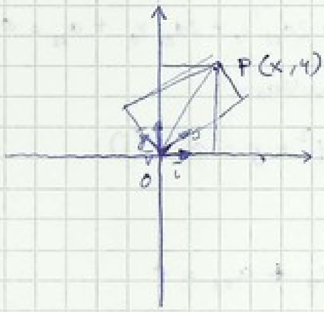
Se tutti i λ_i sono ≤ 0, allora è semidefinita negativa

Se ci sono $\lambda_i > 0$ e $\lambda_i < 0$, allora è non definita.

<u>Legge</u> di inerzia di Sylvester: il numero di autovalori positivi e il numero di autovalori negativi è pari al numero di coefficienti rispettivamente positivi e negativi della forma canonica, indipendentemente dal metodo utilizzato per la riduzione.

Riduzione a forma canonica di una conica

$$P(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$



$$P - O = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} = x'\cdot\bar{u} + y'\cdot\bar{v}$$

$$X = \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} \qquad X' = \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} \qquad P = \begin{array}{cc} \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix} \\ \bar{u} \quad \bar{v} \end{array}$$

$$X = PX'$$

$$\begin{cases} x = p_{11}x' + p_{12}y' \\ y = p_{21}x' + p_{22}y' \end{cases}$$

$$A_{33} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

Prendendo P come matrice ortogonale che diagonalizza A_{33}, la conica diventa:

$$P(X',Y) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a_{33} = 0$$

dove $a'_{13} = a_{13}p_{11} + a_{23}p_{21}$, $\quad a'_{23} = a_{13}p_{12} + a_{23}p_{22}$

Esercizio: ridurre in forma canonica $x^2 + 2xy + y^2 - x + 2y + 1 = 0$

$$A_{33} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \det\begin{Vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$$

$B_{E_{\lambda=0}}\ (1;-1) \qquad B_{E_{\lambda=2}}\ (1;1)$

$B_{E_{\lambda=0}}\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad B_{E_{\lambda=2}}\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y') \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene come forma canonica $2y'^2 + hx' + ky' + 1 = 0$, dove h e k sono le opportune costanti che si ricavano sostituendo nei termini di primo grado. La forma esatta è: $2y'^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 1 = 0$

Possiamo tuttavia applicare la successiva trasformazione:

$$\begin{cases} x' = X + x_0 \\ y' = Y + y_0 \end{cases}$$

in modo tale da rendere l'equazione il più semplice possibile:

$$2(Y+y_0)^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}(X+x_0) + \frac{\sqrt{2}}{2}(Y+y_0) + 1 = 0$$

$$2Y^2 + \left(4y_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)Y - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,X - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,x_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_0 + 1 = 0$$

Ricavando opportunamente x_0 e y_0 si eliminano il termine in Y e il termine noto per cui l'equazione diventa: $2Y^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,X = 0$

Nel caso teorico:

$\lambda_1 (X+x_0)^2 + \lambda_2 (Y+y_0)^2 + 2a'_{13}(X+x_0) + 2a'_{23}(Y+y_0) + a_{33} = 0$

$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2(\lambda_1 x_0 + a'_{13}) X + 2(\lambda_2 y_0 + a'_{23}) Y + \lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 + 2a'_{13} x_0 + 2a'_{23} y_0 + a_{33} = 0$

Se $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, posso trovare x_0 e y_0 tali da annullare $(\lambda_1 x_0 + a'_{13})$ e $(\lambda_2 y_0 + a'_{23})$, e l'equazione diventa: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \gamma = 0$ (i)

Se $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, l'equazione diventa:

$\lambda_2 Y_2 + 2a'_{13} X + 2(\lambda_2 y_0 + a'_{23}) Y + \lambda_2 y_0^2 + 2a'_{13} x_0 + 2a'_{23} y_0 + a_{33} = 0$

Ora, se $a'_{13} \neq 0$, l'equazione diventa: $\lambda_2 Y^2 + 2a'_{13} X = 0$ (ii)

mentre se $a'_{13} = 0$, l'equazione diventa: $\lambda_2 Y^2 + k = 0$ (iii)

Il caso (ii) risulta essere una parabola

Nel caso (iii): $k = 0 \rightarrow \lambda_2^2 Y^2 = 0$ retta doppia

$\lambda_2 \cdot k < 0 \rightarrow (\sqrt{|\lambda_2|} \cdot y - \sqrt{k})(\sqrt{|\lambda_2|} \cdot Y + \sqrt{k})$ rette parallele

$\lambda_2 \cdot k > 0 \rightarrow |\lambda_2| \cdot Y^2 = -|k|$ nessun punto reale

Nel caso (i): $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \rightarrow \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \delta \rightarrow \delta > 0$ ellisse

$\delta = 0$ un punto reale

$\delta < 0$ nessun punto reale

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \rightarrow |\lambda_1| \cdot X^2 - |\lambda_2| Y^2 = \delta \rightarrow \delta \neq 0$ iperbole

$\delta = 0$ due rette incidenti

Esempio: $2x^2 + xy + y^2 - 2x + y - 1 = 0$

$A_{33} = \left\| \begin{matrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \right\| \qquad \begin{vmatrix} 2-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad 4\lambda^2 - 12\lambda + 7 = 0$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{2}) \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{2})$

Se la conica è a centro, cioè $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, è possibile effettuare subito la traslazione:

$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$

$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + a_{13} x + a_{23} y + a_{33} = 0$

$a_{11}(X+x_0)^2 + 2a_{12}(X+x_0)(Y+y_0) + a_{22}(Y+y_0)^2 + a_{13}(X+x_0) + a_{23}(Y+y_0) + a_{33} = 0$

$a_{11} X^2 + 2a_{12} XY + a_{22} Y^2 + 2(a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}) X + 2(a_{12} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) Y +$

$[a_{11} x_0^2 + 2a_{12} x_0 y_0 + a_{22} y_0^2 + 2a_{13} x_0 + 2a_{23} y_0 + a_{33} = 0$

Imponendo nulli i coefficienti di X e Y otteniamo:

$\begin{cases} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$

determinato poiché $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ per ipotesi.

Trovati x_0 e y_0, si tratta ora di semplificare il termine noto:

$\gamma = a_{11} x_0^2 + 2 a_{12} x_0 y_0 + a_{22} y_0^2 + 2 a_{13} x_0 + 2 a_{23} y_0 + a_{33} =$

$(a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}) x_0 + (a_{12} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) y_0 + (a_{13} x_0 + a_{23} y_0 + a_{33}) =$

$a_{13} x_0 + a_{23} y_0 + a_{33}$, poiché per ipotesi i coefficienti di x_0 e y_0 sono nulli (vedi sistema precedente)

La conica diventa quindi:

$a_{11} X^2 + 2a_{12} XY + a_{22} Y^2 + \gamma = 0$

e infine:

$\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \gamma = 0$

Esempio: $2x^2 + xy + y^2 - 2x + y - 1 = 0$

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & +\frac{1}{2} & -1 \end{Vmatrix} \qquad \begin{cases} 2x_0 + \frac{1}{2} y_0 - 1 = 0 \\ \frac{1}{2} x_0 + y_0 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{5}{7} \\ y_0 = -\frac{6}{7} \end{cases}$$

$\gamma = -1 \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) - 1 = -\frac{15}{7}$

$4\lambda^2 - 12\lambda + 7 = 0$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{2}) \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{2})$

SPAZI AFFINI

Sia E uno spazio vettoriale, $\mathcal{A}$ insieme di punti. Sia inoltre $a: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow E$ in modo tale che $(A,B) \rightarrow a(A,B) = \bar{v} \in E$, con $A, B \in \mathcal{A}$. Siano inoltre verificate le due seguenti condizioni:

1) $\forall A \in \mathcal{A}, \forall \bar{v} \in E \quad \exists! \; B \in \mathcal{A} \quad a(A,B) = \bar{v}$

2) $\forall A, B, C \in \mathcal{A} \quad a(A,B) + a(B,C) = a(A,C)$

Si definisce spazio affine una siffatta struttura.

$a(A,B)$ viene spesso indicato con $B - A$

$B - A = \bar{v}$, $(B-A) + (C-B) = (C-A)$

$(C-A) = (C-B) + (B-A) = (C-B) - (A-B)$

Varietà lineari affini.

Si dice che $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ è una varietà lineare affine se esiste $F \subseteq E$ tale che la restrizione di a in $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}'$ rende $\mathcal{A}'$ spazio affine su F

F viene definita la direzione della varietà.

Per provare che $\mathcal{A}'$ è varietà affine in F, bisogna provare che:

1) $\forall A', B' \in \mathcal{A}' \quad a(A', B') \in F$

2) $\forall A' \in \mathcal{A}'. \quad \forall \bar{v} \in F \quad \exists! \; B' \in \mathcal{A}' \quad a(A', B') = \bar{v}$

3) $\forall A', B', C' \in \mathcal{A}' \quad a(A', B') + a(B', C') = a(A', C')$

Tuttavia la 3) non è necessaria, poiché la proprietà vale per ogni punto in $\mathcal{A}$, quindi in particolare per ogni punto in $\mathcal{A}' (\subseteq \mathcal{A})$

Quanto alla 2), $B' \in \mathcal{A}$, bisogna provare che in particolare $B' \in \mathcal{A}'$

Teor. Sia $A \in \mathcal{A}$, $F \subseteq E$, $\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A} : P - A \in F\}$.
Allora $\mathcal{A}'$ è una varietà lineare affine che contiene A

Dim. Per provare che contiene A è sufficiente constatare che $\bar{0} \in F$ in quanto uno spazio vettoriale contiene sempre il vettore nullo, e quindi $A - A = 0 \in F$.
Per provare che è una varietà lineare, siano $P, Q \in \mathcal{A}'$.
Proviamo che $Q - P \in F$. Si ha $Q - P = (Q - A) + (P - A)$; poiché $P, Q \in \mathcal{A}'$, $(P - A), (Q - A) \in F$, e per cui ci appartiene anche la loro somma $Q - P$, come volevasi dimostrare.

Teor. sia $A' \in \mathcal{A}'$ $\bar{v} \in F$ $\exists !\ B \in \mathcal{A}$ $B' - A' = \bar{v} \in F \Rightarrow B' \in \mathcal{A}'$

Dim. $B' - A' = \bar{v} \in F$

$(B' - A') - (A' - A) = \bar{v}$ $\qquad B' - A = \bar{v} + (A' - A)$

Poiché $\bar{v} \in F$, $(A' - A) \in F$, anche la loro somma $(B' - A) \in F$, per cui $B' \in \mathcal{A}'$

Teor. $A \in \mathcal{A}''$ varietà lineare affine di direzione $F \Rightarrow \mathcal{A}'' = \mathcal{A}'$, ovvero $\mathcal{A}'$ è unico.

Dim. $\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}'$

$P \in \mathcal{A}'' \Rightarrow P \in \mathcal{A}'$

$P \in \mathcal{A}''$ $A \in \mathcal{A}''$ $\therefore (P - A) \in F$ cioè $P \in \mathcal{A}'$
in quanto $\mathcal{A}''$ varietà lineare affine su F

$\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}''$

$P \in \mathcal{A}' \Rightarrow P \in \mathcal{A}''$

$P - A = \bar{v} \in F$ $\quad A \in \mathcal{A}''$ $\therefore \exists !\ Q \in \mathcal{A}''$ $Q - A = \bar{v}$

Poiché $P - A = \bar{v}$ e $Q - A = \bar{v}$, e il punto che soddisfa questa relazione è unico, allora $P \equiv Q$, per cui $P \in \mathcal{A}''$

Teor. Ogni varietà lineare affine si può esprimere come
$\mathcal{A}' = \{x \in \mathcal{A} : P - A \in F\}$

Dim. Contenendo almeno un punto, e avendo una certa direzione, determina un certo F e un certo A.

$F \subseteq E$ $\quad \dim F = p$
$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_p$

$$\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A} \quad P - A = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_p \bar{v}_p\}$$

$p =$ dimensione della varietà

$O \in \mathcal{A}$ $\quad E \quad$ $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ base di E

$$R(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$P \in \mathcal{A}$ $\quad P - O \in E \quad$ $P - O = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$

$$Q - O = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + \dots + y_n \bar{e}_n$$

$$Q - P = (Q-O) - (P-O) = (y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + \dots + y_n \bar{e}_n) - (x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n) = (y_1 - x_1)\bar{e}_1 + \dots + (y_n - x_n)\bar{e}_n$$

$$\mathcal{A}' = \{ P \in \mathcal{A} \quad P - A = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \dots + \alpha_p \bar{u}_p \}$$

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\qquad$ $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$\begin{cases} P - A = (x_1 - a_1)\bar{e}_1 + (x_2 - a_2)\bar{e}_2 + \dots + (x_n - a_n)\bar{e}_n \\ \bar{u}_1 = u_{11}\bar{e}_1 + u_{21}\bar{e}_2 + \dots + u_{n1}\bar{e}_n \\ \bar{u}_2 = u_{12}\bar{e}_1 + u_{22}\bar{e}_2 + \dots + u_{n2}\bar{e}_n \\ \dots \\ \bar{u}_p = u_{1p}\bar{e}_1 + u_{2p}\bar{e}_2 + \dots + u_{np}\bar{e}_n \end{cases}$$

$$(x_1 - a_1)\bar{e}_1 + (x_2 - a_2)\bar{e}_2 + \dots + (x_n - a_n)\bar{e}_n = \alpha_1 (u_{11}\bar{e}_1 + u_{21}\bar{e}_2 + \dots + u_{n1}\bar{e}_n) + \dots + \alpha_p (u_{1p}\bar{e}_1 + u_{2p}\bar{e}_2 + \dots + u_{np}\bar{e}_n)$$

$$\begin{cases} x_1 - a_1 = \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{12} + \dots + \alpha_p u_{1p} \\ x_2 - a_2 = \alpha_1 u_{21} + \alpha_2 u_{22} + \dots + \alpha_p u_{2p} \\ \dots \\ x_n - a_n = \alpha_1 u_{n1} + \alpha_2 u_{n2} + \dots + \alpha_p u_{np} \end{cases}$$ equazioni parametriche della varietà

Sono importanti due casi particolari: se $p = n-1$ e se $p = 1$.
Nel primo caso abbiamo una varietà lineare che si chiama iperpiano affine; nel secondo caso retta affine.

IPERPIANO AFFINE

$$P - A = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \dots + \alpha_{n-1} \bar{u}_{n-1}$$

$$\begin{array}{c} \begin{Vmatrix} x_1 - a_1 & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1,n-1} \\ x_2 - a_2 & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - a_n & u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{n,n-1} \end{Vmatrix} \\ \begin{matrix} P - A & \quad \bar{u}_1 & \quad \bar{u}_2 & \qquad & \bar{u}_{n-1} \end{matrix} \end{array}$$

Poiché appartengono alla varietà lineare affine tutti i punti P tali che $P - A$ è combinazione lineare di $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}$, il rango della matrice deve essere minore di n, per cui il determinante deve valere 0

Il determinante è pari a:

$\beta_1 (x_1 - a_1) + \beta_2 (x_2 - a_2) + \dots + \beta_n (x_n - a_n)$

Affinché questa quantità sia uguale a 0 deve essere:

$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \gamma = 0$

dove $\gamma = -\beta_1 a_1 - \beta_2 a_2 - \dots - \beta_n a_n$

Si noti che almeno uno tra $\beta_1, \dots, \beta_n$ è diverso da zero, poiché la matrice ha $n-1$ colonne linearmente indipendenti ($\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-1}$ formano una base) e quindi esistono $n-1$ righe linearmente indipendenti. Poiché i vari β_i sono composti dai determinanti di tutti gli insiemi di $n-1$ righe, almeno uno di essi è diverso da zero.

Dunque $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \gamma = 0$ è l'equazione di un iperpiano.

RETTA AFFINE

$\mathcal{Q}' = \{ P \in \mathcal{Q} \quad P - A = \alpha \bar{v} \}$

$P - A = (x_1 - a_1)\bar{e}_1 + \dots + (x_n - a_n)\bar{e}_n \qquad \bar{v} = v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 + \dots + v_n \bar{e}_n$

$(x_1 - a_1)\bar{e}_1 + (x_2 - a_2)\bar{e}_2 + \dots + (x_n - a_n)\bar{e}_n = \alpha v_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha v_n \bar{e}_n$

$$\begin{cases} x_1 - a_1 = \alpha v_1 \\ x_2 - a_2 = \alpha v_2 \\ \dots \\ x_n - a_n = \alpha v_n \end{cases}$$

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{v_n}$$

STUDIO SULLE EQUAZIONI PARAMETRICHE

$$\begin{cases} x_1 - a_1 = \alpha_1 v_{11} + \alpha_2 v_{12} + \dots + \alpha_p v_{1p} \\ x_2 - a_2 = \alpha_1 v_{21} + \alpha_2 v_{22} + \dots + \alpha_p v_{2p} \\ \dots \\ x_p - a_p = \alpha_1 v_{p1} + \alpha_2 v_{p2} + \dots + \alpha_p v_{pp} \\ \dots \\ x_n - a_n = \alpha_1 v_{n1} + \alpha_2 v_{n2} + \dots + \alpha_p v_{np} \end{cases}$$

Supponiamo le prime n equazioni linearmente indipendenti. Si ha:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & v_{12} & \dots & v_{1p} \\ x_2 - a_2 & v_{22} & \dots & v_{2p} \\ \dots & \dots & & \dots \\ x_p - a_p & v_{p2} & \dots & v_{pp} \end{vmatrix}}{\det ()} = ()(x_1 - a_1) + ()(x_2 - a_2) + \dots + ()(x_p - a_p)$$

e similmente per $\alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Sostituendo i valori trovati per $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nelle ultime $n-p$ equazioni, troviamo altrettanti iperpiani.

Pertanto una varietà lineare di dimensione p è intersezione di $n-p$ iperpiani

STRUTTURA ESAME

Prova scritta: 90/120 minuti

- parte teorica (12 punti)
- esercizio standard (15/16 punti)
- esercizio diverso (5/6 punti)

Prova orale: si presuppone una domanda a tutti ma non è certo.

APPLICAZIONI AFFINI E AFFINITÀ (solo all'orale)

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \cdot \cos\varphi - x_2 \cdot \sin\varphi \\ x_2 = x_1 \cdot \sin\varphi + x_2 \cdot \cos\varphi \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(1-\cos\varphi) + x_2 \cdot \sin\varphi = 0 \\ x_1 \cdot \sin\varphi + x_2 \cdot (\cos\varphi - 1) = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{vmatrix} = -1 + 2\cdot\cos\varphi - \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 2(\cos\varphi - 1)$$

Se $\cos\varphi \neq 1 \rightarrow \varphi \neq 0$, la soluzione è: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

Se $\cos\varphi = 1 \rightarrow \varphi = 0$, la soluzione è: $\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

affinità: particolare applicazione affine isomorfica.

Le affinità $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ formano un gruppo $GA(E)$ rispetto al prodotto di funzioni:

$f, g \in GA(E)$ $\qquad f \circ g \in GA(E)$

$\varphi, \psi \in GL(E)$ $\qquad \varphi \circ \psi \in GL(E)$

Scrivere le equazioni dell'applicazione affine che subordina φ in $\mathcal{A}_2$

$A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}$ $\qquad \begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + c_1 \\ x_2' = x_1 + 5x_2 + c_2 \end{cases}$ $\qquad c_1 = 1$, $c_2 = 2$

f affinità se φ isomorfismo $\qquad \det A = 16 \neq 0$

f^{-1} affinità che subordina φ^{-1}

$A^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$ $\qquad \begin{cases} y_1' = \frac{5}{16} y_1 + \frac{1}{16} y_2 + d_1 \\ y_2' = -\frac{1}{16} y_1 + \frac{3}{16} y_2 + d_2 \end{cases}$

$f^{-1}(1,2) = (0,0)$ $\qquad \begin{cases} 0 = \frac{5}{16} + \frac{2}{16} + d_1 \rightarrow d_1 = -\frac{7}{16} \\ 0 = -\frac{1}{16} + \frac{6}{16} + d_2 \rightarrow d_2 = -\frac{5}{16} \end{cases}$

$\mathcal{A}$ spazio affine che subordina E

fissato $\bar{a} \in E$

$t_{\bar{a}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ $\qquad t_{\bar{a}}(P) = P + \bar{a}$

$$x_i' = x_i + a_i \qquad \bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$$

omotetia di rapporto $\lambda \neq 0$ è l'affinità di centro O

$$f(P) = P' = O + \lambda(P - O)$$

simmetria di centro O è l'omotetia con $\lambda = -1$

Sia dato $\mathcal{A}_3$, $C(1, 2, -1)$

Trovare l'equazione dell'omotetia di centro C e rapporto $\frac{2}{3}$

$$P' - C = \frac{2}{3}(P - C)$$

$P(x_1, x_2, x_3)$ $\qquad P'(x_1', x_2', x_3')$

$$\begin{cases} x_1' - 1 = \frac{2}{3}(x_1 - 1) \\ x_2' - 2 = \frac{2}{3}(x_2 - 2) \\ x_3' + 1 = \frac{2}{3}(x_3 + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3} \\ x_2' = \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3} \\ x_3' = \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Trovare l'equazione della simmetria di centro C

$$\begin{cases} x_1' - 1 = -(x_1 - 1) \\ x_2' - 2 = -(x_2 - 2) \\ x_3' + 1 = -(x_3 + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2 \\ x_2' = -x_2 - 4 \\ x_3' = -x_3 + 2 \end{cases}$$

GEOMETRIA II ESERCITAZIONE (FAVRO)

- Somma di applicazioni lineari

$\forall\ f, g \in Hom(E, F)$

somma $(f+g)(\bar{v}) = f(\bar{v}) + g(\bar{v})$

Si tratta a sua volta di un'applicazione lineare, infatti:

$(f+g)(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}') = \alpha\cdot[(f+g)(\bar{v})] + \beta\cdot[(f+g)(\bar{v}')]$

si può dimostrare a partire dalle ipotesi:

$f(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}') = \alpha\cdot f(\bar{v}) + \beta\cdot f(\bar{v}')$

$g(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}') = \alpha\cdot g(\bar{v}) + \beta\cdot g(\bar{v}')$

Per definizione infatti:

$(f+g)(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}') = [f(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}')] + [g(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}')]$

da cui per le ipotesi

$(f+g)(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}') = [\alpha\cdot f(\bar{v}) + \beta\cdot f(\bar{v}')] + [\alpha\cdot g(\bar{v}) + \beta\cdot g(\bar{v}')]$

$(f+g)(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}') = \alpha\cdot f(\bar{v}) + \alpha\cdot g(\bar{v}) + \beta\cdot f(\bar{v}') + \beta\cdot g(\bar{v}')$

$(f+g)(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}') = \alpha\cdot[f(v) + g(v)] + \beta\cdot[f(v') + g(v')]$

che per definizione di somma è proprio la tesi:

$(f+g)(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}') = \alpha\cdot[(f+g)(v)] + \beta\cdot[(f+g)(v')]$

- Prodotto di un'applicazione lineare per uno scalare

$\lambda f : E \Rightarrow F$

Definizione: $(\lambda f)(\bar{v}) = \lambda[f(\bar{v})]$

Si tratta a sua volta di un'applicazione lineare, infatti:

$(\lambda f)(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}') = \alpha[(\lambda f)(\bar{v})] + \beta[(\lambda f)(\bar{v}')]$

si può dimostrare a partire dall'ipotesi:

$f(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}') = \alpha\cdot f(\bar{v}) + \beta\cdot f(\bar{v}')$

Per definizione infatti:

$(\lambda f)(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}') = \lambda[f(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}')]$

da cui per l'ipotesi:

$(\lambda f)(\alpha\bar{v} + \beta\bar{v}') = \lambda[\alpha\cdot f(\bar{v}) + \beta\cdot f(\bar{v}')] = (\lambda\alpha)\cdot f(\bar{v}) + (\lambda\beta)\cdot f(\bar{v}') = \alpha\cdot[(\lambda f)(\bar{v})] + \beta\cdot[(\lambda f)(\bar{v}')]$

che è proprio la tesi.

- Composizione di applicazioni lineari

$f \in Hom(E, F) \qquad g \in Hom(F, G) \implies g\circ f \in Hom(E, G)$

$(g\circ f)(\bar{v}) = g[f(\bar{v})]$

Si noti che la definizione è solo la seconda; la prima è una conseguenza, ma tutt'altro che scontata.

Infatti:

$$(g\circ f)(\alpha\bar v+\beta\bar v') = \alpha(g\circ f)(\bar v)+\beta(g\circ f)(\bar v')$$

si può dimostrare a partire dalle ipotesi su f e su g:

$$g(f(\alpha\bar v+\beta\bar v')) = g(\alpha\cdot f(v)+\beta\cdot f(\bar v')) = \alpha\cdot g(f(\bar v))+\beta\cdot g(f(\bar v')) =$$
$$\alpha\cdot((g\circ f)(\bar v))+\beta\cdot((g\circ f)(\bar v'))$$

Se $E=F=G$ (endomorfismo), $f,g\in End(E) \Rightarrow g\circ f\in End(E)$

Inoltre $\{End(E),+,\cdot\}$ è un anello unitario non commutativo.

$\{End(E),+\}$ è gruppo abeliano; $\{End(E),\cdot\}$ è associativo e distributivo:

$$f+g = g+f$$
$$h\circ(f\circ g) = (h\circ f)\circ g$$
$$h\circ(f+g) = (h\circ f)+(h\circ g)$$
$$(f+g)\circ h = (f\circ h)+(g\circ h)$$

$\exists\ 1_E \quad E\to E,\ \bar v\mapsto\bar v \quad 1_E\in End(E) \qquad \forall f \quad f\circ 1_E = 1_E\circ f = f$

Siano ora $E\neq F$.

$f: E\to F\xrightarrow{g} E \qquad g\circ f = 1_E$ f invertibile a sinistra

$g': F\to E \qquad f\circ g' = 1_F$ f invertibile a destra

Prop. Se esistono inverso sinistro g e destro g' di f allora $g=g'$

Prop. Se $f\in Hom(E,F)$ è un isomorfismo allora $f^{-1}\in Hom(F,E)$ è un isomorfismo

Dimostrazione:

Hp $\quad f$ biezione $E\to F$

$\forall\ \bar v,\bar v'\in E \qquad f(\alpha\bar v+\beta\bar v') = \alpha\cdot f(\bar v)+\beta\cdot f(\bar v')$

$\forall\ \alpha,\beta\in K$

Ts $\quad f^{-1}$ biezione $F\to E$

$\forall\ \bar x,\bar x'\in F \qquad f^{-1}(\alpha\bar x+\beta\bar x') = \alpha\cdot f^{-1}(\bar x)+\beta\cdot f^{-1}(\bar x')$

$\forall\ \alpha,\beta\in k$

Se f è una biezione, allora $\exists\ v\ /\ f(v)=x \Rightarrow v=f^{-1}(x)$ e

$\exists\ v' / v' = f^{-1}(x') \Rightarrow f(v')=x'$

Pertanto $f^{-1}(\alpha\bar x+\beta\bar x') = f^{-1}(\alpha\cdot f(\bar v)+\beta\cdot f(\bar v')) = f^{-1}(f(\alpha\bar v+\beta\bar v')) =$

$\alpha\bar v+\beta\bar v' = \alpha\cdot f^{-1}(\bar x)+\beta\cdot f^{-1}(\bar x')$

isomorfismo $E\to F$ = omomorfismo biettivo

isomorfismo $E\to E$ = automorfismo $\qquad \forall f\in Aut(E) \Rightarrow f^{-1}\in Aut(E)$

$f,g\in Aut(E) \Rightarrow g\circ f\in Aut(E)$

È gruppo rispetto a $\cdot$

- Come assegnare una applicazione lineare

E spazio vettoriale di dim. $n \rightarrow B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$

F " " " $m \rightarrow B' = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m\}$

Sia per esempio $E = \mathbb{R}^2$ $(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$F = \mathbb{R}^3$ $y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3$

① $f(x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2) = x_1 \bar{f}_1 + (x_1 + x_2)\bar{f}_2 + (x_2 - x_1)\bar{f}_3$ immagine del vettore generico

② $\bar{e}_1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2$ $\quad f(\bar{e}_1) = 1 \cdot \bar{f}_1 + (1+0)\cdot \bar{f}_2 + (0-1)\cdot \bar{f}_3 = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 - \bar{f}_3$

$\bar{e}_2 = 0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2$ $\quad f(\bar{e}_2) = 0 \cdot \bar{f}_1 + (0+1)\cdot \bar{f}_2 + (1-0)\cdot \bar{f}_3 = \bar{f}_2 + \bar{f}_3$

immagine dei vettori della base E

Sia ora: $g(y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2) = y_1 \cdot g(\bar{e}_1) + y_2 \cdot g(\bar{e}_2)$

Posto $g(\bar{e}_1) = \bar{f}_1 - \bar{f}_2$, $g(\bar{e}_2) = 3 \cdot \bar{f}_3$, otteniamo:

$g(y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2) = y_1 \cdot g(\bar{e}_1) + y_2 \cdot g(\bar{e}_2) = y_1 \cdot (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + y_2 \cdot (3\bar{f}_3)$

$y_1 \bar{f}_1 - y_2 \bar{f}_2 + 3 y_2 \bar{f}_3$

③ Dare una matrice fissate le basi B e B'.

La matrice ha come colonne le componenti dei vettori $f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n)$ nella base $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$.

Ha tante colonne quanti sono gli elementi di B; tante righe quanti sono gli elementi di B'.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$\mathrm{Hom}(E,F) \xleftrightarrow{\text{isomorfismo}} \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$ $\qquad$ E dim n $\quad B = \{e_1, \dots, e_n\}$

$f \in \mathrm{Hom}(E,F) \longleftrightarrow A \in \mathcal{M}_{(m,n)}$ $\qquad$ F dim m $\quad B' = \{f_1, \dots, f_m\}$

$g \in \mathrm{Hom}(F,G) \longleftrightarrow B \in \mathcal{M}_{(p,m)}$ $\qquad$ G dim p $\quad B'' = \{g_1, \dots, g_p\}$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$g \circ f \in \mathrm{Hom}(E,G) \longleftrightarrow BA \in \mathcal{M}_{(p,n)}$

Esempio: $f: E_3 \rightarrow F_2$

$f(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 = \sum_{i=1}^{2} a_{i1} f_i$

$f(e_2) = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 = \sum_{i=1}^{2} a_{i2} f_i$ $\qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix}$

$f(e_3) = a_{13} f_1 + a_{23} f_2 = \sum_{i=1}^{2} a_{i3} f_i$

$g: F_2 \rightarrow G_3$

$g(f_1) = b_{11} g_1 + b_{21} g_2 + b_{31} g_3 = \sum_{j=1}^{3} b_{j1} g_j$ $\qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \dots & \dots \end{Vmatrix}$

$g(f_2) = b_{12} g_1 + b_{22} g_2 + b_{32} g_3 = \sum_{j=1}^{3} b_{j2} g_j$

$(g \circ f)(e_1) = g(f(e_1)) = g(a_{11} f_1 + a_{21} f_2) = a_{11} \cdot g(f_1) + a_{21} \cdot g(f_2) =$

$a_{11} [b_{11} g_1 + b_{21} g_2 + b_{31} g_3] + a_{21} [b_{12} g_1 + b_{22} g_2 + b_{32} g_3] =$

$a_{11} b_{11} g_1 + a_{11} b_{21} g_2 + a_{11} b_{31} g_3 + a_{21} b_{12} g_1 + a_{21} b_{22} g_2 + a_{21} b_{32} g_3 =$

$(a_{11} b_{11} + a_{21} b_{12}) g_1 + (a_{11} b_{21} + a_{21} b_{22}) g_2 + (a_{11} b_{31} + a_{21} b_{32}) g_3$

Matrice di $g \circ f$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{21} b_{12} & \ldots\ldots \\ a_{11} b_{21} + a_{21} b_{22} & \ldots\ldots \\ a_{11} b_{31} + a_{21} b_{32} & \ldots\ldots \end{Vmatrix} = BA$$

- Cambiamento di base

Sia E uno spazio vettoriale, $B = \{\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}\}$, $B' = \{\overline{e_1}', \ldots, \overline{e_n}'\}$ due basi.

$\overline{e_1}' = a_{11} \cdot \overline{e_1} + \ldots + a_{n1} \cdot \overline{e_n}$ $\qquad \varphi : E, B \to E, B'$

matrice cambiamento di base

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Es: $E = \mathbb{R}^3$ $\quad B = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ $\quad \overline{e_1}' = \overline{e_1} - 2 \cdot \overline{e_3}$

$\overline{e_2}' = 2 \cdot \overline{e_2} + 2 \cdot \overline{e_3}$

$\overline{e_3}' = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$

$$P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \det P = 2 + 4 - 2 = 4 \neq 0$$

$v' = 3e_1' - e_2' + 5e_3' = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3}$

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \\ -2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{Vmatrix} \qquad v(B') \to v(B)$$

Per passare dal vettore espresso in base B al vettore espresso in base B', si può fare il prodotto con le incognite poste ~~nel~~ in un fattore

$$\begin{Vmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x' + z' \\ 2y' + z' \\ -2x' + 2y' + z' \end{Vmatrix}$$

$$\begin{cases} x' + z' = 8 \\ 2y' + z' = 3 \\ -2x' + 2y' + z' = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' + z' = 8 \\ 2y' + z' = 3 \\ -2x' = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' + z' = 8 \\ 2y' + z' = 3 \\ x' = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = -1 \\ z' = 5 \end{cases}$$

Si può però invertire la matrice con questa tecnica:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{cases} a + g = 1 \\ 2d + g = 0 \\ -2a + 2d + g = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + h = 0 \\ 2e + h = 1 \\ -2b + 2e + h = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c + m = 0 \\ 2f + m = 0 \\ -2c + 2f + m = 1 \end{cases}$$

$$\left\Vert \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{matrix} \right\Vert \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\Vert$$

$$\left\Vert \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{matrix} \right\Vert \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \right\Vert \qquad R_3 \rightarrow R_3 + 2 \cdot R_1$$

$$\left\Vert \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \right\Vert \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix} \right\Vert \qquad R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$\begin{cases} a + g = 1 \\ 2d + g = 0 \\ 2g = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + h = 0 \\ 2e + h = 1 \\ 2h = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c + m = 0 \\ 2f + m = 0 \\ 2m = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ d = -\frac{1}{2} \\ g = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ e = \frac{3}{4} \\ h = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -\frac{1}{2} \\ f = -\frac{1}{4} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$$

e utilizzare poi il metodo diretto.

Esercizi

- Proprietà delle matrici trasposte

$$^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$
$$^t(\alpha A) = \alpha({}^tA)$$
$$^t(B\cdot A) = ({}^tA)\cdot({}^tB)$$
$$^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

Dimostriamo l'ultima. Per definizione $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$. Trasponendo otteniamo:

$$^t(A\cdot A^{-1}) = {}^t(A^{-1}\cdot A) = {}^t(I_n) = I_n$$

Applicando $^t(B\cdot A) = ({}^tA)\cdot({}^tB)$ otteniamo:

$$^t(A^{-1})\cdot {}^t(A) = I_n$$
$$^t(A)\cdot {}^t(A^{-1}) = I_n$$

Dunque $^t(A^{-1})$ è l'inversa di $^t(A)$

- $E = \mathbb{R}^3$ $\quad B = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$

$B' = \{(2,3,5),\ (1,0,0),\ (0,1,-1)\}$

$e_1' = (2,3,5) = 2\cdot e_1 + 3\cdot e_2 + 5\cdot e_3\ ,\ \ldots$

$F = \mathbb{R}^2$ $\quad C = \{(1,0),(0,1)\}$

$C' = \{(2,1),(0,3)\}$

$$N = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \qquad P = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$M_{BC} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

$f(e_1) = (1,2) = f_1 + 2\cdot f_2$
$f(e_2) = (2,3) = 2\cdot f_1 + 3\cdot f_2$
$f(e_3) = (0,1) \quad 0 + f_2$
$f(x,y,z) = (x+2y,\ 2x+3y+z)$

$$M'_{B'C'} = \begin{Vmatrix} f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}$$

$f(e_1') = f(2,3,5) = (2+2\cdot3,\ 2\cdot2+3\cdot3+5) = (8,18)$
$f(e_2') = f(1,0,0) = (1+2\cdot0,\ 2\cdot1+3\cdot0+0) = (1,2)$
$f(e_3') = f(0,1,-1) = (0+2\cdot1,\ 2\cdot0+3\cdot1-1) = (2,2)$

$$P^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8 \\ 18 \end{Vmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{Vmatrix} 4 \\ \frac{14}{3} \end{Vmatrix} \rightarrow$$ la prima colonna di M', e così per le altre colonne.

In alternativa si può ricavare M' moltiplicando le tre matrici:

$$M' = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

- $E = \mathbb{R}^3$

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$B' = \{(1,1,-1), (1,0,1), (1,1,0)\}$

$$N = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad M = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

$\ker f: \quad MX = 0 \quad \begin{cases} 2x+y=0 \\ -y-z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\beta}{2} \\ y = \beta \\ z = -\beta \end{cases} \qquad B_{\ker f} = \{(1,-2,2)\}$

$\operatorname{Im} f: \quad \mathcal{L} < (2,0,2), (1,-1,2), (0,-1,1) >$

poiché i tre sono l.d., ed inoltre $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$, posso scartare un vettore qualunque tra i tre per formare una base.

$$M' = N^{-1} \cdot M \cdot N \qquad N^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$M' = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$$

$$M'X' = 0 \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 3x' + 3y' + 4z' = 0 \\ -y' - z' = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \beta \\ y' = 3\beta \\ z' = -3\beta \end{cases}$$

$$\ker f = \{\beta e_1' + 3\beta e_2' - 3\beta e_3' \,/\, \beta \in \mathbb{R}\} \underset{\text{attenzione}}{\neq} (\alpha, 3\alpha, -3\alpha)$$

- $E = \mathbb{R}^3$

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$B' = \{(1,2,0), (1,0,1), (-1,0,-2)\} \rightarrow \bar{u} = (1,2,0)\ ;\ \bar{v} = (1,0,1)\ ;\ \bar{w} = (-1,0,-2)$

$f: E \to E \qquad f(\bar{u}) = \bar{u} + \bar{v} \qquad f(\bar{v}) = 2\bar{u} - \bar{v} \qquad f(w) = -\bar{v} + \bar{w}$

$$N = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \qquad M' = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$M' = N^{-1} M N$

$N M' = N \cdot N^{-1} \cdot M \cdot N = MN$

$N M' N^{-1} = M N N^{-1} = M$

$M = N M' N^{-1}$

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1/2 & -1 \end{Vmatrix}$$

- $E = \mathbb{R}_2[t] \qquad \alpha(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

$B = \{1, t, t^2\}$

$B' = \{p(t), q(t), r(t)\} \qquad p(t) = t^2, \; q(t) = t + t^2, \; r(t) = 1 + t + t^2$

$$N = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$f: \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$

$f(p) = 2 + 3t + 5t^2 \qquad f(q) = 1 \qquad f(r) = t - t^2$

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{Vmatrix} = MN \qquad M = A N^{-1} \qquad M' = N^{-1} A$$

In alternativa:

$f(t^2) = 2 + 3t + 5t^2 \qquad f(t + t^2) = 1, \qquad f(1 + t + t^2) = t - t^2$

$1 = x t^2 + y(t + t^2) + z(1 + t + t^2) = z + (y+z)t + (x+y+z)t^2$

Per il principio di identità dei polinomi $x = 0, \; y = -1, \; z = 1$

Dunque $1 = -(t + t^2) + (1 + t + t^2)$, e per linearità:

$f(1) = f(-t - t^2) + f(1 + t + t^2) = -1 + t - t^2$

Analogamente:

$f(t) = f(t + t^2) - f(t^2) = -1 - 3t - 5t^2$

$f(t^2) = 2 + 3t + 5t^2$

per cui:

$$M = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{Vmatrix}$$

Esercizi su autovettori e autovalori

$f: E \to E \qquad \bar{v} \neq \bar{0}$ autovettore $\iff \exists \lambda \in K \quad f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

$S_3 \qquad \bar{a}$ vettore fisso $\qquad B = \{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$

$$f: S_3 \longrightarrow S_3 \qquad \bar{v} \mapsto \bar{a} \wedge \bar{v} \qquad \bar{a} = \bar{k}$$

$f(\bar{\imath}) = \bar{k} \wedge \bar{\imath} = \bar{\jmath}$

$f(\bar{\jmath}) = \bar{k} \wedge \bar{\jmath} = -\bar{\imath}$

$f(\bar{k}) = \bar{k} \wedge \bar{k} = \bar{0}$

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{Vmatrix} \qquad \det \begin{Vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{Vmatrix} = 0$$

$-\lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \qquad \lambda = 0$

$E_{\lambda=0} = Ker\ f = \{\alpha \bar{k} \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$ $\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$

caso di tre autovalori distinti

$\lambda = 1 \ \vee \ \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = 3$

$\lambda = 1 : \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $E_{\lambda=1} \ \{(\alpha, 0, 0) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$B_{\lambda=1} = \{\bar{e}_1\} = \{(1,0,0)\}$

$\lambda = 2 : \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ $\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ $E_{\lambda=2} \ \{(\beta, \beta, -\beta) / \beta \in \mathbb{R}\}$

$B_{\lambda=2} = \{(1,1,-1)\}$

$\lambda = 3 : \begin{Vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ $\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$ $E_{\lambda=3} \ \{(\gamma, \gamma, 0) / \gamma \in \mathbb{R}\}$

$B_{\lambda=3} = \{(1,1,0)\}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$ $\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $(1-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0$

caso di un autovalore doppio e uno semplice

$\lambda = 1$: identico a quanto trattato prima

$\lambda = 3 : \begin{Vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ $\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $E_{\lambda=3} \ \{(\gamma, \gamma, 0) / \gamma \in \mathbb{R}\}$

$B_{\lambda=3} = \{(1,1,0)\}$

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$ $\det \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(-1-\lambda)^2 [(1-\lambda)^2 - 4] = 0$

$\lambda = -1$ tripla , $\lambda = 3$ semplice

$\lambda = -1 : \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ $\begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$ $E_{\lambda=-1} = \{(\alpha, \beta, \beta, \gamma) / \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

$B_{\lambda=-1} = \{(1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\}$

$\lambda = 3 : \begin{Vmatrix} \ \\ \ \\ \ \\ \ \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ $E_{\lambda=3} = \{(0, \beta, -\beta, 0) / \beta \in \mathbb{R}\}$

$B_{\lambda=3} = \{(0,1,-1,0)\}$

• $\mathbb{R}^3$ $\quad \mathcal{B}(\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3})$

① $\bar{u} = \bar{e_1} - \bar{e_2} + \bar{e_3}$

$\bar{v} = \bar{e_1} - \bar{e_2}$

$w = \bar{e_2} + 2 \cdot \bar{e_3}$ sono l.i.

② Detta $\mathcal{B}' = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ scrivere le componenti di $\bar{x} = 2\bar{e_1} - \bar{e_2}$ in $\mathcal{B}'$

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+3 = 1 \neq 0$$

2. $$P = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

$\bar{x} = 2\bar{e_1} - \bar{e_2}$

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 = 2 \\ -x'_1 - x'_2 + x'_3 = -1 \\ x'_1 + 2x'_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 = 2 \\ x'_1 + x'_2 - x'_3 = 1 \\ x'_1 + 2x'_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 = -2 \\ x'_2 = 4 \\ x'_3 = 1 \end{cases}$$

• $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(\bar{e_1}) = -\bar{e_1} + \bar{e_2} + \bar{e_3}$

$f(\bar{e_2}) = -\bar{e_2} + \bar{e_3}$

$f(\bar{e_3}) = 2\bar{e_3}$

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \qquad P = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{cases} a + d = 1 \\ -a - d + g = 0 \\ a + 2g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b + e = 0 \\ -b - e + h = 1 \\ b + 2h = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c + f = 0 \\ -c - f + m = 0 \\ c + 2m = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ d = 3 \\ g = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -2 \\ e = 2 \\ h = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1 \\ f = -1 \\ m = 0 \end{cases} \qquad P^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{Vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

Trovare autovalori e autospazi di ~~A~~ e dire se f é diagonalizzabile

$$\begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & 0 \\ 1 & (-1-\lambda) & 0 \\ 1 & 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda) = 0$$

$$\lambda = -1, \quad \lambda = 2$$

$\lambda = -1 \quad m_{alg} = 2 \ ; \quad 1 \leq \dim E_1 \leq 2$

$\lambda = 2 \quad m_{alg} = 1 \ , \quad \dim E_2 = 1$

Determiniamo ora dim E_{-1}:

$$E_{-1} : \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3t \\ x_3 = -t \end{cases}$$

Pertanto $\dim E_{-1} = 1 < m_{alg_{-1}} = 2$, pertanto f non é diagonalizzabile

- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$f(\bar{x}) = (4x_1 + 10x_2 - 5x_3 \ , \ 5x_1 - x_2 + 5x_3 \ , \ 9x_3)$

<u>1</u> trovare Ker f e Im f <u>2</u> f é isomorfismo? <u>3</u> f é diagonalizzabile?

<u>1</u>
$$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 9x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 20x_1 + 50x_2 = 0 \\ 20x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 20x_1 = 0 \\ 54x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ker f é costituita dal solo vettore nullo; una sua base é $\{\bar{0}\}$

Im f é costituita da tutti i vettori; una sua base é la base canonica

<u>2</u> f é isomorfismo in quanto Ker f = $\{\bar{0}\}$ (secondo teorema di equivalenza)

<u>3</u>
$$\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 10 & -5 \\ 5 & (-1-\lambda) & 5 \\ 0 & 0 & (9-\lambda) \end{vmatrix} = (9-\lambda) \cdot \left[(4-\lambda)(-1-\lambda) - 50 \right] = 0$$

$$(9-\lambda) \cdot \left[(\lambda-4)(\lambda+1) - 50 \right] = 0$$

$$(9-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 3\lambda - 54) = 0$$

$$(9-\lambda) \cdot (\lambda - 9) \cdot (\lambda + 6) = 0$$

$\lambda = -6$ semplice
$\lambda = 9$ doppia

$\dim E_{-6} = 1 \qquad \dim E_9 = 2$ (svolgendo i calcoli, vedi es. precedente)

Dunque f é diagonalizzabile.

In particolare: $B_{E_{-6}} = \{(-1,1,0)\}$; $B_{E_9} = \{(2,1,0)\}$

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \; / \; f(\bar{x}) = (-7x_1 + 2x_2 + 4x_3, -x_2, -12x_1 + 4x_2 + 7x_3, 9x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 2x_4)$

$$A = \begin{Vmatrix} -7 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -12 & 4 & 7 & 0 \\ 9 & -3 & -6 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -12 & 4 & 7-\lambda & 0 \\ 9 & -3 & -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} (-7-\lambda) & 2 & 4 \\ 0 & (-1-\lambda) & 0 \\ -12 & 4 & (7-\lambda) \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} (-7-\lambda) & 4 \\ -12 & (7-\lambda) \end{vmatrix} =$$

$(2-\lambda)(-1-\lambda) \cdot [(-7-\lambda)(7-\lambda) + 48] = 0$

$(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$

-1 doppia, 1 singolo, 2 singola

$$E_{\lambda=-1}: \begin{cases} -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ -12x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 12x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ 12x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = h \\ x_2 = 3h - 2k \\ x_3 = k \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{B}_{-1} = \{(1,3,0,0), (0,-2,1,0)\}$

$$D = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$E_{\lambda=2}: \begin{cases} -9x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ -12x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases} \quad \mathcal{B}_2 = \{(0,0,0,1)\}$$

$$E_{\lambda=1}: \begin{cases} -8x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \\ -12x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \\ 9x_1 - 6x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2t \\ x_4 = 3t \end{cases} \quad \mathcal{B}_1 = \{(1,0,2,3)\}$$

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$f(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 \qquad f(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2 \qquad f(\bar{e}_3) = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 + k \cdot \bar{e}_4 \qquad f(\bar{e}_4) = \bar{e}_3$

Per quali k, f è sicuramente diagonalizzabile?

- Se A è diagonalizzabile, e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori, allora:

$$D = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

(i) $\det A = \det D = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

(ii) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

La (i) è nota; la (ii) si dimostra a partire dal fatto che $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$

- $\operatorname{tr} D = \operatorname{tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{tr}(A(PP^{-1})) = \operatorname{tr} A$

Sia f endomorfismo invertibile $\iff$ automorfismo.

λ autovalore, $\bar{v}$ autovettore, $\lambda \neq 0$

$\exists f^{-1} \,/\, \frac{1}{\lambda}$ autovalore, $\bar{v}$ autovettore.

Infatti:

$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \to \frac{1}{\lambda} \cdot f(\bar{v}) = \bar{v} \to f^{-1}(\bar{v}) = f^{-1}\left(\frac{1}{\lambda} \cdot f(\bar{v})\right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \cdot \left[f^{-1}(f(\bar{v}))\right] =$

$= \frac{1}{\lambda} \cdot \bar{v}$

Inoltre: $f^2(\bar{v}) = f(f(\bar{v})) = f(\lambda \bar{v}) = \lambda \cdot \lambda \bar{v} = \lambda^2 \cdot \bar{v}$

- Due matrici sono simili se esiste una matrice invertibile P tale che: $A = P^{-1}BP$, con A e B matrici quadrate dello stesso ordine.

Per determinare se sono simili, si impone $PA = BP$ e si eguagliano i termini; se si ottiene una matrice P con determinante diverso da zero, allora le due matrici sono simili, altrimenti no.

Esercizio:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{Vmatrix}$$

(i) Determinare se A è invertibile

(ii) Determinare se B è diagonalizzabile

(i) $A^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{Vmatrix} -5 & 9 & -7 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$

$\det A = 13 \neq 0$

(ii) $\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = 0 \qquad \lambda = 0$

$\lambda = 2$ doppia

poiché $\lambda = 0$ è autovalore allora $\det B = 0$

per cui B non è simile ad A

$E_{\lambda=2}$:

$$\begin{cases} -2x-2y-2z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ -2x-2y-2z=0 \end{cases}$$

$$x+y+z=0 \longrightarrow \begin{cases} x=h \\ y=k \\ z=-h-k \end{cases}$$

$B_{\lambda=2}: \{(1,0,-1),\ (0,1,-1)\}$ $\qquad E_{\lambda=2}: \{(x,y,z) / x+y+z=0\} = \{h,k,-(h+k),\ h,k\in\mathbb{R}\}$

$E_{\lambda=0}$:

$$\begin{cases} 0x-2y-2z=0 \\ 2x+4y+2z=0 \\ -2x-2y+0z=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$$

$B_{\lambda=0}: \{(5,-5,5)\}$

$$D=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad P=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \end{Vmatrix} \qquad Q=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 8 & 0 & -5 \\ -8 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$$

- Scrivere 2 matrici $\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

  $\lambda_1=\lambda_2=2 \qquad \lambda_3=3$

  una diagonalizzabile, l'altra no.

  Trovare una matrice diagonalizzabile non richiede particolari calcoli: è sufficiente scrivere la matrice diagonale con gli autovalori dati.

$$D=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix} \qquad A=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

  Per trovare una matrice non diagonalizzabile, si può porre un 1 in a_{12}; in questo modo la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 risulta 1, minore di quella algebrica che è 2, e la matrice risulta non diagonalizzabile.

- $$A=\begin{Vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & m \end{Vmatrix}$$

  $f(e_1)-2\cdot f(e_2) = -2e_1-e_2$

  $-f(e_1)+f(e_2) = e_1-e_3$

  $A: \ \lambda=0,\ \lambda=1$

$-f(e_2) = -e_1 - e_2 - e_3$

$f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3$

$-f(e_1) + f(e_2) = e_1 - e_3$

$-f(e_1) + e_1 + e_2 + e_3 = e_1 - e_3$

$-f(e_1) = e_1 - e_1 - e_2 - e_3 - e_3 = -e_2 - 2\cdot e_3$

$f(e_1) = e_2 + 2\cdot e_3$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & f \\ 2 & 1 & m \end{Vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & f \\ 2 & 1 & m-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = 0: \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & f \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -1\cdot \begin{vmatrix} 1 & f \\ 2 & m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & f \\ 2 & m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow m = 2f$$

$$\lambda = 1: \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & f \\ 2 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -1\cdot \begin{vmatrix} 0 & f \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & f \\ 2 & m-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & f \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & f \\ 2 & m-1 \end{vmatrix} = 0$$

$-f + (m-1) - 2f = 0$

$-3f + m - 1 = 0$

$3f - m + 1 = 0$

$f = -1 \quad \wedge \quad m = -2$

La matrice non è invertibile poiché abbiamo l'autovalore $\lambda = 0$.

Troviamo una base di $\ker f$:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad \ker f = \{(t, 0, t) \,/\, t \in \mathbb{R}\} \qquad B_{\ker f} = \{(1, 0, 1)\}$$

Troviamo una base di $\operatorname{Im} f$:

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \langle (0,1,2), (1,1,1), (0,-1,-2) \rangle$ (c.l. dei tre vettori in colonna)

da cui una base si trova togliendo uno tra il primo e il terzo

$B_{\operatorname{Im} f} = \{(0,1,2), (1,1,1)\}$

· Matrici ortogonali

$A \in \mathcal{M}_p$ è ortogonale se ${}^tA \cdot A = I_p$

M ortogonale $\longrightarrow$ invertibile

$A^{-1} = {}^tA$

Inoltre, $\det({}^tA \cdot A) = \det I_p = 1$

$\det({}^tA) \cdot \det(A) = (\det(A))^2 = 1 \rightarrow \det A = -1 \ \vee \ \det A = 1$

Sia $GL(p, K)$ il gruppo delle matrici invertibili. Anche $O(p, K)$, insieme delle matrici ortogonali, è un gruppo. Infatti:

(i) I_p è ortogonale $\quad {}^tI_p \cdot I_p = I_p \cdot I_p = I_p$

(ii) A, B ortogonali $\Rightarrow A \cdot B$ ortogonale

$Hp \quad {}^tA \cdot A = I_p \quad {}^tB \cdot B = I_p$

$Ts \quad {}^t(AB) \cdot (AB) = I_p$

$${}^tB\,({}^tA \cdot A) \cdot B = I_p$$

$${}^tB \cdot I_p \cdot B = I_p$$

$${}^tB \cdot B = I_p$$

$$I_p = I_p$$

il che verifica la tesi

(iii) A ortogonale $\Rightarrow A^{-1}$ ortogonale

$Hp \quad {}^tA \cdot A = I_p$

$Ts \quad {}^t(A^{-1}) \cdot A^{-1} = I_p$

$${}^t(A^{-1}) \cdot A^{-1} = {}^t({}^tA) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_p$$

Anche $O^+(p, k)$, insieme delle matrici ortogonali con determinante 1, è un gruppo, mentre non lo è l'insieme delle matrici ortogonali con determinante -1.

Esercitazioni su forme bilineari e forme quadratiche

- $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ $\qquad \phi(x) = x_1^2 + 4x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_3 + x_2x_4 - 3x_3x_4$

$\bar{x}\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$M(\phi) = M(\varphi)$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{Vmatrix}$$

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + 4x_3y_3 + 2x_4y_4 - 2(x_1y_3 + x_3y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2) - \frac{3}{2}(x_3y_4 + x_4y_3)$$

$$|A| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$\ker \varphi : \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, AX = 0 \}$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_3 - \frac{3}{2}x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 3t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$\dim \ker \varphi = 1$

$B_{\ker \varphi} = \{(2, 3, 1, 0)\}$

- $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$A = \begin{Vmatrix} h & -1 & 2 \\ -1 & 3 & k \\ 2 & k & 6 \end{Vmatrix} \qquad h, k \in \mathbb{R}$$

a) Trovare h e k sapendo che $\dim \ker \varphi = 1$ e che $\bar{u} = (0, -1, 1)$ e $\bar{v} = (2, 0, -1)$ sono coniugati

$\dim \ker \varphi = 1 \to \varphi$ degenere $\Leftrightarrow |A| = 0$

$$h \cdot \begin{vmatrix} 3 & k \\ k & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & k \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & k \end{vmatrix} = 0$$

$h(18 - k^2) + (-6 - 2k) + 2(-k - 6) = 0$

$18h - hk^2 - 6 - 2k - 2k - 12 = 0$

$hk^2 + 4k - 18h + 18 = 0$

$$\varphi(x, y) = h \cdot x_1y_1 + 3x_2y_2 + 6x_3y_3 - (x_1y_2 + x_2y_1) + k(x_2y_3 + x_3y_2) + 2(x_1y_3 + x_3y_1)$$

$$\varphi(\bar{u}, \bar{v}) = h \cdot 0 \cdot 2 + 3(-1) \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot (-1) - (0 \cdot 2 + (-1) \cdot 2) + k(1) + 2(0 + 2) = k$$

da cui $k = 0$, $h = 1$.

• $\varphi_h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & h \end{Vmatrix}$$

Determinare h in modo tale che φ_h sia degenere.

$$\varphi_h(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 - 2(x_1 y_3 + x_3 y_1) + x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + h \cdot x_3 y_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + h \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ -2x_1 + x_2 = -h \cdot x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 = -4x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ -2x_1 + x_2 = -h \cdot x_3 \end{cases}$$

$h = 5$, per cui: $\begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \end{cases}$ $\ker f = \{(-2t, t, -t) / t \in \mathbb{R}\}$

$B_{\ker f} = \{(-2, 1, -1)\}$

• $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

scrivere A di φ tale che:

$$\begin{cases} \varphi(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 9 = a_{11} \\ \varphi(\bar{e}_2, \bar{e}_3) + \varphi(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = 2 \\ \varphi(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = \varphi(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = \varphi(\bar{e}_1, \bar{e}_3) \\ \varphi(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{e}_3) = 5 \\ \varphi(\bar{e}_1, \bar{e}_2 + \bar{e}_3) = 0 \end{cases}$$

- $A = \begin{Vmatrix} 3 & a & b \\ a & 4 & -2 \\ b & -2 & c \end{Vmatrix}$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$

siano coniugati

$B = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, 2x_1 - x_3 = 0\}$

$A = \{(x_1, x_2, -x_1 + 2x_2) \,/\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ $\qquad B_A = \{\underset{\overline{a_1}}{(1,0,-1)}, \underset{\overline{a_2}}{(0,1,2)}\}$

$B = \{(x_1, x_2, 2x_1) \,/\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ $\qquad B_B = \{\underset{\overline{b_1}}{(1,0,2)}, \underset{\overline{b_2}}{(0,1,0)}\}$

$\varphi(\overline{x}, \overline{y}) = 3x_1y_1 + 4x_2y_2 + c \cdot x_3y_3 + a(x_1y_2 + x_2y_1) + b(x_1y_3 + x_3y_1) - 2(x_2y_3 + x_3y_2)$

$\varphi(\overline{a_1}, \overline{b_1}) = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + c \cdot (-1) \cdot 2 + a(0) + b(2-1) - 2(0) = 3 - 2c + b = 0$

$\varphi(\overline{a_1}, \overline{b_2}) = 0 + 0 + 0 + a(1+0) + b(0) + 2(-1) = a + 2 = 0$

$\varphi(\overline{a_2}, \overline{b_1}) = 0 + 0 + c \cdot 4 + a(0+1) + b(0+2) - 2(2+0) = 4c + a + 2b - 4 = 0$

$\varphi(\overline{a_2}, \overline{b_2}) = 0 + 4 + 0 + a(0) + b(0) - 2(2) = 4 - 4 = 0$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b - 2c = -3 \\ a + 2b + 4c = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b - 2c = -3 \\ b + 2c = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

- $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 + 1(x_1y_2 + x_2y_1) + 3(x_1y_3 + x_3y_1) + 1(x_2y_3 + x_3y_2)$

$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$

- $V = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$

φ forma bilineare simmetrica $\qquad A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$

$\varphi(\overline{x}, \overline{y}) = -x_1y_1 + 3x_3y_3 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1) + 2(x_2y_3 + x_3y_2)$

$\phi(\overline{x}) = -x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

$\ker \varphi = \{\overline{x} \in V \,/\, \varphi(x, y) = 0 \quad \forall \overline{y} \in V\}$

$\varphi(\overline{x}, \overline{v_1}) = 0 \qquad \varphi(\overline{x}, \overline{v_2}) = 0 \qquad \varphi(\overline{x}, \overline{v_3}) = 0$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \end{cases} \qquad \ker \varphi = \{(t, t, -t)\} \qquad B_{\ker \varphi} = \{(1, 1, -1)\}$$

Sottospazio coniugato a $\bar{v} = 5\bar{v}_1 - \bar{v}_2 + 2\bar{v}_3 = \{\bar{x} / \varphi(\bar{x},\bar{v}) = 0\}$

$$\varphi(\bar{x},\bar{v}) = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix} = -5x_1 + 14x_2 + 9x_3$$

$-5x_1 + 14x_2 + 9x_3 = 0$

$\{(x_1, x_2, x_3) / -5x_1 + 14x_2 + 9x_3 = 0\}$

Base $\{(1, 0, \frac{5}{9}), (0, 1, -\frac{14}{9})\}$

Vettori isotropi rispetto a ϕ $\quad x \in \mathcal{L}\langle v_1, v_2 \rangle$

$\bar{x} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 \iff (x_1, x_2, 0) \qquad \phi(\bar{x}) = 0 \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ -x_1^2 + 4x_1x_2 = 0 \end{cases}$

Esercizio punti a) - l) (vedi teoria):

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & a & b \end{Vmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R} \qquad B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$$

a) $\bar{u}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \qquad \varphi(\bar{x},\bar{y}) = b \cdot x_3y_3 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1) + a \cdot (x_2y_3 + x_3y_2)$

$\bar{u}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_3$

$\bar{u}_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$

b) $\varphi(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0 = -b + 4 + (-1+2) + a(-1)$

$\varphi(\bar{u}_1, \bar{u}_3) = 0 = 4 + 1 + a(1) = 0$

$\rightarrow \begin{cases} -a - b + 5 = 0 \\ a + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 10 \\ a = -5 \end{cases}$

c) $\varphi(\bar{u}_1, 2\bar{u}_2 + \bar{u}_3) = 0$ in quanto:

$\varphi(\bar{u}_1, 2\bar{u}_2 + \bar{u}_3) = \varphi(\bar{u}_1, 2\bar{u}_2) + \varphi(\bar{u}_1, \bar{u}_3) = 2 \cdot \varphi(\bar{u}_1, \bar{u}_2) + \varphi(\bar{u}_1, \bar{u}_3)$

d) $\phi(x) = -b x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2 \cdot a \cdot x_2x_3$

$\phi(\bar{u}_2) = \varphi(\bar{u}_2, \bar{u}_2) = 0 \quad \rightarrow \quad b = 4$ (nessuna condizione su a)

e) $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + a \cdot x_3 = 0 \\ x_1 + a \cdot x_2 + b \cdot x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{x_3}{2} \\ x_1 = -\frac{a}{2}x_3 \\ -\frac{a}{2}x_3 - \frac{a}{2}x_3 + b \cdot x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = -\frac{a}{2}x_3 \\ (-a+b)\, x_3 = 0 \end{cases}$

$a \neq b$: $Ker\ \varphi = \{\bar{0}\}$

$a = b$: $Ker\ \varphi = \{(-\frac{a}{2}x_3, -\frac{a}{2}x_3, 0)\}$

$u_2 \notin Ker\ \varphi$

f) $b = 4 \qquad \phi$ non definita in quanto se ϕ è semidefinita il nucleo coincide con l'insieme dei vettori isotropi

g) $\det A \neq 0 \iff a \neq b$

h) $\det A \neq 0 \iff a \neq b$

i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

l) Per $a \neq b$, l'endomorfismo associato è invertibile, ed è quindi un automorfismo. Per il secondo teorema di equivalenza le immagini dei vettori di una base formano una base.

- $\mathbb{R}^3$ $\quad B = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$

A?

$$\begin{cases} \varphi(\overline{e_2}, \overline{e_2}) + \varphi(\overline{e_3}, \overline{e_3}) = 2 \\ \varphi(\overline{e_2}, e_2) = \varphi(\overline{e_3}, \overline{e_3}) = \varphi(\overline{e_1}, \overline{e_3}) \\ \varphi(\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}, \overline{e_3}) = 5 \\ \varphi(\overline{e_2}, \overline{e_1} + \overline{e_3}) = 0 \\ \varphi(\overline{e_1}, \overline{e_1}) = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = 9 \\ a_{22} = a_{33} = a_{13} \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} = 5 \\ a_{12} + a_{23} = 0 \\ a_{22} + a_{33} = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_{11} = 9 \\ a_{22} = a_{33} = a_{13} = 1 \\ a_{23} = 3 \\ a_{12} = -3 \end{cases}$$

$$A = \begin{Vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

- $M_{2,2}(\mathbb{R})$ $\quad \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{Vmatrix}$ $\quad \varphi(X, Y) = tr({}^tXY)$ è un prodotto scalare

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{Vmatrix} \qquad {}^tX = \begin{Vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{Vmatrix}$$

$$Y = \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{Vmatrix} \qquad {}^tXY = \begin{Vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1y_1 + x_3y_3 & x_1y_2 + x_3y_4 \\ x_2y_1 + x_4y_3 & x_2y_2 + x_4y_4 \end{Vmatrix}$$

$$tr({}^tXY) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

$$\phi(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 0 \qquad \phi(X) = 0 \iff X = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

ISOMETRIE

Sia E uno spazio vettoriale euclideo, f automorfismo di E.

Def. f si dice isometria se $\forall x \in E \quad \| f(\bar{x}) \| = \| \bar{x} \|$

Teor. f è isometria $\iff \forall x, y \in E \quad f(\bar{x}) \cdot f(\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}$

"$\Leftarrow$" Scelti $x = y$ la tesi diventa $f(\bar{x}) \cdot f(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{x} \Rightarrow \| f(x) \|^2 = \| x \|^2$, da cui estraendo la radice si ottiene quello che volevamo provare.

"$\Rightarrow$" $\| f(\bar{x} + \bar{y}) \| = \| \bar{x} + \bar{y} \|$

$\| f(\bar{x} + \bar{y}) \|^2 = f(x+y) \cdot f(x+y) = (f(x) + f(y)) \cdot (f(x) + f(y)) =$

$f(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f(y) + f(y) \cdot f(x) + f(y) \cdot f(y) =$

$(x \cdot x) + 2 \cdot (f(x) \cdot f(y)) + (y \cdot y)$

$\| x + y \|^2 = (x+y) \cdot (x+y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y =$

$(x \cdot x) + 2 (x \cdot y) + (y \cdot y)$

Poiché, in quanto isometria;

$\| x + y \|^2 = \| f(x+y) \|^2$

$(x \cdot x) + 2(x \cdot y) + (y \cdot y) = (x \cdot x) + 2 \cdot (f(x) \cdot f(y)) + (y \cdot y)$

$2(x \cdot y) = 2 \cdot (f(x) \cdot f(y))$

$(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

il che prova la tesi.

Prop. Se E ha dim n

f endomorfismo tale che $\| f(\bar{x}) \| = \| \bar{x} \| \quad \forall x \in E$

allora f è un automorfismo, cioè ISOMETRIA

II° teorema di equivalenza

$f \in End(E_n)$

f è automorfismo $\iff \ker f = \{ \bar{0} \}$

$\ker f = \{ \bar{x} \,/\, f(\bar{x}) = \bar{0} \}$

$x \in \ker f \qquad f(\bar{x}) = \bar{0}$

$\| f(x) \| = \| \bar{0} \| = 0 \longrightarrow \| f(\bar{x}) \| = \| \bar{x} \| = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$

Spazio unitario o hermitiano

E su $\mathbb{C}$ forma sesquilineare hermitiana definita positiva

$\phi(x) = \varphi(x,x) = x \cdot x$

① $\begin{cases} x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \\ (y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \end{cases}$

② $x \cdot y = \overline{y \cdot x}$

③ $(\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y)$

$x \cdot (\lambda y) = \overline{\lambda} (x \cdot y)$

$\phi(x) = x^2 \geq 0$

$\phi(x) = 0 \iff \bar{x} = 0$

$E = \mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$ è spazio hermitiano rispetto al prodotto scalare hermitiano standard

$(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \dots + u_n \overline{v_n}$

Infatti:

- $x \cdot (y+z) = (u_1, \dots, u_n) \cdot [(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n)] =$
  $(u_1, \dots, u_n) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) = u_1 (\overline{v_1 + w_1}) + u_2 (\overline{v_2 + w_2}) + \dots + u_n (\overline{v_n + w_n}) =$
  $u_1 (\overline{v_1} + \overline{w_1}) + u_2 (\overline{v_2} + \overline{w_2}) + \dots + u_n (\overline{v_n} + \overline{w_n}) =$
  $u_1 \overline{v_1} + u_1 \overline{w_1} + u_2 \overline{v_2} + u_2 \overline{w_2} + \dots + u_n \overline{v_n} + u_n \overline{w_n} =$
  $(u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \dots + u_n \overline{v_n}) + (u_1 \overline{w_1} + u_2 \overline{w_2} + \dots + u_n \overline{w_n}) = x \cdot y + x \cdot z$

- $(y+z) \cdot x = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n) \cdot (u_1, \dots, u_n) =$
  $(v_1 + w_1) \cdot \overline{u_1} + \dots + (v_n + w_n) \cdot \overline{u_n} = v_1 \overline{u_1} + w_1 \overline{u_1} + \dots = y \cdot x + z \cdot x$

- $x \cdot y = \overline{y \cdot x}$
  $\overline{y \cdot x} = \overline{(v_1, \dots, v_n) \cdot (u_1, \dots, u_n)} = \overline{(v_1 \overline{u_1} + v_2 \overline{u_2} + \dots + v_n \overline{u_n})} = \overline{(v_1 \overline{u_1})} + \dots + \overline{(v_n \overline{u_n})} =$
  $\overline{v_1} \cdot \overline{(\overline{u_1})} + \overline{v_2} \cdot \overline{(\overline{u_2})} + \dots + \overline{v_n} \cdot \overline{(\overline{u_n})} = \overline{v_1} u_1 + \overline{v_2} u_2 + \dots + \overline{v_n} u_n = x \cdot y$

- $(\lambda x) \cdot y = \lambda (u_1, \dots, u_n) \cdot (v_1, \dots, v_n) = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) \cdot (v_1, \dots, v_n) =$
  $\lambda u_1 \cdot \overline{v_1} + \dots + \lambda u_n \overline{v_n} = \lambda (u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \dots + u_n \overline{v_n}) = \lambda (x \cdot y)$

- $x \cdot (\lambda y) = (u_1, \dots, u_n) \cdot [\lambda (v_1, \dots, v_n)] = (u_1, \dots, u_n) \cdot (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) =$
  $u_1 \cdot (\overline{\lambda v_1}) + u_2 \cdot (\overline{\lambda v_2}) + \dots + u_n (\overline{\lambda v_n}) = u_1 \cdot \overline{\lambda} \cdot \overline{v_1} + \dots + u_n \cdot \overline{\lambda} + \overline{v_n} =$
  $\overline{\lambda} \cdot (u_1 \cdot \overline{v_1} + \dots + u_n \cdot \overline{v_n}) = \overline{\lambda} \cdot (x \cdot y)$

- $\phi(x) = x \cdot x = (u_1, \dots, u_n) \cdot (u_1, \dots, u_n) = u_1 \overline{u_1} + \dots + u_n \overline{u_n} = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_n\|^2$

- $\phi(\bar{x}) = 0 \iff \|u_1\|^2 = \dots = \|u_n\|^2 = 0 \implies \bar{x} = \bar{0}$

Dimensioni:

$\mathbb{C}$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ $\quad B = \{1, i\} \quad a + ib = \underset{\in \mathbb{R}}{a} \cdot 1 + \underset{\in \mathbb{R}}{b} \cdot i \quad \dim = 2$

$\mathbb{C}$ spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ $\quad B = \{1\} \quad a + ib = \underset{\in \mathbb{C}}{(a+ib)} \cdot 1 \quad \dim = 1$

$\mathbb{C}^n$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ $\quad B = \{(1,0,\dots,0), (i,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), (0,i,\dots,0), \dots\}$ dim

$\mathbb{C}^n$ spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ $\quad B = \{(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)\}$ $\dim =$

Spazi affini

E spazio vettoriale su K

$A = \{\text{insieme di punti}\} \neq \emptyset$

con $a: A \times A \to E$

$\forall A \in A \quad \forall \bar{x} \in E \quad \exists!\ B \in A \ /\ a(A,B) = \bar{x}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad B - A$

Prop. $\forall\ A, B, C \in A$

$a(A,B) + a(B,C) = a(A,C)$ regole di Chasles

Esercizi

$\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\varphi(\bar{x},\bar{y}) = 2x_1y_1 + 3(x_1y_2 + x_2y_1) - (x_1y_3 + x_3y_1) - 3(x_2y_3 + x_3y_2)$

(a) φ è degenere?

(b) ϕ in forma canonica e classificarla

(a) $\left\|\begin{matrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \end{matrix}\right\| \qquad |A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 9 + 9 = 0$

quindi φ è degenere

(b) ϕ in forma canonica:

$\phi(\bar{x}) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 \\ 3 & -\lambda & -3 \\ -1 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -\lambda \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$(2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 9) - 3 \cdot (-3\lambda - 3) - 1 \cdot (-9 - \lambda) = 0$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 19\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 19) = 0$

$\lambda = 1 - 2\sqrt{5} \quad \vee \quad \lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = 1 + 2\sqrt{5}$

$\phi(\bar{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = (1 - 2\sqrt{5})\, y_1^2 + (1 + 2\sqrt{5})\, y_3^2$

ϕ è non definita

segnatura di $\phi \overset{def}{=}$ # autovalori positivi − # autovalori negativi $= 1 - 1 = 0$

$\text{Sign}(\phi) = (1, 1) = (p, n)$

- $\phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3(x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^3$

ridurre ϕ a una forma canonica

$$M(\phi) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1 & \sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1-\lambda & \sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\lambda \end{vmatrix} + \cos\alpha\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\cdot(-\lambda+\lambda^2-\sin^2\alpha) + \cos\alpha\,(-(1-\lambda)\cdot\cos\alpha) =$$

$$(1-\lambda)\cdot[-\lambda+\lambda^2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha] = 0$$

$$(1-\lambda)\cdot(\lambda^2-\lambda-1) = 0$$

$$\lambda = 1 \ \vee\ \lambda = -\frac{1}{\phi_k} \ \vee\ \lambda = \phi_k \qquad \phi_k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$\therefore\ \phi(\overline{y}) = y_1^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}y_2^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y_3^2$ non definita, segnatura$(\phi) = (2,1)$

- $\phi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

ridurre ϕ specificando la base ortonormale che la riduce

$$M^B(\phi) = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & -2 & 0 \\ -2 & (1-\lambda) & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

	1	-3	-6	8
1		1	-2	-8
	1	-2	-8	0

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda-8) = 0 = (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)$$

$$\lambda = -2 \ \vee\ \lambda = 1 \ \vee\ \lambda = 4$$

$$\phi(\overline{y}) = y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$$

Quanto alla base ortonormale, si calcolino prima gli autospazi V_1, V_2 e V_4:

$V_1: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x - 2z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -z \\ 2y = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$ $(2,1,-2)$ base, $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ base normale

$V_2: \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 0 = 0 \\ y = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$ $(1,2,2)$ base, $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ base normale

$V_4: \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y - 2z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x \\ 0 = 0 \\ y = -2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$ $(2,-2,1)$ base, $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ base normale

$$P = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix} \qquad {}^t(P \cdot A) \cdot P = D \qquad D = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

$$\phi(x) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \longrightarrow D$$

diagonalizzare A mediante una matrice ortogonale reale

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda = 1$ doppio $\qquad \lambda = -2$ singolo

$$V_{-2} : \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \to \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \end{cases}$$

$$B_{V_{-2}} = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$$

$$V_1 : \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \to \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = h \\ x_2 = k \\ x_3 = h+k \end{cases} \qquad B_{V_1} = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$$

I due vettori di B_{V_1} non sono però ortogonali, per cui si rende necessario utilizzare Gram-Schmidt:

$$\overline{v_2}' = \overline{v_2} + \lambda \cdot \overline{v_1} \;/\; \overline{v_2}' \perp \overline{v_1} \leftrightarrow \overline{v_2}' \cdot \overline{v_1} = 0$$

$$(\overline{v_2} + \lambda \cdot \overline{v_1}) \cdot \overline{v_1} = 0$$

$$\lambda = -\frac{\overline{v_2} \cdot \overline{v_1}}{\overline{v_1} \cdot \overline{v_1}} = -\frac{1}{2}$$

$$\overline{v_2}' = \overline{v_2} + \frac{1}{2} \cdot \overline{v_1} \qquad \overline{v_1} = (1,0,1) \qquad \overline{v_2}' = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \to$$ normalizzare dividendo per la norma

si trova una base ortonormale di $B_{V_1} = \{(a,b,c), (d,e,f)\}$

e si ~~scrive~~ ricava P:

$$D = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad P = \begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & a & d \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & b & e \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & c & f \end{Vmatrix}$$

Spazi affini

E spazio vettoriale su K $\quad A = \{\text{punti}\} \neq \emptyset \quad a: A \times A \to E$

$\forall A \in A \quad \forall \bar{x} \in E \quad \exists!\ B \quad a(A,B) = \bar{x}$

$\forall A, B, C \in A \quad a(A,B) + a(B,C) = a(A,C)$ regola di Chasles

Prop. ① $a(A,A) = \bar{o}$

② $\forall A, B \in A \quad a(A,B) = -a(B,A)$

③ $a(A,B) = \bar{o} \iff A = B$

Dim. ① Applicando Chasles: $(A = B = C)$

$a(A,A) + a(A,A) = a(A,A)$ da cui $a(A,A) = \bar{o}$

② Applicando Chasles: $(A = C)$

$a(A,B) + a(B,A) = a(A,A)$

$a(A,B) + a(B,A) = \bar{o}$

$a(A,B) = \bar{x}$

$B - A = \bar{x}$

$B = A + \bar{x}$

$\{A_1, \dots, A_p\}$ punti di A $\quad \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \in K$

$\forall O \in A \quad \exists!\ P \in A \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_p = 1$

$P - O = \alpha_1 (A_1 - O) + \dots + \alpha_p (A_p - O)$

P non dipende da O e si dice BARICENTRO

Spazio affine euclideo

$a(P,Q) = Q - P = \bar{x} \in E$

E euclideo $\Longrightarrow \forall \bar{x} \in E \quad \exists \|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} \in \mathbb{R}_0^+$

$d(P,Q) = \|Q - P\|$ distanza nello spazio affine euclideo $\mathcal{E}$

$\forall P, Q, R \in \mathcal{E}$

1) $d(P,Q) \geq 0$

2) $d(P,Q) = d(Q,P)$

3) $d(P,Q) = 0 \Longrightarrow P = Q$

4) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$

1) $d(P,Q) = \sqrt{(Q-P) \cdot (Q-P)} \geq 0$

2) $d(Q,P) = \sqrt{(P-Q) \cdot (P-Q)} = \sqrt{(-1) \cdot (-1) \cdot (Q-P) \cdot (Q-P)} = \sqrt{(Q-P) \cdot (Q-P)} = d(P,Q)$

3) $d(P,Q) = \|Q - P\| = 0 \iff Q - P = \bar{o} \iff P = Q$

4) Minkowski $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

$\|Q - P\| \leq \|R - P\| + \|Q - R\|$

A spazio affine di dim n

E $\quad B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ $\quad$: $\quad O \in A$ ORIGINE

Riferimento affine $R_a = \{O; B\}$.

$O \quad \bar{e}_1 \quad \exists!\ A_1 \qquad a(O, A_1) = \bar{e}_1$

$\bar{e}_i \quad \exists!\ A_i \qquad A_1 - O = \bar{e}_1 \qquad P(x_1, \dots, x_n)$

$A_i - O = \bar{e}_i$ $\qquad$ coordinate affini di P

$\forall P \in \mathcal{R} \qquad P - O \in E$

$P - O = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n =$

$R_a = \{O, A_1, \dots A_n\} \qquad x_1(A_1 - O) + \dots + x_n(A_n - O)$

Se E spazio euclideo $\Rightarrow \exists\ B$ ortonormale

$R = \{O, B_{ON}\} \qquad P = (x_1, \dots, x_n)$ coordinate cartesiane ortonormali

$d(P, Q) = \|Q - P\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

$Q - P = (x_1 - y_1)\,\bar{e}_1 + \dots + (x_n - y_n) \cdot \bar{e}_n$

$B = \{e_1, \dots, e_n\} \qquad B' = \{e_1', \dots, e_n'\} \qquad A = \|a_{ij}\|$

$O' = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ componenti nella base $R(O, B)$

$P(x_1, \dots, x_n) \qquad P - O = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$

$R'(x_1', \dots, x_n') \qquad P - O' = x_1' \bar{e}_1' + \dots + x_n' \bar{e}_n'$

$(P - O) - (O' - O)$

$$\begin{cases} x_1 = x_1' a_{11} + \dots + x_n' a_{1n} + x_1^0 \\ \dots \\ x_n = x_1' a_{n1} + \dots + x_n' a_{nn} + x_n^0 \end{cases}$$

Esercizi

- $A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$ $\qquad \phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

$$\det \begin{Vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{Vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0 \qquad \lambda = -1 \ \vee \ \lambda = 1 \ \vee \ \lambda = 4$$

$$D = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \qquad \phi(y) = y_1^2 + 4y_2^2 - y_3^2 \quad \text{non degenere e non definita}$$

$$E_{\lambda=1} = \begin{cases} -2y + z = 0 \\ -2x \cancel{} - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases} \qquad B_{E_{\lambda=1}} = \{(-1, 1, 2)\}$$

$$E_{\lambda=4} = \begin{cases} -3x - 2y + z = 0 \\ -2x - 3y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \qquad B_{E_{\lambda=4}} = \{(1, -1, 1)\}$$

$$E_{\lambda=-1} = \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \qquad B_{E_{\lambda=-1}} = \{(1, 1, 0)\}$$

$$B_{E_{\lambda=1}} = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\} \qquad B_{E_{\lambda=4}} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} \qquad B_{E_{\lambda=-1}} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$$

$$P = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{Vmatrix}$$

- $A = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{Vmatrix}$ $\qquad \phi(\bar{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2-\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2(-\lambda + 6) = 0$$

$\lambda = 0$ doppia $\qquad \lambda = 6$ singola

$$\phi(y) = 6y_1^2$$

$$E_{\lambda=0} = \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = h \\ x_2 = h + k \\ x_3 = k \end{cases} \qquad B_{E_{\lambda=0}} = \{\overset{\bar{v}_1}{(1,1,0)}, \overset{\bar{v}_2}{(0,1,1)}\}$$

$$E_{\lambda=6} = \begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$B_{E_{\lambda=6}} = \{\overset{\bar{v}_3}{(1, -1, 1)}\}$$

$\bar v_1 = \bar u_1 = (1,1,0)$

$\bar v_2 = \bar u_2 + \lambda \cdot \bar u_1 = (1,1,0) + \lambda \cdot (0,1,1) = (1, \lambda+1, \lambda)$

$(1,1,0) \cdot (1, \lambda+1, \lambda) = 0$

$1 + \lambda + 1 = \lambda + 2 = 0 \qquad \lambda = -2$

$\bar v_2 = (1,1,0) - 2 \cdot (0,1,1) = (1,-1,-2)$

$\bar u_1 = (1,1,0) \rightarrow \frac{\bar u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0\right)$

$\bar v_2 = (1,-1,-2) \rightarrow \frac{\bar v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt6}, -\frac{1}{\sqrt6}, -\frac{2}{\sqrt6}\right)$

$\bar u_3 = (1,-1,1) \rightarrow \frac{\bar u_3}{\|u_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right)$

$$P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{\sqrt2}{2\sqrt3} \\ -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{\sqrt2}{2\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{\sqrt2}{\sqrt3} \end{Vmatrix} \quad \text{o anche} \quad P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & -\frac{2}{\sqrt6} \end{Vmatrix}$$

Conica del piano

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

$Q(x,y) + 2 \cdot \begin{Vmatrix} a_{13} & a_{23} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + a_{33} = 0$

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2 \cdot \begin{Vmatrix} a_{13} & a_{23} \end{Vmatrix} \cdot P \cdot \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + a_{33} = 0$

Esempio: $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x + 5y = 0 \qquad Q(x,y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2$

$A_{33} = \begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6)$

$E_{\lambda=1}: \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t \end{cases} \rightarrow (2;1) \qquad B_{E_{\lambda=1}} = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)\right\}$

$E_{\lambda=6}: \begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \end{cases} \rightarrow (1;2) \qquad B_{E_{\lambda=6}} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt5}, -\frac{2}{\sqrt5}\right)\right\}$

$6x'^2 + y'^2 + \begin{Vmatrix} -2 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} = 0$

$6x'^2 + y'^2 + \begin{Vmatrix} 2 & -5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{x'}{\sqrt5} & \frac{2y'}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5}x' & \frac{y'}{\sqrt5} \end{Vmatrix} = 0$

$6x'^2 + y'^2 - \frac{2}{\sqrt5}x' - \frac{4}{\sqrt5}y' - \frac{10}{\sqrt5}x' + \frac{5}{\sqrt5}y' = 0$

$6x'^2 + y'^2 - \frac{12}{\sqrt5}x' + \frac{1}{\sqrt5}y' = 0$

$6\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt5}x' + \frac{1}{5}\right) - \frac{6}{5} + y'^2 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt5}y' + \frac{1}{20} - \frac{1}{20} = 0$

$6\left(x' - \frac{1}{\sqrt5}\right)^2 + \left(y' + \frac{1}{2\sqrt5}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \qquad X = x' - \frac{1}{\sqrt5}$

$Y = y' + \frac{1}{2\sqrt5}$

$C: \quad 3x^2 + 4xy + 4x - 1 = 0$

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \text{non degenere}$$

$$A_{33} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \quad \text{iperbole}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad -\lambda(3-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \qquad \lambda = -1 \ \vee \ \lambda = 4$$

$$4X^2 - Y^2 + \gamma = 0$$

Poiché la conica è a centro, per trovare γ è sufficiente procedere in questo modo:

- prima si trova il centro della conica, mettendo a sistema le prime due righe della matrice e assegnando rispettivamente $x, y, 1$:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2 = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad C\,(0; 1)$$

- dopodiché si considera l'ultima riga della matrice e si assegnano ai tre termini rispettivamente $x_0, y_0, 1$:

$$\gamma = 2 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 - 1 = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 1 = -1$$

L'equazione canonica è quindi: $4X^2 - Y^2 - 1 = 0$, ovvero $\dfrac{X^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{Y^2}{1} = 1$

$C: \quad 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 6x + 6y + 5 = 0$

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \end{Vmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$A_{33} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \text{ellisse}$$

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 \\ -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 1 \ \vee \ \lambda = 3$$

$$X^2 + 3Y^2 + \gamma = 0$$

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ -x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \qquad C(1; -1)$$

$$\gamma = -3 \cdot x_0 + 3 \cdot y_0 + 5 = -3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 5 = -1$$

$$X^2 + 3Y^2 - 1 = 0$$

$$X^2 + \frac{Y^2}{\frac{1}{3}} - 1 = 0$$

Per trovare l'equazione della rotazione dobbiamo trovare gli autospazi:

$E_{\lambda=1}$: $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right\| \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ $\quad B = \left\{\left(\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right)\right\}$

$E_{\lambda=3}$: $\left\|\begin{matrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{matrix}\right\| \rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$ $\quad B = \left\{\left(-\frac{\sqrt2}{2}, +\frac{\sqrt2}{2}\right)\right\}$

$P = \left\|\begin{matrix} \frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2} \\ \frac{\sqrt2}{2} & +\frac{\sqrt2}{2} \end{matrix}\right\|$ matrice della rotazione
(le basi degli autospazi vanno normalizzate)

$(x, y) \longrightarrow (x', y')$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt2}{2}x' + \frac{\sqrt2}{2}y' = \frac{\sqrt2}{2}(x'+y') \\ y = \frac{\sqrt2}{2}x' + \frac{\sqrt2}{2}y' = \frac{\sqrt2}{2}(x'+y') \end{cases}$$

$$2\cdot\left[\frac{\sqrt2}{2}(x'-y')\right]^2 + 2\cdot\left[\frac{\sqrt2}{2}\cdot(x'+y')\right]^2 - 2\cdot\frac{\sqrt2}{2}(x'-y')\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot(x'+y') - 3\sqrt2(x'-y') + 3\sqrt2(x'+y') + 5 = 0$$

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot(x'^2+y'^2-2\cdot x'\cdot y') + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(x'^2+y'^2+2\cdot x'\cdot y') - (x'^2-y'^2) + 6\sqrt2\, y' + 5 = 0$$

$$x'^2 + 3y'^2 + 6\sqrt2\, y' + 5 = 0$$

Infine si compie una traslazione:

$(x', y') \rightarrow (X, Y)$

$$\begin{cases} x' = X + x_0 \\ y' = Y + y_0 \end{cases}$$

$$(X+x_0)^2 + 3(Y+y_0)^2 + 6\sqrt2(Y+y_0) + 5 = 0$$

$$X^2 + 2\cdot x_0\cdot X + x_0^2 + 3Y^2 + 6\cdot y_0\cdot Y + y_0^2 + 6\sqrt2\cdot Y + 6\sqrt2\cdot y_0 + 5 = 0$$

$$X^2 + 3Y^2 + (2\cdot x_0)\cdot X + (6\cdot y_0 + 6\sqrt2)\cdot Y + (x_0^2 + 3y_0^2 + 6\sqrt2\, y_0 + 5) = 0$$

Imponendo nulli i coefficienti di X e Y si ottiene:

$$\begin{cases} 2x_0 = 0 \\ 6y_0 + 6\sqrt2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -\sqrt2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = X \\ y' = Y - \sqrt2 \end{cases}$$

$C: \quad 2x^2 + xy + y^2 - 2x + y - 1 = 0$

$$A = \left\|\begin{matrix} 2 & \frac12 & -1 \\ \frac12 & 1 & \frac12 \\ -1 & \frac12 & -1 \end{matrix}\right\| \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & \frac12 & -1 \\ \frac12 & 1 & \frac12 \\ -1 & \frac12 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = \left\|\begin{matrix} 2 & \frac12 \\ \frac12 & 1 \end{matrix}\right\| \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & \frac12 \\ \frac12 & 1 \end{vmatrix} = \frac74 > 0 \quad \text{ellisse}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac12 y - 1 = 0 \\ \frac12 x + y + \frac12 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + y - 2 = 0 \\ 4x + 8y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac57 \\ y = -\frac67 \end{cases}$$

$C: \quad x^2 + 2xy + y^2 - x + 2y - 1 = 0$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{Vmatrix} \qquad |A| \neq 0$$

$$A_{33} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad |A_{33}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$1-\lambda = 1 \quad \vee \quad 1-\lambda = -1$$

$$\lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = 2$$

$$E_{\lambda=0} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = +t \end{cases} \qquad B_{E_{\lambda=0}} = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

$$E_{\lambda=2} = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \qquad B_{E_{\lambda=2}} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

$$P = \begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Vmatrix}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y')$$

$$\frac{1}{2}(x'+y')^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x'+y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-x'+y') + \frac{1}{2}(-x'+y')^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') + \sqrt{2}(-x'+y') - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 + x'y' + y'^2 - x'^2 + \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - x'y' - \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' - 1 =$$

$$2y'^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x' = X + x_0 \\ y' = Y + y_0 \end{cases}$$

$$2(Y+y_0)^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}(X+x_0) + \frac{\sqrt{2}}{2}(Y+y_0) - 1 = 0$$

$$2Y^2 + 4 \cdot y_0 \cdot Y + 2y_0^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}X - \frac{3}{2}\sqrt{2}x_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}Y + \frac{\sqrt{2}}{2}y_0 - 1 = 0$$

$$2Y^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}X + \left(4 \cdot y_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)Y + \left(2y_0^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}x_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_0 - 1\right) = 0$$

Imponendo nullo il coefficiente di Y si trova $y_0 = -\frac{\sqrt{2}}{8}$; imponendo nullo il termine noto si trova $x_0 = \frac{17\sqrt{2}}{48}$

L'equazione in forma canonica è:

$$Y^2 = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,X$$

$C: \quad 4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 2y - 3 = 0$

$$2x^2-4xy+5y^2-2x+5y=0$$

$$\lambda_1 = 6 \qquad \lambda_2 = 1$$

$$B_{E_{\lambda=6}} = \left\{\left(\frac{\sqrt5}{5}, -\frac{2}{5}\sqrt5\right)\right\} \qquad B_{E_{\lambda=1}} = \left\{\left(\frac{2}{5}\sqrt5, \frac{\sqrt5}{5}\right)\right\} \qquad P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{Vmatrix}$$

$$Q(x,y) + \begin{Vmatrix} 2a_{13} & 2a_{23} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + a_{33} = 0$$

$$6x'^2 + y'^2 + \begin{Vmatrix} -2 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{Vmatrix} + a_{33} = 0$$

$$6x'^2 + y'^2 - \frac{12}{\sqrt5}x' + \frac{1}{\sqrt5}y' = 0$$

In alternativa:

$$2x'^2 - 4x'y' + 5y'^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot x' + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot y' + f(P_0) = 0$$

$$2x'^2 - 4x'y' + 5y'^2 + (4x_0 - 4y_0 - 2)\cdot x' + (-4x_0 + 10y_0 + 5)\,y' + 2x_0^2 - 4x_0y_0 + 5y_0^2 - 2x_0 + 5y_0 = 0$$

$$\begin{cases} 4x_0 - 4y_0 - 2 = 0 \\ -4x_0 + 10y_0 + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$ sostituendo, il termine noto γ è uguale a $-\frac{5}{4}$

- $4x^2 - 4xy + y^2 + 5x - 9 = 0$

$$A_{33} = \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix} \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} +4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 5$$

$$E_{\lambda=0} = \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \end{cases} \qquad B_{E_{\lambda=0}} = \left\{\left(\frac{\sqrt5}{5}, \frac{2\sqrt5}{5}\right)\right\}$$

$$E_{\lambda=5} = \begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -t \end{cases} \qquad B_{E_{\lambda=5}} = \left\{\left(-\frac{2\sqrt5}{5}, \frac{\sqrt5}{5}\right)\right\}$$

$$P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{Vmatrix}$$

$$0x'^2 + 5y'^2 + \begin{Vmatrix} 5 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{x'}{\sqrt5} & -\frac{2y'}{\sqrt5} \\ \frac{2x'}{\sqrt5} & \frac{y'}{\sqrt5} \end{Vmatrix} - 9 = 0$$

$$5y'^2 + \frac{5x'}{\sqrt5} - \frac{10y'}{\sqrt5} - 9 = 0$$

$$5\left(y'^2 - \frac{2}{\sqrt5}y' + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \frac{5}{\sqrt5}x' - 9 = 0$$

$$5Y^2 + \sqrt5 X = 0 \qquad Y = y' - \frac{1}{\sqrt5} \qquad X = x' - 2\sqrt5$$