ISTITUZIONI DI GEOMETRIA

- Richiami di topologia
  - Definizione di topologia come insieme dei suoi aperti
  - Definizione di base di una topologia
  - Definizione di chiusi, con relative proprietà
  - Definizione di "topologia più fine di un'altra"; lo spazio delle topologie su X è parzialmente ordinato dalla relazione di finezza.
  - Definizione di intorno, parte interna, chiusura.
  - $A \subset X$ denso se $\bar{A} = X$, cioè A interseca ogni aperto non vuoto di X.
  - Se $A \subset X$, è possibile indurre una topologia τ di X su A, ponendo l'indotta τ_A in maniera tale che sia:
    M aperto di $\tau_A \iff M = A \cap N$ con N aperto di τ.
    (A, τ_A) è detto sottospazio topologico di (X, τ)
  - (X, τ), (Y, σ) due spazi topologici, $f: X \to Y$ applicazione si dice:
    - continua in $x \in X$ se $\forall V_{f(x)} \ \exists U_x \ / \ f(U_x) \subset V_{f(x)}$
    - continua se è continua in tutti i punti di X.
  - Sono equivalenti:
    - f è continua
    - $\forall A \subset Y$ A aperto $f^{-1}(A)$ aperto di X
    - $\forall A \subset Y$ A chiuso $f^{-1}(A)$ chiuso di X
    - $\forall V$ intorno di $f(x)$ $f^{-1}(V)$ intorno di X
  - f omeomorfismo se continua, invertibile, e si ha f^{-1} continua.
    Equivalentemente, se f continua, invertibile, e aperta.
  - (X, τ) compatto se da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito. $A \subset X$ è tale se lo è rispetto a τ_A.
  - (X, τ) connesso se non è partizionabile in due aperti disgiunti, o equivalentemente in due chiusi disgiunti, o ancora se non esistono insiemi sia aperti che chiusi. $A \subset X$ è tale se lo è rispetto a τ_A.
    Una componente connessa di X è un sottoinsieme connesso massimale.
  - Si può definire una topologia prodotto su $X \times Y$ come quella meno fine rispetto alla quale le proiezioni sono continue.

    $U \times V$ base della sua topologia, U ap. di X, V ap. di Y
    U base di X, V base di X
  - Se $\sim$ è una relazione di equivalenza su X, π la proiezione nat. su $X/\sim$, si può definire la più fine su $X/\sim$ rispetto cui π è continua come topologia quoziente.

    τ topologia su X
    gli aperti di $X/\sim$ sono gli M / $\pi^{-1}(M)$ è ap. di τ

VARIETÀ DIFFERENZIABILI - RICHIAMI

- Siano $u_1, \dots, u_n$ le funzioni coordinate in $\mathbb{R}^n$, U un aperto di $\mathbb{R}^n$.
  Consideriamo $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in U$, $F: U \to \mathbb{R}$ funzione, $v \in \mathbb{R}^n$.
  Indichiamo con $\underline{v}(F)_{\underline{a}}$ la derivata direzionale di F in $\underline{a}$ verso $\underline{v}$.
  Se $\underline{v} = e_j$ per un dato j, otteniamo la derivata parziale $\frac{\partial F}{\partial u_j}(\underline{a})$
- Definizione di funzione C^k (non solo se $F: U \to \mathbb{R}$, anche se $F: U \to \mathbb{R}^m$).
- Derivate parziali successive, dove non vale necessariamente Schwartz.
- Def. $U, V \subset \mathbb{R}^n$ aperti, $F: U \to V$ biezione è diffeomorfismo di classe C^k $[C^\infty]$ se F ed F^{-1} sono entrambe applicazioni C^k $[C^\infty]$.
  In tal caso U e V si dicono diffeomorfi di classe C^k $[C^\infty]$; definizione ben posta poichè F diffeomorfismo $\iff$ F^{-1} diffeomorfismo.
- Nota Il risultato si generalizza ad insiemi non necessariamente aperti.
  - F è C^k $[C^\infty]$ in X se $\forall x \in X$, $\exists U_{\underline{x}}$ in $\mathbb{R}^n$ aperto, $\overline{F}: U_{\underline{x}} \to \mathbb{R}^m$ che sia C^k $[C^\infty]$, tale per cui $\overline{F}|_{X \cap U_{\underline{x}}} = F|_{X \cap U_{\underline{x}}}$
  - $F: X \to Y$ è diffeomorfismo come sopra, ma con la nuova definizione di C^k. Ancora, in tal caso X e Y sono diffeomorfi di classe C^k $[C^\infty]$.

VARIETÀ DIFFERENZIABILI

In ciò che seguirà si considererà X spazio topologico.

- Def. n-carta locale: coppia (U, φ_U) con U aperto, φ_U omeomorph. $U \to \overset{\text{ap. di}}{\mathbb{R}^n}$
  Si parla anche di n-sistema di coordinate locali in X.
- Def. due n-carte locali (U, φ_U), (V, φ_V) in X si dicono $C^{(k)}$-compatibili se $U \cap V = \emptyset$ oppure $U \cap V \neq \emptyset$ e $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}: \varphi_U(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V)$ è un diffeomorfismo di classe $C^{(k)}$. Si dice anche compatibilità differenziabile.
- Oss. $\varphi_U(P) = (x_1(P), \dots, x_n(P))$, con $x_1, \dots, x_n$ $U \to \mathbb{R}$ componenti di $\varphi_U: U \to \mathbb{R}^n$
  Esse sono le coordinate locali in U definite da φ_U, che rendono U aperto coordinatizzato di X.
- Oss. Aperti di aperti coordinatizzati sono ancora coordinatizzati: basta restringere la carta locale, ovvero il suo omeomorfismo.
- Es. In $\mathbb{R}$ le coppie $(\mathbb{R}, t)$, $(\mathbb{R}, t^3)$ sono 1-carte locali, ma non $C^{(1)}$-compatibili, poichè $\sqrt[3]{x}$ non è C^1 in 0.

- Se U, V sono disgiunti, (U, φ_U) e (V, φ_V) due n-carte locali in X, $x_1, \dots, x_n$ coord. locali definite da φ_U, $y_1, \dots, y_n$ coord. locali definite da φ_V.
  Le componenti di $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$ sono funzioni $\varphi_U(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, dette funzioni di transizione dalle coordinate $\{x_i\}_i$ alle coordinate $\{y_i\}_i$.
- Def. Una famiglia di n-carte locali $\{(U_\lambda, \varphi_{U_\lambda})\}_{\lambda \in \Lambda}$ a 2 a 2 $C^{(k)}$-compatibili e tale che gli aperti ricoprano X è detta n-atlante differenziabile $C^{(k)}$ in X.
- Def. Uno spazio T_2 a base numerabile con assegnato un n-atlante $C^{(k)}$ è detto varietà differenziabile $C^{(k)}$ (varietà topologica se $k=0$), con n dimensione.
  L'atlante definisce, in altre parole, una struttura di varietà differenziabile in X.
- Def. Due atlanti $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{(V_\mu, \psi_\mu)\}_{\mu \in \Pi}$ sono equivalenti (definiscono la stessa struttura) se la loro unione è ancora atlante, ugualmente differenziabile.
  In tal caso ogni carta $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ è compatibile con ogni carta (V_μ, ψ_μ).
  $\exists$ un atlante massimale, data una struttura, pari all'unione di tutti che la definiscono.
- Oss. Gli aperti di varietà differenziabili sono ancora varietà differenziabili.
  Hanno la stessa dimensione e si dicono sottovarietà aperte.
  Dim. Sia X varietà diff., $A \subset X$ aperto, $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ n-atlante di X.
  La famiglia $\{(U_\lambda \cap A, \varphi_{\lambda|U_\lambda \cap A})\}_{\lambda \in \Lambda^*}$, con $\lambda \in \Lambda^*$ se $\lambda \in \Lambda$ e $U_\lambda \cap A \neq \emptyset$, è un n-atlante di A, come si verifica agevolmente.
- Es. Uno spazio discreto è una varietà diff di dim. 0, di carte $\begin{array}{l} X \to \{0\} \\ p \mapsto 0 \end{array}$
- Def. Una varietà diff./topol. di dim. 2 è detta superficie diff./topol.
- Oss. Queste varietà sono importanti in quanto utilizzando le carte locali ci si può ricondurre a $\mathbb{R}^n$ e utilizzare gli strumenti dell'analisi.
- Sia ora X una varietà differenziabile ed A un suo aperto.
  - Def. $F: A \to \mathbb{R}$ è differenziabile se $\forall$ carta (U, φ_U) tale che $U \cap A \neq \emptyset$ la funzione $F \circ \varphi_U^{-1}: \varphi_U(U \cap A) \longrightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile
  - Def. Se $\dim(X) = n$, e Y è un'altra varietà con $\dim(Y) = m$, $F: X \to Y$ è differenziabile o morfismo se $\forall (U, \varphi_U)$ in X e $\forall (V, \psi_V)$ in Y la composizione $\psi_V \circ F \circ \varphi_U^{-1}: \varphi_U(U) \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile.
    Sarà diffeomorfismo se è omeomorfismo con F, F^{-1} differenziabili.
  - Prop.
    - F diffeomorfismo $\Leftrightarrow$ F^{-1} diffeomorfismo
    - F, G morfismi $\Rightarrow$ $G \circ F$ morfismo
    - F, G diffeomorfismi $\Rightarrow$ $G \circ F$ diffeomorfismo

· **Def.** <u>curva differenziale</u>: applicazione C^∞ $\alpha: J \to X$, con $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, X varietà diff.

· **Def.** $X \subset \mathbb{R}^N$ è <u>sottovarietà differenziabile</u> di dimensione n se ~~...~~
$\forall x \in X$, $\exists U_x$ aperto in X diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$.

· Ciò implica che, $\forall x \in X$, $\exists U_x$ in $\mathbb{R}^N$, $\exists \overline{F_x}: U \to \mathbb{R}^n$ differenziabile che induce una biezione $F_x: U \cap X \to V$, dove $V \underset{ap.}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ tale che $F_x^{-1}: V \to U \cap X \subseteq \mathbb{R}^N$ è differenziabile

· Ne consegue che le coppie $(U \cap X, F_x)$ sono n-carte locali, differenzialmente compatibili al variare di x in X, e costituiscono perciò un atlante differenziabile in X.
Quindi X è una varietà differenziabile di dimensione n.

· **Def.** <u>parametrizzazione</u> (in $\mathbb{R}^N$): $f: A \to \mathbb{R}^N$, con $A \subset \mathbb{R}^n$, diffeomorfismo sull'immagine.
In tal caso, $f(A)$ è una sottovarietà di dimensione n di $\mathbb{R}^N$.

· **Es.** $p, \underline{v} \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto p + t\underline{v}$, è una parametrizzazione della retta r passante per p e di direzione $\underline{v}$; r è sottovarietà di $\mathbb{R}^n$, di dim. 1.

· **Oss.** Esistono sottovarietà di $\mathbb{R}^N$ che non si possono ottenere come immagini di parametrizzazione: può infatti non esistere un atlante costituito da una sola carta.

· **Def.** <u>ipersuperficie differenziabile</u>: sottovarietà di dimensione n in $\mathbb{R}^{n+1}$.
se $n = 1$, curva piana; se $n = 2$, superficie.

· **Lemma.** U aperto $\subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ differenziabile. Allora $\varphi: \begin{matrix} U \to \mathbb{R}^{n+1} \\ \underline{x} \mapsto \varphi(\underline{x}) = (\underline{x}, f(\underline{x})) \end{matrix}$
è parametrizzazione (detta di Monge) che ha per immagine il grafico di f, che è un'ipersuperficie differenziabile di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dim. · φ è differenziabile, essendolo le sue componenti, e biunivoca sull'immagine;
· $\varphi^{-1}: \begin{matrix} \varphi(U) \to U \\ (x,y) \mapsto x \end{matrix}$ è differenziabile, essendo restrizione della proiezione.

VARIETÀ DIFFERENZIABILI – ESEMPI

- Iniziamo considerando la circonferenza $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.
  - $\varphi^+ : (-1,1) \to S^1$, $t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$, è par. di Monge di $V^+ = \{(x,y) \in S^1 : y > 0\}$
    $(\varphi^+)^{-1}$, proiezione sulla prima coord., è carta locale in S^1 relativa all'aperto V^+.
  - $\varphi^- : (-1,1) \to S^1$, $t \mapsto (t, -\sqrt{1-t^2})$, è par. di Monge di $V^- = \{(x,y) \in S^1 : y < 0\}$
    $(\varphi^-)^{-1}$, proiezione sulla prima coord., è carta locale in S^1 relativa all'aperto V^-.
  - $(-1,0)$ e $(1,0) \notin V^+ \cup V^-$; dunque $(V^+, (\varphi^+)^{-1})$, $(V^-, (\varphi^-)^{-1})$ non formano un atlante.
  - $\psi^+ : (-1,1) \to S^1$, $t \mapsto (\sqrt{1-t^2}, t)$; $\psi^- : (-1,1) \to S^1$, $t \mapsto (-\sqrt{1-t^2}, t)$
    hanno per inversa la proiezione sulla seconda coord., definita risp. su:
    $W^+ = \{(x,y) \in S^1 : x > 0\}$; $W^- = \{(x,y) \in S^1 : x < 0\}$
  - $\{(V^+, (\varphi^+)^{-1}), (V^-, (\varphi^-)^{-1}), (W^+, (\psi^+)^{-1}), (W^-, (\psi^-)^{-1})\}$ formano un 1-atlante, e sono diff. compatibili; dunque S^1 è una varietà diff. di dimensione 1.
  - Si può gingere allo stesso risultato assegnando le proiezioni stereografiche:
    $$\pi_\pm : S^1 \setminus \{(0,\pm 1)\} \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \longmapsto \frac{x}{1 \mp y}$$
- Vediamo ora il caso della sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.
  - Costruiamo un atlante differenziabile tramite le proiezioni stereografiche:
    $$\pi_\pm : S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to \mathbb{R}^2 \qquad (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1 \mp x_3}, \frac{x_2}{1 \mp x_3}\right)$$
  - $V_1 = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$, $V_{-1} = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$; $V_{-1} \cup V_1 = S^2$.
  - $\pi_\pm : V_{\pm 1} \to \pi_\pm(V_{\pm 1}) \subset \mathbb{R}^2$ sono omeomorfismi, different. compatibili poichè:
    $$\pi_-^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \qquad (x,y) \longmapsto \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, 1-x^2-y^2)$$
    $$\pi_+ \circ \pi_-^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \longmapsto \frac{1}{x^2+y^2}(x,y)$$
- Prop. Siano X, Y varietà differenziabili, $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$.
  Allora il prodotto $X \times Y$ ha struttura di varietà differenziabile, di dim. $n+m$, tale che le proiezioni $X \times Y \to X$, $X \times Y \to Y$, sono morfismi.

  Dim. Siano (U, φ_U) carta locale in X, (V, φ_V) carta locale in Y.
  $U \times V$ è un aperto in $X \times Y$ e $\varphi_U \times \varphi_V : \begin{array}{l} U \times V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (a,b) \longmapsto (\varphi_U(a), \varphi_V(b)) \end{array}$
  tale che $(U \times V, \varphi_U \times \varphi_V)$ è una carta locale in $X \times Y$, e se $(U' \times V', \varphi_{U'} \times \varphi_{V'})$ è un'altra carta allora è ad essa diff. compatibile.
- Altri esempi di varietà differenziabili sono dati da:
  - Cilindro: $S_1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, con atlante $\{(\pi_+, 1_{\mathbb{R}}), (\pi_-, 1_{\mathbb{R}})\}$
  - Toro: $S_1 \times S_1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^4$, con atlante $\{(\pi_+, \pi_+), (\pi_+, \pi_-), (\pi_-, \pi_+), (\pi_-, \pi_-)\}$

Sono entrambe superfici.

SPAZI TANGENTI

- Def. X varietà differenziabile, $p \in X$. $\mathcal{E}(X,p) := \{f : U_p \to \mathbb{R}\}$
  Si tratta dell'insieme delle funzioni in $\mathbb{R}$ definite in qualche intorno di $p \in X$.
- Oss. $F, G \in \mathcal{E}(X,p) \Rightarrow F+G,\ F\cdot G \in \mathcal{E}(X,p)$, ben defnite nell'intorno intersezione.
- Def. X varietà differenziabile, $p \in X$. Un vettore tangente a X in p è una $V : \mathcal{E}(X,p) \to \mathbb{R}$
  tale che: • $V(aF+bG) = a\cdot V(F) + b \cdot V(G)$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $F,G \in \mathcal{E}(X,p)$
  • $V(FG) = G(p)\cdot V(F) + F(p) \cdot V(G)$
  L'insieme dei vettori tangenti a X in p si chiama spazio tangente $T_p(X)$.
- Prop. • $c : X \to \mathbb{R}$ costante $\Rightarrow V(c) = 0$ $\forall V \in T_p(X)$
  • $F, G \in \mathcal{E}(X,p)$, $F = G$ in U_p $\Rightarrow V(F) = V(G)$ $\forall V \in T_p(X)$
  Dim. • $c\cdot V(1_{\mathbb{R}}) = V(c\cdot 1_{\mathbb{R}}) = V(c)\cdot 1_{\mathbb{R}} + c\cdot V(1_{\mathbb{R}}) \Rightarrow 0 = V(c)\cdot 1_{\mathbb{R}} \Rightarrow V(c) = 0$
  • $F = G \Rightarrow 1_{U_p} F = 1_{U_p} G \Rightarrow V(1_{U_p}F) = V(1_{U_p}G)$
  $V(1_{U_p}) \cdot F(p) + 1 \cdot V(F) = V(1_{U_p})\cdot G(p) + 1 \cdot V(G)$
  da cui $V(F) = V(G)$ poichè per ipotesi $F(p) = G(p)$.
- Sia ora $\dim(X) = n$, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ carta definita in U_p, $\{x_i\}_{i=1}^n$ func. coordinate def. da φ.
  Possiamo definire i vettori tangenti $(\partial/\partial x_i)_p \in T_p(X)$ ponendo:
  $$(\partial/\partial x_i)_p(F) = \frac{\partial(F\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)),\quad i = 1:n,\ \{u_i\}_{i=1}^n \text{ funzioni coordinate in } \mathbb{R}^n.$$
- Lemma $(\partial/\partial x_i)_p \in T_p(X)$ poichè soddisfano le condizioni della definizione.
- Lemma $(\partial x_i/\partial x_j)_p = \dfrac{\partial(x_i\circ\varphi^{-1})}{\partial u_j}(\varphi(p)) = \delta_{ij}$
- Lemma $\dim(X) = n$, $p \in X$, $\{x_i\}_{i=1}^n$ coord. locali in U_p tali che $x_i(p) = 0$, $i = 1:n$
  Allora, $\forall F \in \mathcal{E}(X,p)$, $\exists \{F_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{E}(X,p)$ tali che in U_p sia $F = F(p) + \sum_{i=1}^n u_i F_i$.
  Dim. Sia $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ la carta locale che definisce le $\{x_i\}_{i=1}^n$; si ha che $\varphi(p) = \underline{0}$.
  • Sia anche $G := F\circ\varphi^{-1} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, 0)$, e proviamo il seguente caso particolare:
  $\exists \{G_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \underline{0})$ tali che $G = G(0) + \sum_{i=1}^n u_i G_i$, con $\{u_i\}_{i=1}^n$ fz. coordinate in $\mathbb{R}^n$.
  • Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ disco aperto di centro $\underline{0}$ con chiusura contenuta nell'aperto di G.
  Allora, $\forall \underline{u} = (u_1, \dots, u_n) \in D$, $s \in [0,1]$, si ha:
  $$\frac{d}{ds} G(s\underline{u}) = \sum \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\underline{u}) \frac{du_i}{ds}(s\underline{u}) = \sum \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\underline{u})\, u_i$$
  da cui, poichè $\int_0^1 \frac{d}{ds} G(s\underline{u})\, ds = G(\underline{u}) - G(\underline{0})$:
  $$G(\underline{u}) = G(\underline{0}) + \int_0^1 \frac{d}{ds} G(s\underline{u})\, ds = G(\underline{0}) + \int_0^1 \sum \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\underline{u})\, u_i\, ds$$
  $$= G(\underline{0}) + \sum u_i \cdot \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\underline{u})\, ds := G(\underline{0}) + \sum u_i \cdot G_i(\underline{u})$$
  • In generale, poichè $F = G\circ\varphi = (G(0) + \sum u_i G_i)\circ\varphi = F(p) + \sum (u_i\circ\varphi)(G_i\circ\varphi)$,
  è sufficiente porre $F_i = G_i \circ \varphi$.

- <u>Prop.</u> $T_p(X)$ è spazio vettoriale, con $\dim(T_p(X)) = \dim(X)$, ponendo:
  - $(v+w)(F) = v(F) + w(F)$ 　 • $(\alpha v)(F) = \alpha[v(F)]$

  $\forall F \in \mathcal{E}(X,p)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $v, w \in T_p(X)$

<u>Dim.</u> • Il fatto che sia spazio vettoriale è immediato, infatti:

$v, w \in T_p(X)$, $\alpha \in \mathbb{R} \implies v+w,\ \alpha v,\ \underline{0} \in T_p(X)$

- Dimostriamo ora che le dimensioni coincidono.

Sia $n = \dim(X)$, $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ carta def. in U_p, $\{x_i\}_{i=1}^n$ fz. coord. locali def. da φ.

- Proviamo che le $(\partial/\partial x_i)_p$, $i = 1:n$, formano una base per $T_p(X)$.

Supponiamo, non restrittivamente, che $\varphi(p) = 0$.

Allora $\underline{a} = \varphi(p)$, $\psi(x) = \varphi(x) \cdot \underline{a}$, è carta tale che $\psi(p) = 0$, e se $\{y_i\}_{i=1}^n$ sono le coord. locali definite da ψ, $(\partial/\partial y_i)_p = (\partial/\partial x_i)_p$ $\forall i$.

- Vediamo ora che formano un insieme di generatori.

$$(\partial F/\partial x_i) = (\partial/\partial x_i)\Big(F(p) + \sum_{j=1}^n x_j F_j\Big)$$
$$= 0 + \sum_j \big[(\partial x_j/\partial x_i)_p \cdot F_j(p) + x_j(p) \cdot (\partial F_j/\partial x_i)_p\big] = F_i(p) \qquad \underline{\forall F}$$
$$v(F) = v\Big(F(p) + \sum_j x_j F_j\Big) = 0 + \sum_j \big[v(x_j) \cdot F_j(p) + x_j(p) \cdot v(F_j)\big]$$
$$= \sum_{j=1}^n v(x_j) \cdot (\partial F/\partial x_j)_p \qquad \underline{v \in T_p(X)}$$

Poichè vale $\forall F \in \mathcal{E}(X,p)$, $v = \sum_j v(x_j) \cdot (\partial/\partial x_j)_p$, dunque generano.

- Dimostriamo infine che sono linearmente indipendenti.

Se $v = \sum_j a_j (\partial/\partial x_j)_p$, allora $v(x_i) = \sum_j a_j (\partial x_i/\partial x_j)_p = \sum_j a_j \delta_{ij} = a_i$

dunque $v = 0 \implies a_i = 0$ $\forall i$, ovvero la lineare indipendenza.

- <u>Def.</u> $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_i\}_{i=1}^n$ sistemi di coordinate locali in U_p.

Allora la matrice $[(\partial x_j/\partial y_i)_p]$ è detta <u>di transizione</u> dalle x_i alle y_i in p.

Si ottiene applicando v a $(\partial/\partial y_i)_p$: $(\partial/\partial y_i)_p = \sum_j (\partial x_j/\partial y_i) \cdot (\partial/\partial x_j)_p$

DIFFERENZIALE

- $f: X \to Y$ morfismo di varietà diff., $p \in X \Rightarrow \forall F \in \mathcal{E}(Y, f(p))$, $F \circ f \in \mathcal{E}(X,p)$

  Si può definire una $f_{*p}: T_p(X) \longrightarrow T_{f(p)}(Y)$, $v \longmapsto f_{*p}(v)$, lineare e tale che:

  $f_{*p}(v)(F) = v(F \circ f) \quad \forall f \in \mathcal{E}(Y, f(p))$. Essa viene detta <u>differenziale</u> di f in p.

- <u>Prop.</u> X, Y, Z varietà diff., $f: X \to Y$ $g: Y \to Z$ morfismi. Allora, $\forall p \in X$, si ha:

  $$(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p} : T_p(X) \to T_{g(f(p))}(Z)$$

  <u>Cor.</u> • f diffeomorfismo $\Rightarrow \forall p \in X$, f_{*p} è isomorfismo;

  • $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f: A \to X$ inversa di una carta $\Rightarrow f_{*p}$ isomorfismo, $\forall p \in A$

  <u>Dim.</u> • $(1_X)_{*p} = (f^{-1} \circ f)_{*p} = (f^{-1})_{*f(p)} \circ f_{*p} \Rightarrow f_{*p}$ iniettiva

  $(1_Y)_{*f(p)} = (f \circ f^{-1})_{*f(p)} = f_{*p} \circ (f^{-1})_{*f(p)} \Rightarrow f_{*p}$ suriettiva

  • $\varphi: f(A) \to \mathbb{R}^n$ inversa di $f \Rightarrow (\varphi \circ f)_{*p} = (\varphi)_{*f(p)} \circ f_{*p} = 1_{T_p(A)} \Rightarrow f_{*p}$ iniettiva.

- <u>Def.</u> J intervallo aperto, $t_0 \in J$, Y varietà, $\alpha: J \to Y$ curva differenziabile.

  Il <u>vettore velocità</u> di α in t_0 è $\alpha'(t_0) := \alpha_{*t_0}((d/dt)_{t_0}) \in T_{\alpha(t_0)}(Y)$.

  Si considera il differenziale $\alpha_{*t_0}: T_{t_0}(J) \to T_{\alpha(t_0)}(Y)$, $d/dt \longmapsto$

- <u>Prop.</u> $f: X \to Y$ differenziabile, $\alpha: J \to X$ curva diff. $\Rightarrow f \circ \alpha: J \to Y$ curva diff.
- <u>Prop.</u> $p = \alpha(t_0)$, $v = \alpha'(t_0) \Rightarrow f_{*p}(v) = (f \circ \alpha)'(t_0)$
- <u>Prop.</u> X varietà diff., $p \in X$, $v \in T_p(X) \Rightarrow \exists\, \alpha: J \to X$, $0 \in J$, t.c. $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$.

  <u>Dim.</u> Se $X = \mathbb{R}^n$, può essere $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \alpha(t) = p + tv$.

  Una curva che gode di tale proprietà, si dice <u>adattata</u> a v.

In generale, sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $\phi: A \to X$ inversa di una carta t.c. $\exists\, u \in A$ per cui $\phi(u) = p$.

Il differenziale $\phi_{*u}: T_u(A) \to T_p(X)$ è un isomorfismo.

Sia $w \in T_u(A)$ t.c. $\phi_{*u}(w) = v$; allora $\alpha(t) = \phi(u + tw)$

- <u>Prop.</u> $f: X \to Y$ morfismo di varietà diff., $p \in X$, $\{x_i\}_{i=1}^n$ e $\{y_i\}_{i=1}^m$ coord. locali in U_p e $U_{f(p)}$.

  Allora f_{*p} è rappresentato dalla matrice $Jf(p) = [(\partial(y_i \circ f)/\partial x_j)_p]$, jacobiana, rispetto alle basi $(\partial/\partial x_i)_p$ di $T_p(X)$ e $(\partial/\partial y_i)_{f(p)}$ di $T_{f(p)}(Y)$

  <u>Dim.</u> $f_* = [(\partial/\partial x_j)_p] = \sum_{i=1}^m [(\partial(y_i \circ f)/\partial x_j)_p] \cdot [(\partial/\partial y_i)_{f(p)}]$

  $Jf(p) = [(\partial(y_i \circ f)/\partial x_j)_p]$

  <u>Es.</u> Toro in $\mathbb{R}^4$; $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ $(u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$; $\mathrm{Im} = T^2 = S^1 \times S^1$

  $J_{\varphi(u,v)} = [\partial\varphi_k/\partial u \quad \partial\varphi_k/\partial v] = \begin{bmatrix} B(u) & \underline{0} \\ \underline{0} & B(v) \end{bmatrix}$ matrici 4×2, $k = 1{:}4$,

  $B(u)$, $B(v)$, $\underline{0}$ blocchi 2×1, $B(t) = [-\sin(t) \ \cos(t)]^T$, $\underline{0} = [0\,0]^T$

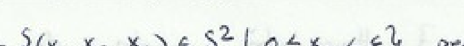
  Ha ovunque rango 2, e il piano tangente a T^2 in $\varphi(u,v)$ è generato dalle colonne di $J_{\varphi(u,v)}$

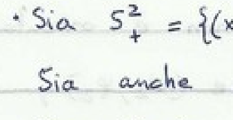
ORIENTABILITÀ

- Si tratta di una proprietà globale; le diversità globali possono essere utili nel consentire di dimostrare che due varietà non sono diffeomorfe.
- Def. X varietà diff., $\{x_i\}_{i=1}^n$ e $\{y_i\}_{i=1}^n$ due sistemi di coord. locali, definiti uno in U, uno in V.
  Tali sistemi si dicono orientati concordemente [discordemente] in $p \in U \cap V$ se:
  $\det[(\partial x_j / \partial y_i)_p] > 0 \qquad [\det[(\partial x_j / \partial y_i)_p] < 0]$
- Oss. Tale det è funzione di p continua e mai nulla.
  Quindi il suo segno è costante sulla componente connessa di p in $U \cap V$.
- Def. X è orientabile se $\exists \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, atlante differenziabile, tale che $\forall p \in U_\lambda \cap U_{\lambda'}$ i sistemi di coord. locali definiti da φ_λ e $\varphi_{\lambda'}$ sono orientati concordemente $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$. Si parla di atlante orientato.
  X è non orientabile se non possiede un siffatto atlante.
- Def. A_1, A_2 atlanti orientati lo sono concordemente se $A_1 \cup A_2$ è orientato, discordemente in caso contrario. Il concorde orientamento è relazione di equivalenza.
- Oss. Se X è orientabile, si può partizionare in due l'insieme degli atlanti orientati, con ogni classe costituita da atlanti concordemente orientati, e detta orientazione.
- Def. X è varietà orientata se in essa è assegnato un atlante orientato.
- Prop. X orientabile $\Rightarrow$ ogni sua sottovarietà aperta è orientabile.
  Tuttavia, anche una varietà non orientabile possiede un aperto orientabile, avendo in essa contenuto un aperto diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.
- Oss. $\exists$ sottovarietà aperta di X non orientabile $\Rightarrow$ X non è orientabile.
- Es. Sia $X = S^1$, atlante costituito dalle carte (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2), con:
  $U_1 = S^1 \setminus \{(0,1)\}$, $\varphi_1 = \pi_+ : S^1 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R} \qquad U_2 = S^1 \setminus \{(0,-1)\}$, $\varphi_2 = \pi_-$
  Ci si chiede se S^1 sia orientata. Si ha $\pi_+(x,y) = \frac{x}{1-y}$, $\pi_-(x,y) = \frac{x}{-1-y}$, da cui $(\pi_- \circ \pi_+^{-1})(t) = \frac{1}{t}$, $\frac{\partial(\pi_- \circ \pi_+^{-1})(t)}{\partial t} = -\frac{1}{t^2}$; l'atlante non è orientato.
  Tuttavia, considerando $-\pi_-$ al posto di π_-, si ottiene un atlante orientato.
  La varietà circonferenza è dunque orientabile.
- Es. Sia $X = S^n$, atlante costituito dalle carte (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2), con:
  $N = (0, \dots, 0, 1)$, $S = (0, \dots, 0, -1)$; $U_1 = S^n \setminus N$, $\varphi_1 = \pi_+$; $U_2 = S^n \setminus S$, $\varphi_2 = \pi_-$.
  Poichè $U_1 \cap U_2 = S^n \setminus \{N, S\}$ è connesso, il det è concorde su tutto esso.
  Se è positivo, l'atlante è orientato; se è negativo, se ne ottiene uno orientato prendendo π_-^* al posto di π_-, che coincide a meno di un cambio di segno sull'ultima coord. Dunque S^n è orientabile.

ESEMPI DI VARIETÀ NON ORIENTABILI

- Nastro di Moebius: $I = [0,1]$, $\sim : (0,t) \sim (1, 1-t)\ \forall t \in I$,
  allora il nastro è $M : I^2/\sim$, e il nastro aperto $M^\circ : (I \times \mathrm{int}\, I)/\sim$.
  - Sia $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $g : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1) \to \mathbb{R}^3$ definita come:
    $g(s,t) = \left(\cos(2\pi s) + (t-\tfrac{1}{2})\sin(\pi s)\cos(2\pi s),\ \sin(2\pi s) + (t-\tfrac{1}{2})\sin(\pi s)\sin(2\pi s),\ (t-\tfrac{1}{2})\cos(\pi s)\right)$
    Si ha che $g((-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1))$ è omeomorfa a M°.
  - Inoltre, se $s_0 \in I$, e $A := (s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon) \times (0,1) \subset (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1)$, A e $g(A)$ sono diffeomorfi.
    Questo permette di affermare che M° è varietà differenziabile.
  - Sia ora $\xi : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1) \to M^\circ$, $\xi_{*x} : T_x((-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1)) \to T_{\xi(x)}(M^\circ)$,
    tale che $\{e_1, e_2\} \mapsto \{\xi_{*x}(e_1), \xi_{*x}(e_2)\}$.
  - Se $x \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \{\frac{1}{2}\}$, allora $\xi((-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (0,1)) \approx S^1$.
    M° non è orientabile poichè la base dello spazio tangente cambia dopo un giro completo.
  - In altre parole, $y := g((0,\frac{1}{2})) = g((1,\frac{1}{2}))$, e cerchiamo le basi di $T_y(M^\circ)$,
    trasformate della base canonica di $T_{(0,\frac{1}{2})}(\ldots \times \ldots)$ $[\beta_1]$ e $T_{(1,\frac{1}{2})}(\ldots \times \ldots)$ $[\beta_2]$.
  - Si ha che $\xi_* \rightsquigarrow J_\xi = \begin{bmatrix} \partial\xi_1/\partial s & \partial\xi_2/\partial s & \partial\xi_3/\partial s \\ \partial\xi_1/\partial t & \partial\xi_2/\partial t & \partial\xi_3/\partial t \end{bmatrix}^T$;
    $J_{g(0,\frac{1}{2})} = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ $\quad J_{g(1,\frac{1}{2})} = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$
    $\beta_1 = \{v_1 = (0, 2\pi, 0),\ v_2 = (0,0,1)\}$, $\beta_2 = \{w_1 = (0, 2\pi, 0),\ w_2 = (0,0,-1)\}$; $v_1 = w_1$, $v_2 = -w_2$
    $\det[(\partial v_j / \partial w_i)_p] = \det \begin{bmatrix} \partial v_1/\partial w_1 & \partial v_2/\partial w_1 \\ \partial v_1/\partial w_2 & \partial v_2/\partial w_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 < 0$; basi discordi.

- Piano proiettivo: $\pi : S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, identificando i punti antipodali: $P \sim P' \iff P = \pm P'$.
  Proviamo che non è orientabile trovandone una sottovarietà non orientabile.
  - Sia $S^2_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_3 \geq 0\}$, $S^2_{+\varepsilon} = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid 0 \leq x_3 < \varepsilon\}$ per $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$
    Sia anche $\sigma : \pi|_{S^2_+} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, restrizione della proiezione a S^2_+.
    Reincollando opportunamente i pezzi 

    si ottiene:
    

    che mostra come M° sia sottovarietà aperta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$;
    non essendo orientabile, non lo è nemmeno $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ stesso.

ATLANTI OLOMORFI E DIFFEOMORFISMI LOCALI

- Def. X superficie topologica, $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ è olomorfo se, $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$, $U_\lambda \cap U_{\lambda'} \neq \phi$, $\varphi_{\lambda'} \cdot \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_{\lambda'}) \to \mathbb{C}$ è olomorfa. Se $\exists$ un tale atlante, X è superficie di Riemann.
- Def. A_1, A_2 atlanti olomorfi su X sono equivalenti se $A_1 \cup A_2$ è atlante olomorfo.
- Prop. Una superficie di Riemann è differenziabile e orientabile.

  Dim. Siano due parametrizzazioni $\{x_1, x_2\}$ su U_1, $\{y_1, y_2\}$ su U_2, $\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'}^{-1}$ olomorfa.

  Si ha $(\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'}^{-1})(z) = u(z) + i \cdot v(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, con $z \in \varphi_{\lambda'}(U_\lambda \cap U_{\lambda'})$.

  Ricordando le equazioni di Cauchy-Riemann: $\begin{cases} \partial u/\partial x = \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x \end{cases}$

  risulta $\begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 > 0 \Rightarrow$ orientabilità

- Oss. Due superfici diffeomorfe sono entrambe orientabili o entrambe non orientabili.

  Cor. Dunque, una orientabile e una no, non potranno essere diffeomorfe.
- Teor. (funzione inversa) Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, U aperto.

  Supponiamo $\exists\, a \in U$ t.c. $F_{*a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isomorfismo. Allora $\exists\, V \subseteq U$ aperto, $a \in V$, $f(V)$ aperto, tale che $f|_V : V \to f(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo di classe C^1.

  Es. $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_{*a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Il luogo degli $x \in U$ t.c. f_{*x} è isomorfismo, è aperto.

  Ricordiamo che f_{*a} è isomorfismo $\Leftrightarrow \det Jf(a) \neq 0$; $Jf(a)$ è regolare (invertibile)

- Sia $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa: $z = x+iy \longmapsto f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$,

  con u e v che rispettano Cauchy-Riemann. Ci si chiede, per quali a, $f_{*a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è isomorfismo.

  Si ha $\det Jf(a) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_a = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)\Big|_a$

  Con le derivate totali: $(\partial f/\partial x) = (df/dz) \cdot (\partial z/\partial x) = (df/dz)$

  $$(\partial f/\partial y) = (df/dz) \cdot (\partial z/\partial y) = i \cdot (df/dz) \ ; \ (df/dz) = -i \cdot (\partial f/\partial y)$$

  $$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)$$

  $$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

  $\|f'(a)\|^2 = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)\Big|_a \neq 0$ se $f'(a) \neq 0$.

  Si ha invertibilità locale ovunque tranne che nell'origine, poichè nei punti a tangenza orizzontale la funzione non è invertibile nemmeno localmente.

- Def. $f : X \to Y$, morfismo di varietà diff., è diffeomorfismo locale in $x \in X$ se $\exists\, U_x \,/\, f(U)$ aperto, f induce un diffeomorfismo tra U e $f(U)$.

  Si parla di diffeomorfismo locale in X se lo è $\forall x \in X$.
- Oss. Un diffeomorfismo è diffeomorfismo locale. Non vale il viceversa, in generale.
- Es. $f : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ è diffeomorfismo locale, ma non globale, poichè f non è iniettiva e pertanto non invertibile globalmente.

DIFFEOMORFISMI LOCALI: PROPRIETÀ, ESEMPI.

- <u>Teor.</u> (funzione inversa riveduto e corretto) Sia $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, allora si ha:

  f diffeomorfismo locale in $a \iff f_{*a}$ isomorfismo

- <u>Prop.</u> $f: X \to Y$ morfismo di varietà diff., biunivoca, diffeom. locale $\Rightarrow f$ è diffeomorfismo.
- <u>Prop.</u> $f: X \to Y$ diffeomorfismo locale in almeno un punto $x \in X \Rightarrow \dim X = \dim Y$.
- <u>Teor.</u> $f: X \to Y$ morfismo di varietà diff., f diffeom. locale in $x \in X \iff f_{*x}$ è isomorfismo.

  Si estende il caso $X = \mathbb{R}^n$; non dimostreremo, ma notiamo che implica la prop. precedente.

- <u>Es.</u> $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $x + iy = z \mapsto e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\cdot \sin y)$

  $i\cdot 2\pi$ e $i\cdot 4\pi$ vengono mandati entrambi in 1; $\exists\ \infty$ controimmagini distinte per ogni punto.

- <u>Def.</u> Sia $f: X \to Y$ morfismo di varietà diff. $y \in Y$ può essere:
  - <u>valore regolare</u> di f se $\forall x \in f^{-1}(y)$ f è diffeom. locale in x, o se $f^{-1}(y) = \emptyset$
  - <u>valore critico</u> di f in caso contrario; implica $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, che implica $\in \operatorname{im} f$.
- <u>Es.</u> Sia $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x,y)$. Se ne vogliano determinare i valori regolari.

  Innanzitutto tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ fuori da $B(\underline{0}; 1)$ lo sono, poichè $\notin \operatorname{im} f$.

  Per gli altri, f_{*p} deve essere isomorfismo; guardiamo la matrice jacobiana di f.

  $$(\pi_-)^{-1}(t_1,t_2) = \left(\frac{2t_1}{1+t_1^2+t_2^2}, \frac{2t_2}{1+t_1^2+t_2^2}, 1-t_1^2-t_2^2\right) \quad \text{[proiezione stereografica]}$$

  $$(f \circ (\pi_-)^{-1})(t_1,t_2) = \left(\frac{2t_1}{1+t_1^2+t_2^2}, \frac{2t_2}{1+t_1^2+t_2^2}\right)$$

  $$J(f \circ (\pi_-)^{-1})(t_1,t_2) = (1+t_1^2+t_2^2)^{-2} \cdot \begin{pmatrix} 2-2t_1^2+2t_2^2 & -4t_1t_2 \\ -4t_1t_2 & 2+2t_1^2-2t_2^2 \end{pmatrix}$$

  $$\det J(f \circ (\pi_-)^{-1})(t_1,t_2) = 0 \iff t_1^2+t_2^2 = 1$$

  I valori critici del morfismo proiezione stereografica sono pertanto i punti della circonferenza di centro $\underline{0}$ e raggio 1. Gli altri punti sono valori regolari.

- <u>Teor.</u> $f: X \to Y$ morfismo di varietà diff., $y \in Y$ valore regolare. Allora:
  - $f^{-1}(y)$ è un sottospazio discreto di X.
  - X compatto $\Rightarrow f^{-1}(y)$ finito; $\exists$ aperto $V \subseteq Y$, $y \in V$, tale che:

    $\forall y' \in V$, y' valore regolare e $\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(y')$

<u>Dim.</u>
- $\forall x \in f^{-1}(y)$, f è diffeom. locale in x; $x \in U$ è intorno aperto tale che f è diffeom. tra U e $f(U) \ni y_i \Rightarrow U \cap f^{-1}(y) = \{x\}$
- X compatto $\Rightarrow f^{-1}(y)$ chiuso e discreto in un compatto (f omeom., y punto chiuso) $\Rightarrow f^{-1}(y)$ finito

  Dunque $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$; $\forall i = 1:r$, U_i è aperto di X; $x_i \in U_i \mid U_i \cong f(U_i)$ per definizione di valore regolare. Definiamo poi $V := \bigcap_{i=1}^{r} f(U_i)$, che contiene almeno $y = f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_r)$, con $f(x_i) \in f(U_i)$ $\forall i$. Si prende ora:

  $V := \bigcap_{i=1}^{r} f(U_i) \setminus f(X \setminus \bigcup_{i=1}^{r} U_i)$. Considerando $n: V \to \mathbb{N}$, $w \mapsto \# f^{-1}(w)$, n è costante sulle componenti connesse di Y.

RICHIAMI DI ALGEBRA COMMUTATIVA

- Consideriamo anelli commutativi con unità e campi algebricamente chiusi. Possono essere notevoli, ma non di nostra trattazione, i casi in cui K è finito (geometria aritmetica) o l'anello è non commutativo (geom. non comm.)
- **Def.** Un <u>A-modulo</u>, A anello, è un gruppo abeliano M dotato di un'applicazione $A \times M \to M$, $(a,m) \mapsto am$, che soddisfa, $\forall a,b \in A$, $m,n \in M$, $1 = 1_A$.
  - $(a+b)m = am + bm$ · $a(m+n) = am + an$ · $(ab)m = a(bm)$ · $1m = m$
- **Prop.** Sono A-moduli: A stesso, gli ideali di A, i quozienti tra A e i suoi ideali. Se A è campo, gli A-moduli sono gli spazi vettoriali.
- **Def.** N sgp. di M A-modulo è <u>sottomodulo</u> se, $\forall n \in N$, $a \in A$, è $an \in N$.
- **Def.** Se $S \subseteq M$ A-modulo, il <u>sottomodulo generato</u> da S è il più piccolo di M a contenerlo. Si indica con (S), e vale $(S) = \{\sum a_i s_i \,/\, a_i \in A,\ s_i \in S\}$
  Se $(S) = M$, S si dice sistema di generatori di M
  M è finitamente generato (o di tipo finito) se possiede un sistema di generatori finito.
- **Def.** Lo <u>spettro</u> di A è l'insieme dei suoi ideali primi; si indica con $\mathrm{Spec}(A)$
  Lo <u>spettro massimale</u> " massimali; si indica con $\mathrm{Specm}(A)$
  Poichè ogni ideale massimale è primo, si ha $\mathrm{Specm}(A) \subset \mathrm{Spec}(A)$.
- **Def.** $f: A \to B$ hom. di anelli, $J \trianglelefteq B \Rightarrow f^{-1}(J) \trianglelefteq A$, detto <u>ideale contratto</u> di J risp. f, o J^c.
- **Def.** $I \trianglelefteq A$, l'ideale generato da $f(I)$ è detto <u>ideale esteso</u> di I risp. f, o I^e
- **Prop.** $I \subset I^{ec}$; $J^{ce} \subset J$.
- **Prop.** $P \trianglelefteq B$ primo $\Rightarrow f^{-1}(P) \trianglelefteq A$ primo. f induce dunque una $f^*: \mathrm{spec}\, B \to \mathrm{spec}\, A$, per cui è un funtore controvariante.
- **Def.** Siano $I, J \trianglelefteq A$. L'<u>ideale quoziente</u> è $(I:J) := \{x \in A \,/\, xJ \subset I\}$.
  È un ideale contenente I; inoltre $J \subset J' \Rightarrow (I:J) \supset (I:J')$
- **Def.** Sia $I \trianglelefteq A$. Il <u>radicale</u> è $\sqrt{I} := \{a \in A \,/\, a^s \in I,\ s > 0\}$. Contiene I (per $s=1$).
  Se $I = \sqrt{I}$, si parla di <u>ideale radicale</u>.

• **Def.** Un anello B dotato di omomorfismo $f: A \to B$ è detto <u>A-algebra</u>.
Definendo $a \cdot b := f(a) \cdot b$, lo si può dotare di struttura di A-modulo.
Poichè $f(1) = 1 \neq 0$, $\ker f \triangleleft A$, $\ker f \neq A$: è un ideale proprio.

• **Oss.** A campo $\Rightarrow$ f iniettiva

• **Es.** $A[x_1, \dots, x_n]$ anello dei polinomi a coeff. in A anello, in $x_1, \dots, x_n$, è A-algebra
Se $I \triangleleft A$, allora A/I è una A-algebra.

• **Def.** A, B campi, B A-algebra $\Rightarrow$ $A \subset B$ e B si dice <u>ampliamento</u> di A.
B è A-spazio vettoriale: la sua dim. $[B:A]$ è detta <u>grado</u> dell'ampliamento

• **Def.** A anello è <u>locale</u> se $\exists!$ M ideale massimale. Un campo è locale, infatti $M = (0)$

• **Prop.** A locale di ideale massimale M $\Leftrightarrow$ $M = \{a \in A \mid a$ non è invertibile$\}$ è ideale

Dim. Sia A locale; se $a \in M$, a non è invertibile. Dunque M è contenuto in un ideale massimale. Avendo A un unico ideale massimale I, $M \subset I$; se esistesse $a \in I \setminus M$, a sarebbe invertibile e quindi $I \equiv A$, assurdo. Dunque $I = M$, il che prova $\Rightarrow$.
Viceversa, sia I ideale t.c. $M \subsetneq I \subseteq A$. Ciò implica $I \equiv A$, e dunque M è ideale massimale di A. Analogamente se ne prova l'unicità, da cui $\Leftarrow$.

• **Def.** A anello, una A-algebra $f: A \to B$ è <u>finita</u> su A, se B è A-modulo di tipo finito.

• **Es.** · Se $A \subset B$ campi, B è finito su A $\Leftrightarrow$ $[B:A] < \infty$, cioè se B è ampliamento algebrico finito.
· Se $\{b_i\}_{i=1}^n \in B$, $\{x_i\}_{i=1}^n$ indeterminate, $f: A[x_1, \dots, x_n] \to B$ $\quad x_i \underset{i=1:n}{\longmapsto} b_i$
l'immagine di f, indicata come $A[b_1, \dots, b_n]$, è una sotto A-algebra di B.
- È il più piccolo sottoanello di B contenente sia $f(A)$, sia $\{b_i\}_{i=1}^n$; consiste in tutti i polinomi a coefficienti in $f(A)$ nelle indeterminate $\{b_i\}_{i=1}^n$.
- B è A-algebra di tipo finito se $\exists$ $b_1, \dots, b_n \in B$ / $A[b_1, \dots, b_n] = B$.
- A, B campi, $\{b_i\}_{i=1}^n \in B$, il <u>campo dei quozienti</u> $A(b_1, \dots, b_n)$ è il più piccolo sottocampo di B che contiene sia A, sia $b_1, \dots, b_n$.
- B è <u>ampliamento finitamente generato</u> di A se $\exists$ $b_1, \dots, b_n \in B$ t.c. $A(b_1, \dots, b_n) = B$.
- B è <u>ampliamento semplice</u> di A se $B = A(b)$ per qualche $b \in B$.
- B A-algebra finita $\Rightarrow$ B A-algebra di tipo finito (i)
- $A[x]$, $A[x_1, \dots, x_n]$ sono A-algebre di tipo finito, ma non finite. (ii)

(iii) - $A \subset B$ campi, B è A-algebra tipo finito $\Rightarrow$ B è estensione finitamente generata di A.

$|f(x_2) - f(x_1)|^{\gamma} \leq M \cdot |x_2 - x_1| \quad \gamma = \frac{1}{3}$

$P(t, x, dy)$

$p(t, x, y)\, dy$

POLINOMI

- <u>Prop.</u> K campo, $\{x_i\}_{i=1}^n$ indeterminate. $K(x_1, \dots, x_n)$, campo delle funzioni razionali, nonché campo dei quozienti di $K[x_1, \dots, x_n]$, è ampliamento finitamente generato di K. Tuttavia, non è una K-algebra di tipo finito (lo dimostreremo nel caso univariato).

* <u>Dim.</u> Se $\exists \{b_i\}_{i=1}^n \in K(x)$ tali che $K(x) = K[b_1, \dots, b_n]$, sia b il prodotto dei denominatori. $\forall z \in K(x)$, $\exists m > 0 \mid b^m z \in K[x]$; ma ciò è falso, infatti se $c \in K[x]$ irriducibile che non divide b, e $z = c^{-1}$, non è vero.

- <u>Def.</u> D è <u>dominio a fattorizzazione unica</u> se:
  - $a = a_1 \cdot \ldots \cdot a_r$, $\forall a \in D$ non invertibile, a_i elementi irriducibili di D in numero finito
  - $\prod_{i=1}^r a_i = \prod_{j=1}^s b_j$, a_i e b_j irriducibili e non invertibili $\Rightarrow r = s$, $a_i = b_{\sigma(i)}$ $\forall i$, σ opportuna.

- Se B è un dominio, considerando $B[x_1, \dots, x_n]$, si ha che ogni polinomio di grado 1 a coefficienti invertibili in B è irriducibile; per un polinomio qualsiasi, l'irriducibilità dipende da B.

- <u>Prop.</u> K campo (qualsiasi). Allora $K[x]$ contiene infiniti polinomi monici irriducibili.

  <u>Dim.</u> $K[x]$ contiene alcuni polinomi monici irriducibili $(x - \alpha)$, $\alpha \in K$.
  Supponiamo che $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ siano tutti e soli. Allora $\prod_{i=1}^n f_i(x) + 1$ lo è anche, in quanto non divisibile (e quindi anche diverso) per alcuno dei precedenti.
  Si noti che la dimostrazione è la stessa dell'infinità dei numeri primi.

- <u>Teor.</u> (<u>fattorizzazione unica</u>) D UFD $\Rightarrow D[x]$ UFD (in particolare, K campo $\Rightarrow K[x_1, \dots, x_n]$ UFD)

- <u>Lemma</u> (<u>di Gauss</u>) D UFD, K campo quozienti. Allora f irriducibile in $K[x] \Leftrightarrow f$ irriducibile in $D[x]$, se $f \in D[x]$, monico e non costante. Notevole il caso $D = \mathbb{Z}$ (e quindi $K = \mathbb{Q}$).

- $f = g_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot g_s^{e_s}$, g_i irriducibili e distinti, e_i molteplicità di g_i in f.
  Se $e_i > 1$, g_i è detto fattore multiplo, e vale: $gr(f) = e_1 \cdot gr(g_1) + \ldots + e_s \cdot gr(g_s)$.

- <u>Prop.</u> Sia K campo, x indeterminata. Dati $f, g \in K[x]$, $\exists\, h \in K[x]$ tale che:
  - $h \mid f$, $h \mid g$
  - $k \mid f$, $k \mid g \Rightarrow k \mid h$
  - $\exists\, A, B \in K[x]$ tale che $h = Af + Bg$

  h è il $MCD(f, g)$, ed è individuato a meno di un fattore costante.

- <u>Def.</u> D dominio, $f(x) \in D[x]$, $gr(f) = m > 0$. $\alpha \in D$ è <u>radice</u> di $f(x)$ se $f(\alpha) = 0$.

- <u>Prop.</u> $\alpha \in D$ radice di $f(x) \Leftrightarrow x - \alpha \mid f(x)$.

  <u>Dim.</u> $\Leftarrow$ se $x - \alpha \mid f(x)$, allora $f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)$

  $\Rightarrow$ α radice di $f(x)$; se $\alpha = 0$, $f(x)$ ha termine noto nullo, e quindi $x \mid f(x)$.
  se $\alpha \neq 0$ introduciamo y e sia $k(y) = f(y + \alpha) \in D[y]$, così $k(0) = 0$.
  segue $k(y) = y \cdot h(y)$ per un opportuno $h(y) \in D[y]$; infine si sostituisce $y = x - \alpha$
  $f(x) = k(x - \alpha) = (x - \alpha) \cdot h(x - \alpha) = (x - \alpha) \cdot g(x)$

· **Def.** $\alpha \in D$ è <u>radice multipla</u> di $f(x)$ se $x-\alpha$ è un fattore multiplo di $f(x)$:
$f(x) = (x-\alpha)^e \cdot g(x)$, con max gr $g(x) = gr(f) - e$, $e \geq 2$.

· **Def.** e è <u>molteplicità</u> di α per $f(x)$ se $(x-\alpha)^e \mid f(x)$, $(x-\alpha)^{e+1} \nmid f(x)$.
se $e=1$, α è semplice; se $e=2$ α è doppia, e così via; se $x-\alpha \nmid f(x)$, $e=0$.

· **Cor.** $f(x) \in D[X]$, di grado $d \Rightarrow f(x)$ possiede al più d radici in D, anche considerando la molteplicità.

Dim. Per induzione su d. Se $d=1$ ovvio; se $d \geq 2$, siano $\{\alpha_i\}_{i=1}^s$ radici distinte di $f(x)$, $\{e_i\}_{i=1}^s$ le rispettive molteplicità, così che $f(x) = (x-\alpha_1)^{e_1} \cdot g_1(x)$.
Ora, $\forall j = 2:s$, si ha $0 = f(\alpha_j) = (\alpha_j - \alpha_1)^{e_1} \cdot g(\alpha_j)$, da cui $g(\alpha_j) = 0$ poichè $\alpha_j \neq \alpha_1$ e D è un dominio. Infine si applica l'ipotesi induttiva, giungendo a:
$e_2 + \dots + e_s \leq d - e_1 \Rightarrow e_1 + \dots + e_s \leq d$.

· **Def.** K è <u>algebricamente chiuso</u> se $\forall f(x) \in K[x]$ non costante ha almeno una radice in K.

· **Teor.** Se K è algebricamente chiuso ($K = \overline{K}$), $f(x) \in k[x]$, di grado d, allora considerando la molteplicità ha esattamente d radici: $f(x) = a \cdot (x-\alpha_1) \cdot \dots \cdot (x-\alpha_d)$. Esempio: $\mathbb{C} = K$.

· **Oss.** $K = \overline{K} \Rightarrow K$ possiede infiniti elementi (dimostrazione col pigeonhole)

· **Prop.** (principio di identità dei polinomi) Sia K campo, $f(x_1, \dots, x_N) \in K[x_1, \dots, x_N]$, $N \geq 1$.
Se $\exists J \subset K$ infinito t.c. $f(a_1, \dots, a_N) = 0$, $\forall (a_1, \dots, a_N) \in J^N$, allora $f(x_1, \dots, x_N) = 0$.

Dim. Per induzione su N. Se $N=1$ ovvio; se $N \geq 2$, supponiamolo vero per $N-1$.
Scriviamo $f(x_1, \dots, x_N) = f_0 + f_1 \cdot x_N + \dots + f_d \cdot x_N^d$ con $f_j \in K[x_1, \dots, x_{N-1}]$
Se $f \neq 0$, si può supporre $f_d \neq 0$. Allora $\exists (a_1, \dots, a_{N-1}) \in J^{N-1}$ tale per cui $f_d(a_1, \dots, a_{N-1}) \neq 0$, per l'ipotesi induttiva. Ma allora $\exists \leq d$ valori di $a_N / f(a_1, \dots, a_N) = 0$, in contrasto con l'ipotesi iniziale. Dunque $f = 0$.

· **Oss.** K infinito, $f(a) = 0$ $\forall a \in K^N \Rightarrow f = 0$. Non è detto se K non è infinito.

· **Teor.** (di Taylor) Sia D dominio che contiene $\mathbb{Q}$. Allora, $\forall f(x) \in D[x]$ di grado d, e $\forall a \in D$:
$$f(x) = f(0) + f(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(d-1)}(a)}{d!}(x-a)^d$$

· **Prop.** Se $char(D) = 0$, allora $a \in D$ è radice multipla di $f \Leftrightarrow a$ è radice di f, f'

Dim. $f(x) = (x-a)^e \cdot g(x)$; $f'(x) = e \cdot (x-a)^{e-1} \cdot g(x) + (x-a)^e \cdot g'(x)$
Se $e \geq 2$, allora $f(a) = f'(a) = 0$; il viceversa è analogo.

POLINOMI OMOGENEI

- **Def.** K campo, $F(x_0,\dots,x_N) \in K[x_0,\dots,x_N]$ è <u>omogeneo</u> se formato da monomi dello stesso grado.
- **Prop.** Fissato un grado d, $K[x_0,\dots,x_N]_d \cup \{0\}$ è spazio vettoriale di dim. $\binom{N+d}{d}$

Es. Le quartiche in $\mathbb{P}^2$ generano uno spazio di dim. $\binom{2+4}{4} = \binom{6}{4} = 15$.

Dim. Se $N=1$, $\forall d \geq 0$, $\{x_0^d, x_0^{d-1}x_1, \dots, x_0 x_1^{d-1}, x_1^d\}$, sono $d+1 = \binom{d+1}{1} = \binom{1+d}{d}$.

Se $N \geq 2$, sia vero per $N-1$. Per $d=0$ è ovvio; per $d \geq 1$, sia vero per $d-1$.

Ora, sia T l'insieme dei monomi ~~in cui compare~~ di grado d in $x_0,\dots,x_N$; ~~un~~ monomio $m \in T$:

$m \in T' \subset T$ se compare x_N, mentre $m \in T'' \subset T$ altrimenti. Allora $T = T' \cup T''$, $T' \cap T'' = \emptyset$.

Adesso, poniamo $T := T(d,N)$; $\exists$ biezione tra T' e $T(d-1,N)$, dividendo T' per x_N.

Per l'ipotesi induttiva su d: $|T'| = |T(d-1,N)| = \binom{N+d-1}{d-1}$

" su N: $|T''| = |T(d,N-1)| = \binom{N+d-1}{d}$

$\oplus$ — $\binom{N+d}{d} = |T|$, c.v.d. per Stiefel

- **Prop.** (i) $F \neq 0$. Allora $F(x_0,\dots,x_N)$ omogeneo di grado $d \iff F(tx_0,\dots,tx_N) = t^d \cdot F(x_0,\dots,x_N)$

(ii) $f,g \in K[x_0,\dots,x_N]$, f omogeneo, $g \mid f \implies g$ omogeneo

(iii) $F(x_0,\dots,x_N)$ omogeneo di grado $d \implies \sum_{i=0}^{N} x_i \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} = dF$

Dim. (i) $\Rightarrow$ è ovvio. Per $\Leftarrow$, scomponiamo $F = \sum_{j=1}^{r} F_j$, con $F_j \neq 0$ e omogeneo di grado d_j.

La tesi diventa $\sum_{j=1}^{r} t^{d_j} F_j = \sum_{j=1}^{r} t^d F_j$, da cui $t^{d_j} = t^d \ \forall j$, $d_j = d \ \forall j$.

(ii) Sia $f = g \cdot h$, con g non omogeneo. Si può scomporre $g = \sum_{a=0}^{r} G_{j+a}$, con

$G_j \neq 0$, $G_{j+r} \neq 0$, $r > 0$, $gr(G_j) = j$: esistono monomi di grado diverso.

Similmente, $h = \sum_{b=0}^{k} H_{i+b}$, con $H_i \neq 0$, $H_{i+k} \neq 0$, $gr(H_i) = i$, $k \geq 0$ (può essere omogeneo)

Allora f contiene $G_j H_i$ e $G_{j+r} H_{i+k}$ che hanno grado diverso, assurdo per l'hp. di omogeneità.

(iii) Da $F(tx_0,\dots,tx_N) = t^d \cdot F(x_0,\dots,x_N)$, si deriva tutto rispetto a t ottenendo:

$$\sum_{i=0}^{N} x_i \cdot \frac{\partial F(tx_0,\dots,tx_N)}{\partial x_i} = d t^{d-1} F(x_0,\dots,x_N)$$, da cui la tesi ponendo $t=1$.

- **Def.** Se $f(x_1,\dots,x_N) \in K[x_1,\dots,x_N]$ di grado d, possiamo definire il <u>polinomio omogeneizzato</u>:

$$F(x_0,\dots,x_N) := x_0^d \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_N}{x_0}\right) \qquad F(x_0,\dots,x_N) \in V[x_0,\dots,x_N]$$

L'operazione inversa <u>desomogeneizza</u>: $f(x_1,\dots,x_N) := F(1,x_1,\dots,x_N)$

- **Prop.** Sia $K = \overline{K}$, $F(x_0,x_1) \in K[x_0,x_1]_d$. Allora $\exists\, a \in K \setminus \{0\}$, d coppie $(a_i,b_i) \in K^2$, t.c.:

$F(x_0,x_1) = a \cdot \prod_{s=1}^{d} (a_s x_1 - b_s x_0)$, $(a_i,b_i) \neq (0,0)$. Tali coppie sono determinate a meno dell'ordine e di un fattore di proporzionalità, e si dicono <u>radici</u> di $F(x_0,x_1)$.

Dim. $F(x_0,x_1) = x_0^r \cdot G(x_0,x_1)$, se r è la molteplicità di x_0 come fattore in $F(x_0,x_1)$.

$G(1,x_1)$ ha grado $d-r$, e si fattorizza come $G(1,x_1) = a \cdot \prod_{i=1}^{d-r} (x_1 - b_i)$ $[K = \overline{K}]$.

Omogeneizzando otteniamo $G(x_0,x_1) = a \cdot \prod_{i=1}^{d-r} (x_1 - b_i x_0)$, da cui

$F(x_0,x_1) = a \cdot x_0^r \cdot \prod_{i=1}^{d-r} (x_1 - b_i x_0)$

ELIMINAZIONE

- Dati due polinomi $\in D[x]$, ci si chiede se hanno fattori comuni (non costanti).
- **Prop.** $f, g \in D[x]$, di gradi n ed m, possiedono un fattore in comune
$\Longleftrightarrow \exists\, A, B \in D[x]$, con $gr(A) \leq gr(f)$, $gr(B) \leq gr(g)$, e $Bf = Ag$.

Dim. ~~Sia~~ ($\Rightarrow$) Sia h un tale fattore. Allora $f = Ah$, $g = Bh$, $h = \frac{f}{A} = \frac{g}{B}$, da cui $Bf = Ag$.
($\Leftarrow$) Se $Bf = Ag$, ogni fattore irriducibile di g divide Bf. Poichè $gr(B) < gr(g)$, almeno un fattore non costante di g è diviso da f, dunque è in comune.

- **Def.** Sia $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$. La matrice $R(f,g)$ viene detta risultante, e:

$R_{1,:} = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots, 0)$ $\quad R_{2,:} = (0, a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$

$\dots\dots\dots\dots$ $\quad R_{\cancel{n+m}} = (0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots, a_n)$

$R \;\; = (b_0, b_1, \dots, b_m, 0, 0, \dots, 0)$ $\quad R \;\; = (0, b_0, b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$

$\dots\dots\dots\dots$ $\quad R \;\; = (0, \dots, 0, b_0, b_1, \dots, b_m)$

- **Teor.** f, g hanno un fattore non costante in comune $\Longleftrightarrow |R(f,g)| = 0$.

Dim. ($\Rightarrow$) $\exists\, A, B \in D[x]$ della forma $A = -\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} x^i$, $B = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{i+1} x^i$.
Inoltre ~~α_j~~ $\exists\, j / \alpha_j \neq 0$ e $\exists\, k / \beta_k \neq 0$; sia sempre $Bf = Ag$.
Mettendo insieme i termini dello stesso grado si ottiene un sistema:
$a_0 \beta_1 = -b_0 \alpha_1$; $a_1\beta_1 + a_0\beta_2 = -b_1\alpha_1 - b_0\alpha_2$; $\dots$; $a_n \beta_m = -b_m \alpha_n$
Poichè deve esistere una soluzione non banale negli $\alpha_{(\cdot)}$ e nei $\beta_{(\cdot)}$, e la matrice dei coefficienti è R^t, il suo determinante deve annullarsi.
($\Leftarrow$) Il sistema di prima ha una soluzione non banale in F, campo dei quozienti di D, e quindi anche in D essendo il sistema omogeneo (basta moltiplicare per il mcm). Ora, $\exists\, j/\alpha_j \neq 0$, $\exists\, k/\beta_k \neq 0$, dunque $Bf = Ag$ e la tesi.

- **Prop.** $f, g \in D[x]$, D' UFD che contiene D. Allora se f, g hanno fattore in comune in $D'[x]$, ce lo hanno anche in $D[x]$. Questo poichè $R(f,g)$ dipende solo dai coefficienti di f, g.
- **Def.** $D(f) := |R(f, f')|$ è il discriminante di f.
- **Prop.** $f \in D[x]$ ha un fattore multiplo non costante $\Longleftrightarrow D(f) = 0$

Dim. ($\Leftarrow$) f e f' hanno un fattore in comune, sia esso g e irriducibile. Allora:
$f = gh$, $f' = g'h + gh'$; $g | f'$, quindi $g | g'h$. Per l'ipotesi di irriducibilità, e poichè $gr(g') < gr(g)$, $g | h$, e allora $f = gh = g \cdot g \cdot k$: $g^2 | f$.
($\Rightarrow$) $f = g^2 k$, $f' = 2gg'k + g^2k'$, dunque $g | f$ e $g | f'$, e quindi $D(f) = 0$.

- **Prop.** Se $k = \bar{k}$, $R(f,g) = 0$ implica che f e g hanno una radice in comune.

- *Oss.* Se $f, g \in D[x_1, \dots, x_N]$ vengono considerati come polinomi in x_N, a coefficienti in $D[x_1, \dots, x_{N-1}]$, il loro risultante si trova ad essere un polinomio di $D[x_1, \dots, x_{N-1}]$, detto polinomio ottenuto da f e g eliminando x_N.
- *Teor.* Sia $K = \overline{K}$, $f, g \in K[x_1, \dots, x_N]$, f irriducibile. Allora:

  $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^N \,/\, f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \implies f \mid g$
- *Teor.* $F = \sum_{i=0}^{n} A_{n-i} \cdot x_N^i$, $G = \sum_{j=0}^{m} B_{m-j} \cdot x_N^j$, A_j e B_K in $x_1, \dots, x_{N-1}$, omogenei (gradi j e k), $A_0 \cdot B_0 \neq 0$. Allora $R(F,G)$, rispetto a x_N, è un polinomio omogeneo in $\{x_K\}_{k=1}^{N-1}$ di gr. mn

ANELLI NOETHERIANI

- *Def.* A anello è noetheriano se ogni suo ideale è finitamente generato.

  Es. I campi, i PID, $\mathbb{Z}$, $K[x]$, e tutti i loro quozienti (K campo), sono noetheriani.
- *Teor.* (della base di Hilbert) R noetheriano $\implies R[x]$ noetheriano
- *Prop.* (caratterizzante) A noetheriano $\iff$ ogni catena ascendente di ideali è stazionaria, cioè: se $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \dots \subseteq A$, allora $\exists\, n \geq 1 \,/\, I_n = I_{n+1} = \dots$

  Dim. ($\Rightarrow$) Data una catena ascendente di ideali propri, $I := \cup I_n$ è ancora proprio, infatti se $1 \in I$, $1 \in I_n$ per qualche n, e anche I_n sarebbe improprio, contro ipotesi. Ora, poichè A è noetheriano, $\exists\, a_1, \dots, a_m \in I$ tali per cui $I = (a_1, \dots, a_m)$. Gli $a_i \in I_{n(i)}$ per certi $n(i)$; sia $n_0 = \max_i \{n(i)\}$, allora gli $a_i \in I_{n_0}$. Ciò implica $I_n \subset I \subset I_{n_0}\ \forall n$, e dunque $I_{n_0} = I_{n_0+1} = I_{n_0+2} = \dots$

  ($\Leftarrow$) Sia I ideale di A. Se I non fosse finitamente generato, $\exists\, a_1, a_2, \dots \in I$ tali per cui $(a_1) \subsetneq (a_1, a_2) \subsetneq (a_1, a_2, a_3) \subsetneq \dots$, ~~contro~~ dunque $\neg\cdot \Rightarrow \neg :$, e $: \Rightarrow \cdot$.
- *Oss.* $R[x_1, \dots, x_n \dots]$ non è noetheriano, ammettendo la catena ascendente di ~~anelli~~ ideali $(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \dots \subsetneq (x_1, \dots, x_n) \subsetneq \dots$, non stazionaria.
- *Oss.* Se n è finito, invece, $R[x_1]$ noetheriano $\Rightarrow R[x_1, x_2]$ noetheriano $\Rightarrow R[x_1, \dots, x_n]$ noetheriano.

TEOREMA DELLA BASE DI HILBERT

- Ricordiamo l'enunciato: R anello noetheriano $\Rightarrow$ $R[x]$ anello noetheriano
- Dim. - Sia $f(x) = \sum_{j=0}^{i} a_j x^j$, $a_i \neq 0$ il suo coefficiente direttore.
  - Sia $I \trianglelefteq R[x]$: $\forall i \geq 0$, indichiamo con J_i l'insieme dei coefficienti direttori dei polinomi di grado $\leq i$ che appartengono ad I, J quello di tutti i polinomi di I. Naturalmente $J_0 \subset J_1 \subset \dots \subset J$; si può inoltre vedere che J_i e J sono ideali di R.
  - Poichè R è noetheriano, ogni J_i è generato da elementi $\{a_{ij}\}_j$ in numero finito, coeff. direttori di altrettanti $\{F_{ij}\}$ di grado $\leq i$ appartenenti ad I. Anche J è finitamente generato: $\exists \{F_m\}$, $F_m \in I$, in numero finito, i cui coeff. direttori $\{a_m\}$ generano J. Sia $N = \max\{gr(F_m)\}_m$, $I' = (\{F_{ij}\}_{i \leq N}, \{F_m\}_m)$.
  - Vogliamo provare che $I = I'$. Naturalmente $I' \subset I$; vediamo che $I \subset I'$: Supponiamo pertanto che $\exists\, G \in I \setminus I'$ di grado minimo con questa proprietà.
  - Se $gr(G) > N$, $\exists\, Q_i \in R[x] \,/\, \sum_m Q_m F_m$ e G abbiano stesso grado e stesso coeff. dir. $G = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$; $a_d \in J$, dunque $a_d = \sum_m q_m a_m$, con gli a_m coeff. dir. di polinomi F_m. Pertanto, il polinomio $\sum_m x^{d - gr(F_m)} q_m F_m$ ha stesso grado e stesso coeff. dir. di G. Portiamo ora la nostra attenzione sui polinomi $Q_m = x^{d-gr(F_m)} q_m$. Consideriamo $gr(G - \sum_m a_m F_m) < gr\, G$; ne segue $G - \sum_m Q_m F_m \in I'$.
    Ma $G = (G - \sum_m Q_m F_m) + \sum_m Q_m F_m$, entrambi ~~dunque~~ $\in I'$, dunque $G \in I'$, contro ipotesi.
  - Se $gr(G) \leq N$, $\exists\, q_i$ costanti $/ \sum_j q_j F_{ij}$ abbiano grado i e stesso coeff. dir. di G. Infatti $G = \sum_{k=0}^{i} a_k x^k$; $a_i \in J_i$, dunque $a_i = \sum_j q_j a_{ij}$, e di conseguenza il polinomio $\sum_j q_j F_{ij}$ ha stesso grado e coeff. dir. di G. La conclusione segue come prima.

- Cor. A anello noetheriano $\Rightarrow$ $\forall$ A-algebra di tipo finito è anello noetheriano.

Dim. Se B è A-algebra di tipo finito, allora $B = A[b_1, \dots, b_n] = \phi(A)$, dove ϕ è l'omomorfismo $\phi : A[x_1, \dots, x_n] \to B$, $x_i \mapsto b_i$; $B \simeq \frac{A[x_1, \dots, x_n]}{\ker \phi}$.
Poichè quozienti di anelli noetheriani sono noetheriani, il risultato segue.

LOCALIZZAZIONE

- Sia A anello, $S \subset A$. Cerchiamo un procedimento per ampliare A in modo da rendere invertibili gli elementi del sottoinsieme (non necessariamente anello) S.
- Def. Una localizzazione di A rispetto ad S è un omomorfismo di anelli $f: A \to S^{-1}A$ tale che l'immagine $f(s)$, $\forall s \in S$, sia invertibile in $S^{-1}A$, e tale che $\forall g: A \to B$ anello per cui $g(s)$ sia invertibile $\forall s \in S$ $\exists!\, g': S^{-1}A \to B$ t.c. $g = g' \circ f$, g' omomorfismo. f si dice omomorfismo di localizzazione: $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & S^{-1}A \\ & {\scriptstyle g}\searrow \; B \; \swarrow {\scriptstyle \exists!\, g'} & \end{array}$

  Si può verificare che $S^{-1}A$ è unico a meno di isomorfismi.

  Es. $\mathbb{Q}$ è l'esempio principale di localizzazione. Sia $A = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

  Consideriamo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ con la relazione di equivalenza $(m,n) \equiv (m',n') \Leftrightarrow mn' - m'n = 0$

  Gli elementi di $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*}{\equiv}$ altro non sono che le frazioni $\frac{m}{n}$, con usuali somma e prodotto.
- Oss. Se $\mathbb{Z}$ avesse divisori dello zero, non si potrebbe provare la transitività di $\equiv$.

  Per rimediare, si generalizza così: A anello qualsiasi, $S \subset A$ sistema moltiplicativo

  $A \times S$, $\equiv$: $(a,s) \equiv (b,s') \Leftrightarrow \exists\, t \in S \;/\; t(s'a - sb) = 0$

  La presenza di t è giustificata dalla possibilità che ci siano divisori dello zero in S.

  Es. $A = \mathbb{Z}_{12}$, $S = \{0,1,2,4,6,8,10\}$. $\frac{5}{2} = \frac{8}{8}$, $\frac{8}{8} = \frac{1}{1}$ per $t = 1$, ma $\frac{5}{2} = \frac{1}{1}$ solo se $t = 4$.
- Oss. $S^{-1}A = \frac{A \times S}{\equiv} \ni \frac{a}{s}$; $+, \cdot$; $f(a) = \frac{a}{1}$. In generale, f non è iniettivo. ($\underset{A \to S^{-1}A}{\text{hom.}}$)
- Prop. $S \subset A$ sistema moltiplicativo. $\ker(f) = \{a \in A \;/\; sa = 0$ per qualche $s \in S\}$

  In particolare, f iniettiva $\Leftrightarrow$ S non contiene 0-divisori.

  Dim. • $\exists\, s \in S \;/\; sa = 0 \Rightarrow f(a) = \frac{a}{1} = \frac{as}{s} = \frac{0}{s} = 0$

  • $f(a) = 0 \Rightarrow \exists\, s' \in S \;/\; (a,1) \equiv (0,s') \Rightarrow \exists\, t \in S \;/\; t(s'a) = 0 \Rightarrow sa = 0$ con $s = ts'$
- Def. $S \subset A$ formato da tutti gli elementi che non sono 0-divisori.

  $S^{-1}A$ si dice allora anello totale delle frazioni di A.

  Se A è dominio, e $S = A \setminus \{0\}$, allora $S^{-1}A$ è il campo dei quozienti di A
- Prop. Sia $S \subset A$ sistema moltiplicativo, $f: A \to S^{-1}A$. Allora:

  (i) se $J \subset S^{-1}A$ è ideale, allora $J = J^{ce} = f^{-1}(J)\, S^{-1}(A)$; in altre parole, tutti gli ideali di $S^{-1}A$ sono della forma $I^e = I(S^{-1}A)$, con I ideale di A.

  (ii) se $J, J' \subset S^{-1}A$ sono due ideali, allora $f^{-1}(J) = f^{-1}(J') \Leftrightarrow J = J'$, cioè l'applicazione dell'insieme degli ideali di $S^{-1}A$ in quello degli ideali di A, $J \mapsto f^{-1}(J)$, è iniettiva.

  (iii) Ogni ideale primo di $S^{-1}A$ è della forma $\mathfrak{p}S^{-1}A$, per dati $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

  Viceversa, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \;/\; \mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, l'ideale $\mathfrak{p}S^{-1}A$ è primo.
- Oss. $\exists$ una corrispondenza tra gli ideali primi di A che non intersecano S, e gli ideali primi di $S^{-1}A$.

· **Dim.** (i) Sia $I := f^{-1}(J)$. Se $x = \frac{a}{s} \in J$, allora $x f(s) = f(a) \in J$, dunque $a \in I$, e $x = (\frac{1}{s}) f(a) \in I(S^{-1}A)$, da cui $I(S^{-1}A) \supset J$. L'altra inclusione è ovvia.

(ii) $J = J^{ce}$, $\forall$ ideale J di $S^{-1}A$, implica l'uguaglianza.

(iii) Se q è ideale primo di $S^{-1}A$, allora $p = f^{-1}(q)$ è ideale primo di A, e $q = pS^{-1}A$, per (i). Inoltre $p \cap S = \emptyset$, altrimenti q conterrebbe un elemento invertibile.

- Per il viceversa, $\forall p \in Spec(A) / p \cap S = \emptyset$, si ha $\frac{ab}{st} \in pS^{-1}A$. Allora $\exists u \in S$ tale che $u(ab) \in p$, e poichè $u \notin p$, $a \in p$ o $b \in p$; uno tra $\frac{a}{s}$ e $\frac{b}{t} \in pS^{-1}A$. Inoltre $1 \notin pS^{-1}A$, da cui segue che $pS^{-1}A$ è primo.

· **Es.** Sia $p \subset A$ ideale primo; $S = A \setminus p$ è sistema moltiplicativo. Indichiamo con A_p la localizzazione $S^{-1}A$, con m l'ideale primo pA_p. Se $\frac{a}{s} \notin m$, $a \notin p$, cioè $a \in S$ e quindi $\frac{a}{s}$ è invertibile. Dunque, A_p è anello locale di ideale massimale m.

LOCALIZZAZIONE DI UN A-MODULO

· **Def.** Sia $S \subset A$ sistema moltiplicativo, M A-modulo. Definiamo $S^{-1}M := \frac{M \times S}{\equiv}$, con:

$(m, s) \equiv (m', s') \iff \exists n \in S / n(ms' - m's) = 0$

$S^{-1}M$ ha un'ovvia struttura di $(S^{-1}A)$-modulo definita dall'operazione $\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} := \frac{am}{st}$

$S^{-1}M$ è detta <u>localizzazione</u> di M rispetto ad S.

APPLICAZIONE DEI RISULTATI ALGEBRICI ALLA GEOMETRIA

· Abbiamo visto che $K[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriano.

Sia $\Omega = (f_1, \dots, f_n)$ finitamente generato, $I(X) = (g_1, \dots, g_m)$ finitamente generato.

Le corrispondenze V e I sono in biezione con insiemi di ideali radicali.

$I(x) = (g)$ è, in generale, un'ipersuperficie. Alcuni esempi sono dati da:

- $\mathbb{A}^2$ $K[x, y]$ $(g(x, y))$ curva piana affine
- $\mathbb{P}^2$ $K[x_0, x_1, x_2]$ $(G(x_0, x_1, x_2))$ curva piana proiettiva
- $\mathbb{A}^3$ superfici (es.: quadriche)
- $\mathbb{P}^3$ superfici (es.: quadrica omogenea $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$)

SPAZI PROIETTIVI

- Permettono di studiare proprietà di enti geometrici non legate alla metrica.
- Desargues cancella il concetto di parallelismo; si sviluppa poi nel 1800 (Poncelet, Monge)
- <u>Def.</u> V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dim. finita. $P(V)$ è <u>spazio proiettivo associato a V</u> i cui punti sono i sottospazi vettoriali di dimensione 1 di V (rette per l'origine in V)
- $\bar{v} \in V \setminus \bar{o}$ genera il sottospazio $\langle \bar{v} \rangle = \{\lambda \bar{v} / \lambda \in \mathbb{K}\} = [\bar{v}]$; $[\bar{v}] = [\bar{w}] \Leftrightarrow \exists \lambda / \bar{v} = \lambda \bar{w}$
- $\dim P(V) = (\dim V) - 1$; se -1 si ottiene ϕ, se 0 si ottiene un sol punto, se 1 la retta proiettiva, in generale se n lo spazio proiettivo di dimensione n.
- Se $V = \mathbb{K}^{n+1}$, $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n$; se $[\bar{v}] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$, $[\bar{w}] = [y_0 : y_1 : \dots : y_n]$, $[\bar{v}] = [\bar{w}] \Leftrightarrow x_i = \lambda y_i$, $\lambda \neq 0$; $[0 : \dots : 0]$ non è retta in V, e non rappresenta un punto di $\mathbb{P}^n$.
- Se $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_n$ è base di V, non basta prendere $[\bar{e}_0], \dots, [\bar{e}_n]$ per $\mathbb{P}(V)$, in quanto si perde il controllo su una variabile. Dunque aggiungiamo $[U] = [1 : 1 : \dots : 1] = [\bar{e}_0 + \dots + \bar{e}_n]$, punto unità.
- Se $W \subset V$, sottospazio vettoriale, allora $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$, sottospazio proiettivo.
- <u>Def.</u> La <u>codimensione</u> di W è $\dim V - \dim W$. Se 1, è iperpiano; se $n-1$, è retta.
- Un iperpiano è individuato da $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$, omogenea per poter raccogliere λ. $x_i = 0$ è l'i-esimo iperpiano coordinato H_i ; in $\mathbb{P}^1$ abbiamo $[1:0]$ e $[0:1]$.
- Consideriamo ora un sistema di t eq. omogenee $\sum_{i=0}^{n} a_{ji} x_i = 0$, $j = 1:t$. Esse individuano un sottospazio $W \subset V$. Se $A = (a_{ij})$, e $r = \operatorname{rank}(A)$, allora $\dim \mathbb{P}(W) = n - r$.
- <u>Def.</u> In $\mathbb{P}^n$, $P_1, \dots, P_t$ sono in <u>posizione generale</u> se, presi comunque $\min\{t, n+1\}$ di essi, i vettori corrispondenti sono linearmente indipendenti.
- Su $\mathbb{P}^2$, tre punti non sono in posizione generale se e solo se sono allineati. Dunque la retta passante per $P = [x_{0P} : x_{1P} : x_{2P}]$ e $Q = [x_{0Q} : x_{1Q} : x_{2Q}]$ contiene tutti e soli gli $X = [x_0 : x_1 : x_2]$, tali per cui la matrice $[X^T \; P^T \; Q^T]^T$ ha det. 0, che è dunque la sua eq.
- Analogamente, su $\mathbb{P}^3$ l'equazione del piano contenente P, Q come prima, $T = [x_{0T} : x_{1T} : x_{2T}]$, è $\det([X^T \; P^T \; Q^T \; T^T]^T) = 0$.
- <u>Oss.</u> Se S_1, S_2 sono sottospazi di $\mathbb{P}^n$, allora $\dim(\mathcal{L}(S_1, S_2)) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$, dove $\mathcal{L}(S_1, S_2)$ è il sottospazio di $\mathbb{P}^n$ generato da S_1 e S_2. È la <u>formula di Grassmann</u>. Ovviamente si ha il vincolo $\dim(\mathcal{L}(S_1, S_2)) \leq n$; questo implica che si incontrino sempre in $\mathbb{P}^2$ due rette (dim. punto $= 0$), in $\mathbb{P}^3$ due piani (dim. retta $= 1$)
- <u>Def.</u> S_1, S_2 sono in <u>posizione generale</u> se $\dim(S_1 \cap S_2) = \max\{\dim S_1 + \dim S_2 - n, 0\}$

- Sia ora $C_P(J)$ il cono proiettante J da P: $C_P(J) := \bigcup_{Q \in J} \overline{PQ}$. Allora è:
$\mathcal{L}(S_1, S_2) = \bigcup_{\substack{P_1 \in S_1 \\ P_2 \in S_2}} \mathcal{L}(P_1, P_2) = \bigcup_{P \in S_2} C_P(S_1)$, che permette di esplicitare $\mathcal{L}(S_1, S_2)$.
- Se π è la proiezione da P su H iperpiano, allora $L(P,Q) \cap H = \pi_{P,H}(Q)$
Inoltre, $\forall J \subset \mathbb{P}^n$, $p \notin J$, $\pi_{P,H}(J) = H \cap C_P(J)$ (proiezione di J su H da P)
- Es. Sia $\mathbb{P}^n$, H_0 (eq.: $x_0 = 0$), $P = [1:0:\dots:0]$. Allora, se $Q = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$, è $\pi_{P,H}(Q) = [0 : x_1 : \dots : x_n]$
- Oss. Si può anche definire $\mathbb{P}(V) = \frac{V \setminus \{\bar{0}\}}{\sim}$, con $\sim$ / $\bar{v} \sim \bar{w} \iff \exists \lambda \in K \setminus \{0\}$ t.c. $\bar{v} = \lambda \bar{w}$.
- Oss. I sottospazi non banali di $\mathbb{P}^n$ corrispondono alle soluzioni non banali di sistemi omogenei in $n+1$ incognite.
- Oss. Se $n \geq 1$, $0 \cup K[x_0, \dots, x_n]_d$ è il K-spazio vettoriale formato dai polinomi omogenei in $x_0, \dots, x_n$ di grado d.
$\mathbb{P}(V)$ è l'insieme delle ipersuperfici di grado d di $\mathbb{P}^n$; per $n = 2$, sono le curve piane.
- Es. Sia V spazio vettoriale, $1 \leq K \leq \dim V$. L'insieme dei sottospazi vettoriali di dim K di V si denota $G_K(V)$ e si chiama <u>grassmanniana</u> di K-spazi di V. Se $V = K^n$, si indica $G(K, n)$.
Ciò permette una definizione alternativa di $\mathbb{P}(V)$: $\mathbb{P}(V) = G_1(V) = G(1, n)$.
- Es. $V = \mathbb{K}^4$. $G(2,4)$ diventa $\mathbb{G}(1,3)$ nel proiettivo, grassmanniana delle rette di $\mathbb{P}^3$.
Si prova che $\mathbb{G}(1,3)$ è in corrispondenza con $Q \subseteq \mathbb{P}^5$, insieme delle quadriche di Klein.
Dim. Se $P = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$, $Q = [y_0 : y_1 : y_2 : y_3]$, $P \neq Q$, allora $\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$ ha rango 2.
Dunque i $P_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}$ non sono tutti nulli, e possiamo identificare $\overline{PQ}$ con un punto di $\mathbb{P}^5$:
$\mathbb{G}(1,3) \ni \overline{PQ} \longmapsto [P_{01} : P_{02} : P_{03} : P_{12} : P_{13} : P_{23}] \in \mathbb{P}^5$, dette <u>coordinate plückeriane.</u>
Questo punto è ~~non~~ "ben definito" in quanto non dipende nè dalla scelta delle coordinate di P, Q, nè dalla scelta di P e Q stessi, ma solo dalla ~~segmento~~ retta $\overline{PQ}$: se $P' = \lambda P + \mu Q$, $Q' = \lambda' P + \mu' Q$, ovvero $\overline{P'Q'} \equiv \overline{PQ}$ ~~sebbene~~ potendo essere $P \neq P'$, $Q \neq Q'$, si ottengono le stesse coordinate plückeriane.
Tali coordinate soddisfano l'identità $P_{01}P_{23} - P_{02}P_{13} + P_{03}P_{12} = 0$, essendo il LHS il determinante di $[P^T \; Q^T \; P^T \; Q^T]^T$, chiaramente nullo avendo due righe uguali.
Dunque $[P_{01} : P_{02} : P_{03} : P_{12} : P_{13} : P_{23}] \in Q$, quadrica di equazione $x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12} = 0$.
- Viceversa, ogni punto $c \in Q$ proviene da una sola retta di $\mathbb{P}^3$. Allora $C = [P_{01} : P_{02} : P_{03} : P_{12} : P_{13} : P_{23}]$, e per ipotesi soddisfa l'identità. Dunque la retta da cui proviene è identificata da $P = [0 : P_{01} : P_{02} : P_{03}]$, $Q = [-P_{01} : 0 : P_{12} : P_{13}]$, che non dipendono dalla scelta delle coordinate (omogenee) di C.

RELAZIONE TRA GEOMETRIA PROIETTIVA E GEOMETRIA AFFINE

- $\mathbb{P}^n$ può essere visto come lo spazio affine A^n con l'aggiunta di punti, detti impropri.
Per esempio, è possibile mettere in corrispondenza $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{H_0\}$ con la retta $x_0 = 1$ del piano $x_0 O x_1$, visibile come $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$: $[x_0 : x_1] \longmapsto (1, \frac{x_1}{x_0})$, $[1 : x] \longleftrightarrow (1, x)$
Poichè $r : x_0 = 1$ ha la stessa struttura di $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$, possiamo scrivere : $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) + H_0$.
- In generale, $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n + H_0$; per $n=1$, H_0 è il punto all'infinito, in generale l'iperpiano improprio (di dim. $n-1$)
Si mettono in corrispondenza $\mathbb{A}^n$ con $\mathbb{P}^n \setminus H_0$, o equivalentemente $\mathbb{A}^n \cup H_0$ con $\mathbb{P}^n$:
$(y_1 : \dots : y_n) \longmapsto [1 : y_1 : \dots : y_n]$ (omogeneizzazione) e $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \longmapsto (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$. (deomogeneizzazione)

MODELLI GEOMETRICI DI $\mathbb{P}^n$.

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ può essere visto come la proiezione stereografica di una sfera meno il polo nord su di un piano.
Sia E^3 spazio euclideo, $p : z = 0$ piano, S^2 sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 1,
$N = (0,0,1) \in S^2$ polo nord, (x,y,z) coordinate affini. Allora $\sigma : S^2 - \{N\} \to p$ proiezione stereografica, definita da : $\sigma(x', y', z') = (\frac{x'}{1-z'}, \frac{y'}{1-z'}, 0) = p \cap NP$, con $NP : \begin{cases} x = 0 + tx' \\ y = 0 + ty' \\ z = 1 + t(z'-1) \end{cases}$,
e inversa $\sigma^{-1}(u,v,0) = \frac{1}{u^2+v^2+1}(2u, 2v, u^2+v^2-1)$, essendo $\begin{cases} x = 0 + tu \\ y = 0 + tv \\ z = 1 - t \end{cases}$.
Dunque possiamo far corrispondere S^2 e $p + N$; pensando a p come $\mathbb{C}$, $(u,v,0) \to u + iv$:
$\nu : S^2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $N \mapsto \infty$, $\sigma(x', y', z') = \frac{x'}{1-z'} + \frac{y'}{1-z'} i = \frac{x' + iy'}{1-z'}$ per $z' \neq 1$.
La sfera è un modello geometrico di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, detta sfera di Riemann.
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ può essere visto come sfera S^n di E^{n+1} : $B(\underline{0}, 1)$, identificando i punti antipodali.
Poichè un punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è identificabile da una retta per l'origine di E^{n+1}, definiamo l'applicazione $k : S^n \to \mathbb{P}^n$, $x \mapsto k(x)$, retta per l'origine che contiene x.
k è suriettiva, con $k^{-1}(r) = k(x) \cap S^n = \{-x, x\}$. Se $x \equiv y \iff x = y \vee x = -y$, allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\equiv$, ovvero corrisponde all'insieme delle coppie di punti antipodali.
- Modello per $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$: sia r una retta per $(0,0)$, diversa da $x_0 = 0$. Sia C la circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1. Allora $r \cap C = \{(0,0)$, 1 punto variabile$\}$, e $r \cap H_0 = \{(0,0)\}$. Identifichiamo le rette r con il punto "variabile" di intersezione con C, e la retta H_0 con il punto $(0,0)$, definendo l'applicazione γ come segue :
$\gamma : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) - H_0 \to C - \{(0,0)\}$ $r \mapsto \gamma(r)$; $H_0 \mapsto (0,0)$

CAMBIAMENTI DI COORDINATE PROIETTIVE E PROIETTIVITÀ

- Sia V spazio vettoriale, $\mathbb{P}(V)$ su di esso proiettivo, di dimensione n.
Siano anche due basi di V, ovvero due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}$, $\{\bar{e}_i\}_{i=0}^n$ e $\{\bar{f}_i\}_{i=0}^n$.
Dall'algebra lineare, sappiamo che per passare da $\bar{e}$ a $\bar{f}$ possiamo definire una matrice $A = M_{f,e} \in GL_{n+1}(K)$, tale che $\bar{y} = A\bar{x}$, e $\forall \bar{v} \in V$, $\bar{v} = \sum_{i=0}^n x_i \bar{e}_i = \sum_{i=0}^n y_i \bar{f}_i$
- Passando al proiettivo, $[\bar{v}] \in \mathbb{P}^n$, si ha $[\bar{x}] = p \Rightarrow [\lambda\bar{x}] = p$ in $\bar{e} \Rightarrow [\bar{y}] = p \rightarrow [\lambda \bar{y}] = p$ in $\bar{f}$.
Poichè $\bar{e}$ e $\bar{f}$ sono individuate a meno di un fattore di proporzionalità, A non è univocamente determinata.
Per scelte diverse di $\bar{e}$ ed $\bar{f}$, A viene sostituita da αA, con $\alpha \neq 0$, e si avrà $\bar{y} = \alpha A \bar{x}$.
- Prop. $\bar{e}, \bar{f}$ due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}$. $\exists A \in GL_{n+1}(K)$, a meno di un fattore di proporzionalità, tale che se $\bar{x}$ coord. di $P \in \mathbb{P}$ risp. ad $\bar{e}$, $\bar{y}$ coord. di $P \in \mathbb{P}$ risp. ad $\bar{f}$, allora $\bar{y} = A\bar{x}$.
- Oss. • $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$: $\underset{f}{\bar{y}} = A \underset{e}{\bar{x}}$, $\underset{g}{\bar{z}} = B \underset{f}{\bar{y}}$, allora $\bar{z} = \underbrace{(BA)}_{g \leftarrow f \leftarrow e}\bar{x}$ (associatività)
  • $\underset{e}{\bar{x}} = A^{-1} \underset{f}{\bar{y}}$ (invertibilità)
- Sia dato $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, un sistema di riferimento proiettivo $\{\bar{e}_i\}_{i=0}^n$, $n+1$ punti fondamentali $\{F_i = [\bar{e}_i]\}_{i=0}^n$ il punto unità $U = [\sum_{i=0}^n \bar{e}_i]$. $\{F_i\}_{i=0}^n$ e U formano un insieme di $n+2$ punti in posizione generale.
- Viceversa, dati $n+2$ punti in posizione generale $P_0, \dots, P_N, M \in \mathbb{P}$, $\exists!$ sistema in cui sono i fondamentali.
Infatti sia $[\bar{v}_i] := P_i$, $i = 0:n$; consideriamo i vettori $\bar{v}_i$. Si ha: $\{P_i\}_{i=0}^n$ l.i. $\Rightarrow \{\bar{v}_i\}_{i=0}^n$ base di V
Scegliamo ora un vettore $\bar{m} \in V / [\bar{m}] = M$: $\bar{m} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \bar{v}_i$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq 0$
Poichè $\{P_i\}_{i=0}^n$ sono in posizione generale, $\{(\lambda_i \bar{v}_i)\}_{i=0}^n$ hanno le proprietà volute, e l'unità da quella di λ_i $i=0:n$.
- In pratica, se $\bar{e}$ è un riferimento proiettivo, $P_i = [p_{i0} : \dots : p_{in}]$ $i = 0:n$ e $M = [m_0 : \dots : m_n]$ sono punti in posizione generale, $\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i = M$, ovvero $\sum_{i=0}^n \lambda_i [p_{i0} : \dots : p_{in}] = [m_0 : \dots : m_n]$; $\bar{y} = A\bar{x}$.
- Se $A = B^{-1}$, la matrice $B = [(b_{ij})]$, con $b_{ij} = \lambda_j p_{ji}$ (indici da 0 a n, dim. $(n+1) \times (n+1)$) esprime il cambiamento di coordinate da $\{p_i\}_{i=0}^n, M$ a $\{\bar{e}_i\}_{i=0}^n, U$, e i suoi vettori colonna formano una base di V che individua il nuovo riferimento.
- Es. In $\mathbb{P}^1$, sia $p_1 = [\lambda_1 : \mu_1]$, $p_2 = [\lambda_2 : \mu_2]$, $M = [\lambda_3 : \mu_3]$. Siano $\alpha, \beta \in K / M = \alpha P_1 + \beta P_2$, cioè $[\lambda_3 \ \mu_3]^T = \alpha \cdot [\lambda_1 \ \mu_1]^T + \beta \cdot [\lambda_2 \ \mu_2]^T$. $\forall P = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$, siano $\gamma, \delta \in K$ tali per cui: $[x_0 \ x_1]^T = \gamma \cdot [\alpha \cdot \lambda_1 \ \ \alpha \cdot \mu_1]^T + \delta \cdot [\beta \cdot \lambda_2 \ \ \beta \cdot \mu_2]^T$. Allora $P = [\gamma : \delta]$ nel sistema P_1, P_2, M.
Inoltre:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} \qquad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & \beta\lambda_2 \\ x_1 & \beta\mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha\lambda_1 & \beta\lambda_2 \\ \alpha\mu_1 & \beta\mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\beta(x_0\mu_2 - \lambda_2 x_1)}{\alpha\beta(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & \lambda_2 \\ x_1 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}} \qquad \delta = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & x_0 \\ \mu_1 & x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}$$

EQUIVALENZE TRA SPAZI PROIETTIVI

- Def. Un'applicazione biunivoca $f: \mathbb{P} = \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}' = \mathbb{P}(V')$ è isomorfismo se esiste φ isomorfismo $\varphi: V \to V' \,/\, f([\bar{v}]) = [\varphi(\bar{v})]$. Si parla di isomorfismo indotto $\forall [\bar{v}] \in \mathbb{P}$ da φ. Se $\exists$ un isomorfismo $f: \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$, $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$ si dicono isomorfi. Es.: proiettività, da $\mathbb{P}$ in sè stesso.
- Oss.
  - L'isomorfismo è una relazione di equivalenza tra spazi proiettivi.
  - Due spazi proiettivi isomorfi hanno la stessa dimensione; poichè ogni K-spazio vettoriale di dim. $n+1$ è isomorfo a K^{n+1}, ogni spazio proiettivo di dim. n è isomorfo a $\mathbb{P}^n$.
  - Se $f: \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ è indotta da φ, allora è indotta anche da ogni $\lambda\varphi$, $\lambda \in K^*$. Infatti $[(\lambda\varphi)(\bar{v})] = [\lambda(\varphi(\bar{v}))] = [\varphi(\bar{v})] = f([\bar{v}])$ $\forall v \in V \setminus \{\bar{0}\}$, e viceversa, se $\psi: V \to V$ induce f, allora $\psi = \lambda\varphi$, con $\lambda \in K^*$, infatti $\forall \bar{v} \in V$ $\exists \lambda \in K^*$ tale che $\psi(\bar{v}) = \lambda \cdot \varphi(\bar{v})$, cioè $(\varphi^{-1} \circ \psi)(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$; segue che $\bar{v} \in V \setminus \{0\}$ è autovettore di $\varphi^{-1} \circ \psi$, dunque $\varphi^{-1} \circ \psi = \lambda \cdot 1_V$, cioè $\psi = \lambda\varphi$.
  - Dunque, l'automorfismo che induce una data proiettività, è individuato a meno di λ.
  - L'insieme delle proiettività di $\mathbb{P}$ ha una struttura di gruppo, detto gruppo proiettivo:
    - $1_{\mathbb{P}}$ identità è la proiettività indotta da 1_V
    - f indotta da $\varphi \Rightarrow f^{-1}$ indotta da φ^{-1}
    - f, g indotte da $\varphi, \psi \Rightarrow g \circ f$ indotta da $\psi \circ \varphi$.
  - Su $\mathbb{P}^n(K)$, si può definire il gruppo lineare proiettivo di ordine $n+1$: $PGL_{n+1}(K)$
- Abbiamo l'omomorfismo suriettivo di gruppi $GL(V) \to PGL(\mathbb{P}(V))$, $\lambda \mapsto 1_{\mathbb{P}} \Leftrightarrow \varphi = \lambda \cdot 1_V$ $\lambda \in K^*$. Per esso $\ker \pi = \{\varphi / \pi(\varphi) = 1_{\mathbb{P}}\} = \{\lambda \cdot 1_V : \lambda \in K^*\}$; $\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}(V)$.
- A definisce dunque f (indotta da φ) rispetto ad $[\bar{e}]$, viene detta matrice associata a φ, appartiene a $GL_{n+1}(K)$, ed è individuata a meno di un fattore di proporzionalità.
- Prop. Sia $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(V') = n$, $\{P_i\}_{i=0}^{n+1}$ e $\{Q_i\}_{i=0}^{n+1}$ punti in posizione generale risp. di $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$. Allora $\exists!$ isomorfismo $f: \mathbb{P} \to \mathbb{P}' \,/\, f(P_i) = Q_i$; in particolare, se fissa $n+2$ punti in pos. gen., è l'identità.
- Es. $f: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$; 4 punti a 3 a 3 non allineati possono essere sempre mandati in altri 4 siffatti.
- Es. Se $W \subset V$ sottoinsieme, si può indurre la restrizione: $\varphi|_W \to f|_{\mathbb{P}(W)}$
- Def. F, F' figure di $\mathbb{P}$ sono proiettivamente equivalenti se $\exists f \in PGL(\mathbb{P}) \,/\, f(F) = F'$
- Es. S, S' sottospazi di $\mathbb{P}(V)$, con $\dim S = \dim S'$, sono proiettivamente equivalenti.
- Es. Due insiemi di $k \leq n+2$ punti in posizione generale sono proiettivamente equivalenti.
- Def. Siano $\{P_i\}_{i=1}^{4} \in \mathbb{P}^1$, i primi tre distinti. Allora il birapporto $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$ è $\frac{y_1}{y_0} \in K \cup \{\infty\}$, con $[y_0 : y_1]$ coordinate di P_4 nel riferimento in cui $P_1 = [1:0]$, $P_2 = [0:1]$, $P_3 = [1:1]$. Se $P_i = [\lambda_i : \mu_i]$, $D_{ij} = \lambda_i\mu_j - \mu_i\lambda_j$, allora $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = D_{14} \cdot D_{23} \cdot D_{24}^{-1} \cdot D_{13}^{-1}$
  In coordinate non omogenee, $z_i = \mu_i \cdot \lambda_i^{-1}$, $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = (z_4 - z_1)(z_3 - z_2)(z_4 - z_2)^{-1}(z_3 - z_1)^{-1}$
- Teor. $\exists$ proiettività $f: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \,/\, f(P_i) = Q_i \iff \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$

CURVE ALGEBRICHE

- **Def.** Una <u>curva algebrica piana</u> di $\mathbb{A}^2(K)$ è una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di $K[x,y]$. Un suo rappresentante $f(x,y)=0$ è detto <u>equazione</u> della curva; $\deg f(x,y)$ è detto <u>grado</u>. $C \subseteq \mathbb{A}^2(K)$, insieme dei punti che soddisfano $f(x,y)=0$, è detto <u>supporto</u> della curva.
- **Def.** Una curva algebrica di $\mathbb{P}^2(K)$ è una classe di proporzionalità di polinomi di $K[x_0,x_1,x_2]$. Dovendo occorrere che se $f(x_0,x_1,x_2)=0$ allora $f(\lambda x_0,\lambda x_1,\lambda x_2)=0$, f dovrà essere omogeneo.
- **Es.** $(ax+by+c)^n=0$: variando n si generano curve con lo stesso supporto, ma differenti.
  $x^2+y^2+c=0$, su $\mathbb{R}$: stesso discorso variando c, il supporto è sempre $\emptyset$, la curva cambia.
  $x^2+y^2=0$: su $\mathbb{R}$ il supporto è un punto solo, $(0,0)$, su $\mathbb{C}$ è formato da infiniti punti.
- **Oss.** Lo studio della curva si semplifica se $K=\overline{K}$, cioè se K è algebricamente chiuso.
- **Def.** $\mathcal{D}$ curva è affinemente [proiettivamente] equivalente a $\mathcal{C}$ curva se esiste un'affinità [proiettività] T / $\mathcal{C}=T(\mathcal{D})$. Si tratta di una relazione di equivalenza, ereditata anche dai supporti.
- **Oss.** Ci interesseranno le proprietà affini [proiettive] delle curve, ovvero quelle che una curva ha in comune con tutte quelle ad esse equivalenti affinemente [proiettivamente].
- **Es.** Tutte le rette di $\mathbb{A}^2(K)$ $[\mathbb{P}^2(K)]$ sono affinemente [proiettivamente] equivalenti tra di loro.
- **Def.** Se $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{A}^2(K)$ ha equazione $f(x,y)=0$, la <u>chiusura proiettiva</u> è $\mathcal{C}^*\subseteq\mathbb{P}^2(K)$, def. da $F(x_0,x_1,x_2)=0$, con F polinomio omogeneizzato di f: $P(x,y)\longrightarrow P[1:x_1:x_2]$, $P(\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0})\longleftarrow P[x_0:x_1:x_2]$
  - $\mathcal{C}^*\cap H_0$ è l'insieme dei punti impropri rispetto a x_0, del tipo $[0:x_1:x_2]$ e soddisfacenti $F(0,x_1,x_2)=0$.
  - Se $f(x,y)=\sum_{i=0}^{n}F_i(x,y)$, con $F_d\in K[x,y]_d$, allora $F(x_0,x_1,x_2)=\sum_{i=0}^{n}F_i(x,y)\cdot x_0^{n-i}$
    Dunque $F(0,x_1,x_2)=0 \Rightarrow F_n(x_1,x_2)=0$, e i punti impropri di $\mathcal{C}$ sono le sue soluzioni non banali.
  - Se $x_0^r \| F$, allora $\deg(\mathcal{C})=\deg(\mathcal{C}^*)-r$; solitamente si fa in modo che $x_0\nmid F$, ovvero $r=0$, $\deg(\mathcal{C})=\deg(\mathcal{C}^*)$
- **Prop.** Abbiamo già visto che in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ il supporto può essere $\emptyset$. Vediamo cosa succede in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.
  Sia $\mathcal{C}: f(x,y)=0$, di grado $m\geq 1$. Consideriamo f come polinomio in y: $f(x,y)=\sum_{i=0}^{m}f_i(x)\cdot y^i$.
  Sia Δ il sottoinsieme finito di $\mathbb{C}$ delle radici di $f_n(x)$. Allora, $\forall\bar{x}\in\mathbb{C}\setminus\Delta$, il polinomio in y $f(\bar{x},y)=\sum_{i=0}^{m}f_i(\bar{x})\cdot y^i$ ha grado m, possedendo pertanto m radici $\{y_i(\bar{x})\}_{i=1}^{m}$, non x forza distinte. I punti $\{(\bar{x},y_i(\bar{x}))\}_{i=1}^{m}\in$ dunque a $\mathcal{C}$, e al variare di $\bar{x}\in\mathbb{C}\setminus\Delta$ si ottengono tutti i punti di $\mathcal{C}$, tranne al più le radici dei polinomi $f(\bar{x},y)=0$ per $\bar{x}\in\Delta$, in numero finito. Essendo $\mathbb{C}$, dal punto di vista reale, un ente a 2 dimensioni, x variando in $\mathbb{C}\setminus\Delta$ descrive un ente a 2 dimensioni reali; in particolare, il supporto di una curva affine complessa contiene infiniti punti. Similmente, ciò accade per una curva proiettiva complessa: o essa è uguale a $x_0=0$, retta impropria, che contiene infiniti punti, o essa contiene una curva reale $f(x,y)=0$, il cui supporto ha infiniti punti come già visto.

• **Def.** $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ è detta <u>reale</u> se può essere definita da un'equazione $f(x,y)=0$ con $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$
Una definizione analoga viene data per $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

• <u>Oss.</u> Poichè $f(x,y)=0 \iff \lambda \cdot f(x,y)=0$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, curve reali possono essere definite da polinomi a coefficienti non reali. Per esempio, $ix+iy+i=0$ è reale, essendo esprimibile come $x+y+1=0$.

• <u>Oss.</u> Esistono affinità che trasformano una curva reale in curve che non sono reali.

• <u>Oss.</u> $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ può essere visto come $\subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, insieme degli $[x_0:x_1:x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ / $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ non può però essere in alcun modo considerato come uno spazio proiettivo reale.
$\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ invece può essere visto come spazio affine reale, di base $\{(1,0),(0,1),(i,0),(0,i)\}$.

CURVE AFFINI REALI DI GRADO 3 (PARABOLE CUBICHE DI NEWTON)

• Hanno equazione generale $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

• Il luogo dei punti reali dipende dalle tre radici λ, μ, ν, del polinomio in x a RHS.
Si presentano in realtà una rosa limitata di casi:
  - λ, μ, ν reali e distinte: si ottiene una parabola campaniforme con ovale.
  - λ, μ, ν distinte, due non reali: " " " senza ovale.
  - λ, μ, ν reali, $\lambda = \mu < \nu$: parabola campaniforme puntata.
  - " , $\lambda = \mu > \nu$: parabola nodata
  - " , $\lambda = \mu = \nu$: parabola cuspidata.

PUNTI K-RAZIONALI DI UNA CURVA

• Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ definita su K. Se può essere definita da $f(x,y)=0$ con $f(x,y) \in K[x,y]$, allora chiamiamo <u>punti K-razionali</u> di $\mathcal{C}$ gli elementi di $\mathcal{C} \cap \mathbb{A}^2(K)$. Esempi notevoli sono $K = \mathbb{R}$ (curva reale) e $K = \mathbb{Q}$ (studio geometrico di equazioni polinomiali su $\mathbb{Q}$ e soluzioni in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{Z}$)

• <u>Es.</u> $\mathcal{C}: x^2+y^2=1$. I punti $\mathbb{Q}$-razionali di $\mathcal{C}$ sono tutti e soli i $(\pm\frac{p}{r}, \pm\frac{q}{r})$, $p,q,r \in \mathbb{N}$, tali per cui $p^2+q^2=r^2$, ovvero le terne pitagoriche. La ricerca delle due cose è equivalente.

• <u>Es.</u> $\mathcal{C}_n: x^n+y^n=1$, $n \geq 3$. Gli unici punti $\mathbb{Q}$-razionali delle curve sono quelli banali, non esistendo per il teorema di Fermat $p,q,r \geq 2$ / $p^n+q^n=r^n$

CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE PROIETTIVE

• Possiamo scrivere $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{P}^2(K)$ come: $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$ dove $a_{ij} \in K$ non tutti nulli; inoltre, se poniamo $a_{ji} = a_{ij}$, può diventare $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0$

Si può quindi porre la matrice $A = [(a_{ij})]$, con $i = 0:2$, $j = 0:2$. Così, se $X = {}^t(x_0, x_1, x_2)$, allora l'equazione della conica diventa: ${}^tXAX = 0$.

• Se $M \in GL(K)$, sostituendo MX a X otteniamo: $0 = {}^tX\,{}^tMAMX = {}^tXBX$, ponendo ${}^tMAM = B$.

Tale conica è proiettivamente equivalente a $\mathscr{C}$, e viceversa tutte le equivalenti si ottengono così.

• Oss. $\det({}^tMAM) = \det(B) = 0 \iff \det(A) = 0$; inoltre A e B possiedono lo stesso rango.

Dunque rango e annullarsi o meno del det sono proprietà proiettive; si parla di rango della conica $r(\mathscr{C})$.

• Def. $\mathscr{C}$ è non degenere se $\det A \neq 0$ ($r(\mathscr{C}) = 3$), degenere altrimenti; semplicemente se $r(\mathscr{C}) = 2$, doppiamente se $r(\mathscr{C}) = 1$.

• Teor. Se $K = \overline{K}$, ogni conica $\mathscr{C}$ di $\mathbb{P}^2(K)$ è proiettivamente equivalente a una (sola) tra:

• $\sum_{i=0}^{2} x_i^2 = 0$ (generale) • $\sum_{i=0}^{1} x_i^2 = 0$ (semplicemente degenere) • $x_0^2 = 0$ (doppiamente degenere)

Dim. Poiché A e B sono congruenti, $\exists\, M \in GL_3(K)$ tale che $B = \sum_{i=0}^{2} e_{ii}$, o $\sum_{i=0}^{1} e_{ii}$, o e_{00}.

$\mathscr{C}$ sarà proiettivamente equivalente a una di queste, una sola poiché hanno rango distinto tra loro.

• Teor. $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente ad una (sola) tra (e quindi se $K \neq \overline{K}$ è diverso):

• $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ (generale) • $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (generale a punti non reali) rango 3

• $x_0^2 - x_1^2 = 0$ (due rette) • $x_0^2 + x_1^2 = 0$ ((0,0)) rango 2 • $x_0^2 = 0$ (doppiamente deg.) rango 1

Dim. Basata sul teorema di Sylvester, ripetendo il ragionamento precedente.

• Oss. • Una conica non degenere di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ possiede un punto $\Rightarrow$ ne possiede infiniti.

• Quasi tutte le considerazioni per le coniche si estendono alle quadriche di $\mathbb{P}^n(K)$, $n \geq 3$

• $\mathscr{Q} \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ ha equazione $\mathscr{Q}(\overline{x}) = 0$, con $\overline{x} = {}^t(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\mathscr{Q}(\overline{x})$ polinomio omogeneo di 2° grado.

$\mathscr{Q}(\overline{x}) = {}^tXAX$, con $A = A^T \in M_{n+1}(K)$; ragionando come prima, $\mathscr{Q}$ è equivalente ad una sola tra:

• se $K = \overline{K}$, a $\sum_{i=0}^{r} x_i^2 = 0$, con $r = r(\mathscr{Q}) - 1$.

• se $K = \mathbb{R}$, a $\sum_{i=0}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{r} x_j^2 = 0$, con $0 \leq p \leq r \leq n$, $2p \geq r - 1$.

• Def. Sia $K = \overline{K}$, $\mathscr{C} = \mathbb{A}^2(K)$, $\deg(\mathscr{C}) = n$, $f(x,y) = 0$. $\mathscr{C}$ è irriducibile se $f(x,y)$ lo è in $K[x,y]$.

Se $\mathscr{C}$ non lo è (è riducibile), si scompone in fattori irriducibili: $f(x,y) = \prod_{i=1}^{k} f_i(x,y)$.

Se $\{\mathscr{C}_i\}_{i=1}^{k}$ hanno eq. $\{f_i = 0\}_{i=1}^{k}$, allora $\mathscr{C} = \biguplus_{i=1}^{k} \mathscr{C}_i$, e le $\mathscr{C}_i$ sono le sue componenti irriducibili.

Una componente irriducibile è multipla se il suo corrispondente fattore lo è (di data molteplicità)

$\mathscr{C}$ è ridotta se non possiede componenti multiple. Le definizioni sono analoghe per $\mathbb{P}^2(K)$.

Riducibilità, irriducibilità, numero, grado e molteplicità delle componenti sono proprietà affini.

$\deg \mathscr{C}$ è la somma dei gradi delle sue componenti irriducibili, contando con molteplicità.

• Es. • conica irriducibile $\iff$ non degenere • conica semplicemente degenere $\iff$ 2 componenti irriducibili distinte

• conica doppiamente degenere $\iff$ non ridotta (retta doppia)

INTERSEZIONI DI 2 CURVE

- La teoria delle curve può dipendere dallo studio delle intersezioni di due di esse.

• Teor. $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ $[\mathbb{P}^2(\mathbb{K})]$, di gradi n e m, hanno o infiniti, o al più $n \cdot m$ punti in comune. Se sono proiettive, allora hanno almeno un punto in comune.

Dim. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ affini con un numero finito di punti in comune $\Rightarrow$ le loro chiusure hanno finiti punti in comune.

Lavoriamo quindi in $\mathbb{P}^2$, potendo inoltre sostituire $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ con $T(\mathcal{C}), T(\mathcal{D})$ (T proiettività).

Se $\forall j \neq k$ $r_{jk} = \overline{P_j P_k}$, con $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{P_i\}_{i=1}^N$, $\exists P \in \mathbb{P}^2 \setminus \{\mathcal{C} + \mathcal{D} + \sum_{j,k} r_{jk}\}$ allora.

Supponiamo ora $P = [0:0:1]$, altrimenti usiamo una proiettività per fare modo che sia così.

Siano $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ eq. di $\mathcal{C}$, $G(x_0, x_1, x_2) = 0$ eq. di $\mathcal{D}$; si potrà scrivere:

$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{n} A_{n-i}(x_0, x_1) \cdot x_2^i$, $G(x_0, x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{m} B_{m-j}(x_0, x_1) \cdot x_2^j$, $A_h \in \mathbb{K}[x_0, x_1]_h$, $B_k \in \mathbb{K}[x_0, x_1]_k$

Se $R(x_0, x_1)$ è il risultante di F e G risp. x_2, e $[0:0:1] \notin \mathcal{C}, \mathcal{D}$, ovvero $A_0 B_0 \neq 0$, le soluzioni di $R(x_0, x_1)$ sono le soluzioni comuni delle due curve; siano esse $(\overline{x_0}, \overline{x_1})$.

Per $\forall \overline{x_0}, \overline{x_1}$ soluzioni, $F(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ e $G(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ hanno effettivamente grado n e m.

Naturalmente, $R(\overline{x_0}, \overline{x_1})$ è il risultante di $F(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ e $G(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$.

Se $[\overline{x_0} : \overline{x_1} : \overline{x_2}] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, allora $R(\overline{x_0}, \overline{x_1}) = 0$, in quanto $F(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ e $G(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ hanno $\overline{x_2}$ radice comune.

Viceversa, $\forall (\overline{x_0}, \overline{x_1}) \,/\, R(\overline{x_0}, \overline{x_1}) = 0$, $\exists \overline{x_2}$ radice comune di $F(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$ e $G(\overline{x_0}, \overline{x_1}, x_2)$, che definisce $[\overline{x_0} : \overline{x_1} : \overline{x_2}] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

$R(x_0, x_1)$ non è $\equiv 0$, poiché $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ è finito, dunque è un polinomio omogeneo di grado mn, e possiede al più mn radici distinte. Basta dunque far vedere che $\forall (\overline{x_0}, \overline{x_1})$, radice di $R(x_0, x_1)$, $\exists$ al più un punto $[\overline{x_0} : \overline{x_1} : \overline{x_2}] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, se infatti $[\overline{x_0} : \overline{x_1} : \overline{x_2}]$ e $[\overline{x_0} : \overline{x_1} : \overline{y_2}] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, $\overline{x_2} \neq \overline{y_2}$, la retta per essi passerebbe per $[0:0:1]$, contro ipotesi.

• Oss. • È notevole il caso particolare in cui $\mathcal{D}$ è una retta, con intersezione non infinita.
- Nel caso affine, due curve possono non avere punti in comune (es: due circonferenze concentriche)
- Se $\mathbb{K} \neq \overline{\mathbb{K}}$, due curve proiettive possono non avere punti in comune (esempio precedente)

• Teor. (Bezout): se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, due curve proiettive che non hanno infiniti punti in comune ne hanno esattamente mn, contando ognuno con la propria molteplicità.

• Teor. $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{A}^2$ ($\mathbb{P}^2$), $\mathcal{D}$ irriducibile, $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ di infiniti punti $\Longrightarrow$ $\mathcal{D}$ è componente irriducibile di $\mathcal{C}$.

Dim. Caso affine. Sia $\mathcal{D}$ retta ($ax+by+c=0$), $\mathcal{C}$: $f(x,y)=0$, $r := \mathcal{D}$, $r \cap \mathcal{C}$ intersezione, cioè sistema.

Supponiamo $b \neq 0$ (altrimenti $a \neq 0$): risulta $y = -b^{-1}ax - b^{-1}c$, da cui $f(x, -b^{-1}ax - b^{-1}c) = 0$.

Si ha $\sum_{i=0}^{n} A_i x^{n-i} = 0$; le sue soluzioni forniscono tutti e soli i punti di $r \cap \mathcal{C}$.

Naturalmente, $r \cap \mathcal{C}$ ha infiniti punti $\Longleftrightarrow$ $\sum_{i=0}^{n} A_i x^{n-i}$ è identicamente nullo, e d'altra parte:

r componente irriducibile di $\mathcal{C}$ $\Longleftrightarrow$ $y + b^{-1}ax + b^{-1}c \mid f(x,y)$ $\Longleftrightarrow$ $f(x,y) = (y + b^{-1}ax + b^{-1}c)\, h(x,y)$, con $h(x,y) \in K[x,y]$

Sostituendo $-(-b^{-1}ax + b^{-1}c)$ al posto di y si ottiene $f(x, -(b^{-1}ax + b^{-1}c)) = 0$,

che è proprio la condizione di $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ = infiniti punti che avevamo prima.

- Il caso generale segue così: sia $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \infty$ punti, $\mathcal{C}$: $f(x,y)=0$, $\mathcal{D}$: $g(x,y)=0$; supponiamo anche che $f(x,y)$ sia costante rispetto ad y (ma non risp. x), e $g(x,y)$ irriducibile (non costante).

Allora $\mathcal{C}$ consiste di un numero finito di rette parallele all'asse y, di cui $\mathcal{D}$ ne interseca almeno una in infiniti punti e quindi l'ha come componente irriducibile, ma essendo $\mathcal{D}$ stesso irriducibile vi coincide, dunque $\mathcal{D}$ è componente irriducibile di $\mathcal{C}$, coincidendo con una sua retta.

- Se $f(x,y)$ non è costante rispetto ad y, consideriamo $f(x,y), g(x,y) \in (K[x])[y]$, F campo dei quozienti di D.

Se per assurdo $g(x,y) \nmid f(x,y)$, allora f e g sono privi di fattori comuni non costanti risp. y, cioè in $D[y]$ non hanno fattori comuni non costanti, e nemmeno ne hanno in $F[y]$, dunque $MCD(f,g) = 1$ in $F[y]$, da cui $\exists\, A, B \in F[y]$ / $1 = Af + Bg$. Ricordando $K[x] = D$, $\exists\, h \in K[x]$, $h \neq 0$, tale per cui $Ah, Bh \in K[x]$; $h = (Ah)f + (Bh)g$.

Ora, ogni punto in comune a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ appartiene alla curva $\mathcal{E}$ di equazione $h=0$.

$\mathcal{D}$ ed $\mathcal{E}$ hanno ∞ punti in comune, avendone ∞ $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Ma $\mathcal{E}$ è l'unione delle rette parallele all'asse y, e come prima si deduce che $\mathcal{D}$ è una retta.

Per quanto dimostrato prima, $\mathcal{D}$ è componente irriducibile di $\mathcal{C}$, dunque $g \mid f$, assurdo.

• Cor. Se due curve (affini o proiettive) di grado m e n hanno almeno $mn+1$ punti in comune, allora hanno almeno una componente irriducibile in comune.

• Passando al proiettivo, sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $\deg \mathcal{C} = n$, $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, $r = \overline{PQ}$, $P = [p_0 : p_1 : p_2]$, $Q = [q_0 : q_1 : q_2]$

r si può scrivere come $[\lambda p_0 + \mu q_0 : \lambda p_1 + \mu q_1 : \lambda p_2 + \mu q_2] = \lambda P + \mu Q$, e inoltre:

un punto di $r \in \mathcal{C}$ $\Longleftrightarrow$ $F(\lambda p_0 + \mu q_0 : \lambda p_1 + \mu q_1 : \lambda p_2 + \mu q_2) = 0$ $\Longleftrightarrow$ $F(\lambda P + \mu Q) = 0$.

Si tratta di un'equazione omogenea di grado n in λ e μ, con soluzioni i punti di $r \cap \mathcal{C}$.

Essa si annulla identicamente se e solo se r è una componente irriducibile di $\mathcal{C}$.

Vediamo ora che il tutto è ben posto, cioè dipende dalla retta r e dai punti di intersezione, e non dai punti P e Q scelti per identificare la retta.

- Siano dunque $P' = [p_0' : p_1' : p_2']$, $Q' = [q_0' : q_1' : q_2']$, P' e $Q' \in r$; il suo punto generico sarà: $\lambda' p' + \mu' q' = [\lambda' p_0' + \mu' q_0' : \lambda' p_1' + \mu' q_1' : \lambda' p_2' + \mu' q_2']$, le intersezioni con $\mathcal{C}$ sol. di $F(\lambda' p' + \mu' q') = 0$.
Ora, $\lambda P + \mu Q = \lambda' P' + \mu' Q' \iff \exists (a_{ij}) \in GL_2(K)$, $\alpha \neq 0$, t.c. $\alpha\lambda = a_{11}\lambda' + a_{12}\mu'$, $\alpha\mu = a_{21}\lambda' + a_{22}\mu'$. ($\square$)
A meno di un α^n, sostituendo ($\square$) in $F(\lambda P + \mu Q) = 0$, si trova $F(\lambda' P' + \mu' Q') = 0$.
($\square$) è invertibile, dunque fa corrispondere biunivocamente i fattori irriducibili di $F(\lambda P + \mu Q)$ e $F(\lambda' P' + \mu' Q')$
Le soluzioni delle due equazioni si corrispondono biunivocamente con la relativa molteplicità, e dunque la molteplicità della radice di $F(\lambda P + \mu Q)$ corrispondente ad un dato punto di $r \cap \mathcal{C}$ dipende solo dal punto e non da P, Q, come volevasi dimostrare.
- <u>Def.</u> Siano $r, \mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$. $I(\mathcal{C}, r; P_0)$ è la molteplicità di intersezione in $P_0 = \lambda_0 P + \mu_0 Q$ se (λ_0, μ_0) è una radice di molteplicità $I(\mathcal{C}, r; P_0)$ del polinomio $F(\lambda P + \mu Q)$. $P_0 \notin r \cap \mathcal{C} \Rightarrow I = 0$; $r \subset \mathcal{C} \Rightarrow I = \infty$.
- <u>Teor.</u> $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ di grado n, r retta non sua componente $\Longrightarrow \sum_{P_0 \in r} I(\mathcal{C}, r; P_0) = n$.
<u>Dim.</u> Siano $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$, $r : \overline{PQ}$; Σ ha infiniti addendi, di cui però solo un numero finito diversi da zero, ed è la somma delle molteplicità delle radici di $F(\lambda P + \mu Q)$, pol. omogeneo di gr. n.
- Nel caso affine, sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$, $f(x,y) = 0$, $r : \begin{cases} x = a + Lt \\ y = b + Mt \end{cases}$; abbiamo che $f(a + Lt, b + Mt) = 0$ è l'equazione in t le cui soluzioni sono i punti di $\mathcal{C} \cap r$.
- <u>Def.</u> r e $\mathcal{C}$ hanno molteplicità di intersezione $I(\mathcal{C}, r; P_0)$ nel punto $P_0 = (a + Lt_0, b + Mt_0) \in r$ se t_0 è una radice di molteplicità $I(\mathcal{C}, r; P_0)$ del polinomio $f(a + Lt, b + Mt)$. $P_0 \notin r \cap \mathcal{C} \Rightarrow I = 0$; $r \subset \mathcal{C} \Rightarrow I = \infty$.
La definizione è ben posta rispetto al caso proiettivo; vediamo cosa succede all'infinito.
Siano $\mathcal{C}^* : F(x_0, x_1, x_2)$, $r^* : (x_0, x_1, x_2) = (\lambda, a\lambda + L\mu, b\lambda + M\mu)$; $[1 : a : b]$, $[0 : L : M] \in r^*$.
$P_\infty = [0 : L : M]$ punto improprio di $\mathcal{C}^*$. Allora $I(\mathcal{C}^*, r^*; P_\infty)$ è pari alla massima potenza di λ che divide il polinomio $F(\lambda, a\lambda + L\mu, b\lambda + M\mu)$, ed è pari a $n - \deg(f(a + Lt, b + Mt))$.
- <u>Teor.</u> $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$ di grado n, r retta non sua componente $\Longrightarrow \sum_{P \in r} I(\mathcal{C}, r; P) \leq n$
con l'uguaglianza $\iff$ il punto improprio di r non è punto improprio di $\mathcal{C}$.
- <u>Oss.</u> Per calcolare la molteplicità di intersezione di una curva e una retta in un punto proprio P, è indifferente usare le coordinate affini o quelle proiettive.
- <u>Prop.</u> $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{A}^2$ o $\mathbb{P}^2$, r retta non componente di esse, $P_0 \in r \Rightarrow I(\mathcal{C}, r; P_0) + I(\mathcal{D}, r; P_0) = I(\mathcal{C} + \mathcal{D}, r; P_0)$
Nel caso affine, se $\mathcal{C} : f(x,y) = 0$, $\mathcal{D} : g(x,y) = 0$, la molteplicità di una radice t_0 del pol. $g(a + Lt, b + Mt) \cdot f(a + Lt, b + Mt)$ è uguale alla somma delle molteplicità di t_0 per ognuno dei fattori $f(a + Lt, b + Mt)$ e $g(a + Lt, b + Mt)$.
- <u>Prop.</u> $r, \mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ proiettività. $\forall P \in r$, si ha $I(\mathcal{C}, r; P) = I(T(\mathcal{C}), T(r); T(P))$, ovvero la molteplicità di $\mathbb{A}$ di $r \in \mathcal{C}$ è invariante per proiettività. (molt. di intersezione)

PROPRIETÀ LOCALI DI CURVE ALGEBRICHE

- Def. $K=\overline{K}$ (alg. chiuso), $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2 (\mathbb{P}^2)$; P punto. $m_P(\mathcal{C}) := \min_{P \in r} I(\mathcal{C}, r; P)$ è la molteplicità di $\mathcal{C}$ in P, o di P per $\mathcal{C}$. $m_P(\mathcal{C}) \neq \infty$, se $\exists$ rette tali che $P \in$ retta, retta $\not\subseteq \mathcal{C}$.
  In tal caso; $0 \le m_P(\mathcal{C}) \le gr(\mathcal{C})$; $m_P(\mathcal{C}) = 0 \iff P \notin \mathcal{C}$; $m_P(\mathcal{C}) = 1 \iff P$ è semplice o non singolare di $\mathcal{C}$; $m_P(\mathcal{C}) > 1 \iff P$ è multiplo o singolare di $\mathcal{C}$, in particolare m-multiplo se $m_P(\mathcal{C}) = m$.
- Def. $\mathcal{C}$ è non singolare se tutti i suoi punti sono semplici, singolare se almeno uno non lo è.
- Prop. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$, $\mathcal{C}^* \subseteq \mathbb{P}^2$ chiusura di $\mathcal{C}$. Allora, $\forall p \in \mathcal{C}$, $m_p(\mathcal{C}) = m_p(\mathcal{C}^*)$
- Troviamo i punti multipli di $\mathcal{C}$. Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$, $f(x,y)=0$, $P(a,b) \in \mathcal{C}$, r per P: $\begin{cases} x = a+Lt \\ y = b+Mt \end{cases}$.
  Se $(L,M) \neq (0,0)$, solo per $t=0$ troviamo P, e possiamo dunque vedere $I(\mathcal{C}, r; P)$ come molteplicità di $t=0$ come radice del polinomio $f(a+Lt, b+Mt)$. Si ha:
  $$t \text{ radice multipla} \iff R(f,f') = 0 \iff f' = f'_x(x,y)L + f'_y(x,y)M \iff f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$$
  Infatti, altrimenti, l'unica retta τ per $P(a,b)$ per cui $I(\mathcal{C}, \tau; P) \ge 2$ è quella per cui L e M soddisfano $f'_x(a,b)L + f'_y(a,b)M = 0$; ogni altra retta soddisfa $I(\mathcal{C}, r; P) = 1$, per cui P è semplice.
- Prop. $P \in \mathbb{A}^2$ semplice per $\mathcal{C} \iff P \in \mathcal{C}$, $f'_x|_P$ o $f'_y|_P \neq 0$; $P \in \mathbb{A}^2$ singolare per $\mathcal{C} \iff P \in \mathcal{C}$, $f'_x|_P = f'_y|_P = 0$.
- Def. Se $P(a,b)$ è semplice per $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$, allora l'unica retta τ per cui $I(\mathcal{C}, r; P) = 2$ si dice la tangente a $\mathcal{C}$ in P.
  Se $f'_x(a,b)L + f'_y(a,b)M = 0$, con derivate entrambe non nulle, allora $(L,M) = (f'_y(a,b), -f'_x(a,b))$, e τ ha equazione $f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) = 0$.
- Passiamo al proiettivo. Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $F(x_0,x_1,x_2) = 0$, $P = [p_0 : p_1 : p_2] \in \mathcal{C}$, r per P: $\begin{cases} x_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \end{cases}$
  Sia Q un altro punto di r, cosicché si abbia $F(\lambda p_0 + \mu q_0, \lambda p_1 + \mu q_1, \lambda p_2 + \mu q_2) = A(\lambda, \mu) = 0$.
  P si trova per $(\lambda, \mu) = (1,0)$, cioè corrisponde alla radice $t=0$, considerando il parametro $t = \frac{\mu}{\lambda}$ (non omogeneo)
  Troviamo $A(1,t) = F(p_0+tq_0, p_1+tq_1, p_2+tq_2)$ e $I(\mathcal{C}, r; P) =$ molteplicità di t in $A(1,t)$.
  $$t=0 \text{ radice multipla} \iff \frac{dA(1,t)}{dt} = 0 \iff \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)\, q_i = 0 \quad ; \quad P \text{ singolare} \iff F_1(p) = F_2(p) = F_0(p) = 0.$$
  Solo in questo caso $\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)\, q_i = 0$ è soddisfatta $\forall Q \in \mathbb{P}^2$, e quindi $I(\mathcal{C}, r; P) > 1$ $\forall$ retta passante per P.
- Oss. $n = \deg(F) \Rightarrow \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i = nF \Rightarrow F_0(p) = F_1(p) = F_2(p) = 0 \Rightarrow F(p) = 0$ $\forall p \in \mathcal{C}$. Si scrive anche $F_i := \frac{\partial F}{\partial x_i}$.
- Prop. $P \in \mathbb{P}^2$ semplice per $\mathcal{C} \iff P \in \mathcal{C}$, $F_0(p)$ o $F_1(p)$ o $F_2(p) \neq 0$; $P \in \mathbb{P}^2$ singolare per $\mathcal{C} \iff P \in \mathcal{C}$, $F_0(p) = F_1(p) = F_2(p) = 0$
- Def. Se P è semplice, la retta τ di equazione $\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)\, q_i = 0$ è l'unica retta tale per cui $I(\mathcal{C}, \tau; P) > 1$, ed è detta retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto semplice P.
- Prop. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2 (\mathbb{P}^2)$ irriducibile possiede al più un numero finito di punti singolari.
  Dim. La ricerca dei punti singolari si riduce alla risoluzione di $f(x,y) = f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$
  Vediamo come $f(x,y) = 0$ e $f'_x(x,y) = 0$ hanno intersezione finita. Si ha $\mathcal{C}$ irriducibile, $\deg(\mathcal{C}_x) \le \deg(\mathcal{C})$; $\mathcal{C}_x$ non può essere una sua componente irriducibile, da cui segue ciò.
  Nel proiettivo, $\mathcal{C} \neq r_0$ è chiusura proiettiva della curva affine $D: F(1,x,y) = 0$, ancora irriducibile. I supporti di $\mathcal{C}$ e D differiscono soltanto per i punti $\mathcal{C} \cap r_0$, in numero finito, inoltre P è singolare per D se e solo se lo è per $\mathcal{C}$. Avendo D un numero finito di punti singolari, ciò vale anche per $\mathcal{C}$.

TANGENTI PRINCIPALI

- Prop. $P \in \mathcal{C}$ singolare $\Rightarrow I(\mathcal{C}, r; P) \geq m_P(\mathcal{C}) \geq 2$, $\forall$ retta per P.
- Def. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2 (\mathbb{P}^2)$, $P \in \mathcal{C}$. r, tale che $I(\mathcal{C}, r; P) > m_P(\mathcal{C})$, è detta tangente principale a $\mathcal{C}$ in P.
  Se r^* è tangente principale a $\mathcal{C}^*$ in un suo punto improprio, è detta asintoto.
- Troviamo le tangenti principali. Si hanno al solito $\mathcal{C}$, $f(x,y) = 0$, $P = (a,b) \in \mathcal{C}$, r per P: $\begin{cases} x = a + Lt \\ y = b + Mt \end{cases}$,
  $f(a+Lt, b+Mt) = 0$. Utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor:
  $$f(a+Lt, b+Mt) = [f'_x(a,b)L + f'_y(a,b)M]\,t + \frac{1}{2!}[f_{xx}(a,b)L^2 + 2f_{xy}(a,b)LM + f_{yy}(a,b)M^2]\,t^2 + \ldots +$$
  $$+ \frac{1}{r!}\left[\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f_{x^{r-k}y^k}(a,b) L^{r-k} M^k\right] \cdot t^r + \ldots$$
  $t = \alpha$ è radice di molteplicità $m \Leftrightarrow \forall$ derivata di ordine $\leq m-1$ è nulla, $\exists$ derivata di ordine m non nulla.
  Dunque, $m_P(\mathcal{C}) = m \Leftrightarrow \forall (L,M)$ la parte delle derivate di ordine $\leq m-1$ è soddisfatta,
  mentre $\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f_{x^{r-k}y^k}(a,b) L^{r-k} M^k t^r$ è soddisfatta per almeno una scelta di (L,M).
- Il caso proiettivo si tratta similmente: $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, $F(p_0 + tq_0, \ldots, p_2 + tq_2) = 0$, $t = \frac{\mu}{\lambda}$.
  Per Taylor, $F(p_0 + tq_0, \ldots, p_2 + tq_2) = (\sum_i F_i(p)\, q_i)\, t + \frac{1}{2!}(\sum_{jk} F_{jk}(p)\, q_j q_k)\, t^2 + \ldots$
  Anche qui, $m_P(\mathcal{C}) = m \Leftrightarrow \forall$ derivata di ordine $\leq m-1$ è nulla, $\exists$ derivata di ordine m non nulla
  Per l'omogeneità di F, la condizione equivale a $P \in F$ con l'annullarsi di tutte le derivate di ordine inferiore.
- Le tangenti principali sono le rette r per cui (L,M) annulla $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f_{x^{m-k}y^k}(a,b) L^{m-k} M^k$.
  Si tratta di un polinomio omogeneo di grado m in L, M, per cui esiste almeno una tangente principale, e ne esistono al più $m = m_P(\mathcal{C})$, se le radici sono tutte distinte: $1 \leq \Sigma \leq m$.
  Se $\Sigma = m$, si parla di punto multiplo ordinario; se $\Sigma < m$, di punto multiplo non ordinario.
  In particolare, se $\Sigma = m = 2$, si parla di nodo, mentre se $\Sigma = m = 3$, si parla di cuspide.
  Il numero Σ è da intendersi come quantità di tangenti principali "distinte".
- Vediamo ora come ottenerle nella pratica. Supponiamo $P(a,b) = (0,0)$, e scriviamo $f(x,y)$ come somma di polinomi omogenei: $f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} F_i(x,y)$, dove F_i ha grado i. r per $(0,0)$ ha eq. $\begin{cases} x = Lt \\ y = Mt \end{cases}$
  Andando a sostituire in $f(x,y)$ e usando Taylor troviamo: $F_r(L,M) = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f_{x^{r-k}y^k}(0,0) L^{r-k} M^k$
  Sia $m = m_{(0,0)}(\mathcal{C})$. Allora $F_1(x,y) = \ldots = F_{m-1}(x,y) = 0$ e $F_m(x,y) \neq 0$, cioè $m_{(0,0)}(\mathcal{C})$ è il minimo grado dei monomi non nulli in $f(x,y)$ [$F_r(L,M)$ è il coefficiente di t^r].
  Inoltre le tangenti principali a $\mathcal{C}$ in $(0,0)$ hanno eq. $Mx + Ly = 0$ al variare di (L,M) tra le radici di $F_m(x,y) = 0$
  esse si ottengono dunque semplicemente uguagliando a zero i fattori lineari di $F_n(x,y) = 0$.
- Nel caso generale, $P(a,b) \neq (0,0)$, $r: \begin{cases} x = a + Lt \\ y = b + Mt \end{cases}$, poniamo $f(U+a, V+b) = g(U,V) = \sum_{i=0}^{n} G_i(U,V)$
  $f(X,Y) = f((x-a)+a, (y-b)+b) = g(x-a, y-b) = \sum_{i=0}^{n} G_i(x-a, y-b)$, con $G_0 = g(0,0) = f(a,b) = 0$.
  Si effettua un cambio di coordinate, spostando $P(a,b)$ in $(0,0)$, e poi si procede come prima.
  $P(a,b)$ ha molteplicità m se $G_m(x-a, y-b) \neq 0$; $G_m(x-a, y-b) = 0$ fornisce le tangenti principali.

FLESSI

- **Def.** $\mathcal{C}$ affine o proiettiva, $P \in \mathcal{C}$ semplice è detto <u>flesso</u> se $I(\mathcal{C}, \tau; P) \geq 3$, con τ retta tangente.
Il flesso è di specie k se $I(\mathcal{C}, \tau; P) = k+2$; se $k=1$, si parla di flesso ordinario.
- **Oss.** $\forall p \in \mathcal{C}$, $I(\mathcal{C}, r; P) \leq gr(\mathcal{C})$. Dunque una conica irriducibile non ha flessi, mentre una cubica irriducibile ha al più flessi ordinari. Ogni punto di una retta è flesso, coincidendo essa con la sua tangente.
Per ogni k esiste una curva con un flesso di tale specie: $y - x^{k+2} = 0$ ne ha uno così in $(0,0)$.
- **Prop.** Introduciamo la curva H hessiana, di equazione $\det[(F_{ij})] = 0$, $i = 0:2$, $j = 0:2$, grado $3(n-2)$, F_{ke} derivata seconda risp. $x_k x_e$. I flessi sono i punti non singolari in comune tra $\mathcal{C}$ e H.

Dim. $\Rightarrow$ Sia $P \in \mathcal{C}$, $P = [p_0 : p_1 : p_2]$, $Q = [q_0 : q_1 : q_2] \in \mathbb{P}^2$. Sviluppiamo $F(\lambda P + \mu Q)$ con Taylor:
$$F(\lambda P + \mu Q) = F(P) \cdot \lambda^n + \sum_i F_i(P) \cdot q_i \cdot \lambda^{n-1} \cdot \mu + \frac{1}{2} \sum_{i,j} F_{ij}(P) \cdot q_i \cdot q_j \cdot \lambda^{n-2} \cdot \mu^2 + \dots$$
P è un flesso di $\mathcal{C} \Leftrightarrow \sum_{i,j} F_{ij}(P) q_i q_j = 0 \quad \forall q \,/\, \sum_i F_i(P) q_i = 0$, cioè $\forall Q \in \tau$ in P di eq. $\sum_i F_i(P) x_i = 0$
P è un flesso $\Leftrightarrow$ τ è una componente della conica Γ di eq. $\sum_{i,j} F_{ij}(P) x_i x_j = 0 \Rightarrow \Gamma$ degenere $\Rightarrow H(P) = 0$.
$\Leftarrow$ $H(P) = 0 \Rightarrow \Gamma$ degenere $\Rightarrow \sum_{i,j} F_{ij}(P) p_i p_j = \sum_{i=0}^{2} \left[\sum_{j=0}^{2} F_{ij}(P) p_j \right] p_i = (n-1) \cdot \sum_j F_j(P) p_j = (n-1) n F(P) = 0 \Rightarrow P \in \Gamma$
La tangente a Γ in P ha equazione $\sum_{i,j} F_{jp}(P) p_i x_i = (n-1) \cdot \sum_i F_i(P) x_i$, ed è dunque proprio τ.
Poiché Γ è riducibile, τ è una componente di Γ, e pertanto P è un flesso.
- **Cor.** $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $\deg \mathcal{C} = n \geq 3$. Se $\mathcal{C}$ non ha ∞ flessi, ne ha al più $3n(n-2)$, e almeno 1 se non è singolare.
- **Prop.** $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ proiettività. Allora:
  - $\forall P \in \mathbb{P}^2$, $m_P(\mathcal{C}) = m_{T(P)}(T(\mathcal{C}))$. Dunque semplicità, molteplicità, ordinarietà, sono invarianti per T.
  - r tg. (tg. principale) a $\mathcal{C}$ in $P \Leftrightarrow T(r)$ tg. (tg. principale) a $T(\mathcal{C})$ in $T(P)$.
  - P flesso di specie k per $\mathcal{C} \Leftrightarrow T(P)$ flesso di specie k per $T(\mathcal{C})$
- **Oss.**
  - $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{A}^2 (\mathbb{P}^2)$. Allora, $\forall P \in \mathbb{A}^2(\mathbb{P}^2)$, $m_P(\mathcal{C}) + m_P(\mathcal{D}) = m_P(\mathcal{C} + \mathcal{D})$.
  - Se $\mathcal{C}$ è ridotta, le curve irriducibili che la compongono sono in numero finito, e dunque ogni curva ridotta possiede al più un numero finito di punti singolari.
  - Se $\mathcal{C}$ di grado n si decompone in rette passanti tutte per un punto P, allora $m_P(\mathcal{C}) = n$. Viceversa, se $\mathcal{C}$ di grado n possiede un punto P di molteplicità n, allora $\mathcal{C}$ si decompone in rette non necessariamente distinte passanti per P.

Dim. (di quest'ultima) Ogni retta che contiene P e un altro punto di $\mathcal{C}$ ha almeno $n+1$ punti di intersezione con $\mathcal{C} \Leftrightarrow$ ogni retta contenente P e un altro punto di $\mathcal{C}$ è una componente irriducibile di $\mathcal{C} \Leftrightarrow$ ogni componente irriducibile di $\mathcal{C}$ è una retta per P.

POLARITÀ

- Siano $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, $P = [p_0 : p_1 : p_2] \in \mathbb{P}^2$, $x + tP = [x_0 + tp_0 : x_1 + tp_1 : x_2 + tp_2]$
Consideriamo il polinomio $F(x + tP)$ e poniamo $t^r = 0$. Otteniamo una curva $\Gamma^r = \Gamma^r_P(\mathcal{C})$, detta r-esima polare di P rispetto a $\mathcal{C}$. Se il grado di $\mathcal{C}$ è n, segue:
  - $\deg(\Gamma^r) = n - r$
  - Γ^r ha eq. $\sum F_{i_1 \dots i_r}(x)\, p_i \cdots p_r = 0$, ed è definita per $0 \le r \le n-1$
  - $\Gamma^0 = \mathcal{C}$
  - Γ^1, prima polare, ha equazione $\sum_i F_i(x)\, p_i = 0$
- Prop. $\mathcal{C} \cap \Gamma^1_P(\mathcal{C})$ contiene i Q singolari e quelli per cui la tangente a $\mathcal{C}$ in Q contiene P.
Dim. $Q \in \mathcal{C} \cap \Gamma^1_P(\mathcal{C}) \iff F(Q) = \sum_i F_i(Q)\, p_i = 0$, cioè se $F_0(Q) = F_1(Q) = F_2(Q) = 0$, allora Q è singolare per $\mathcal{C}$, oppure $P \in$ retta tangente in Q a $\mathcal{C}$ di equazione $\sum F_i(Q)\, x_i = 0$.
- Quindi le tangenti condotte da P a $\mathcal{C}$ in suoi punti non singolari, sono le rette congiungenti P con i punti non singolari di $\mathcal{C}$ che stanno su $\Gamma^1_P(\mathcal{C})$, in numero di al più $n(n-1)$. Se $P \in \mathcal{C}$, allora $P \in \Gamma^1_P(\mathcal{C})$
Nel caso $n = 2$ (conica), si ha una relazione di polarità tra un punto e una retta.

GENERE

- Una curva $\mathcal{C}$ irriducibile di grado n possiede al più $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ punti doppi
- Def. Il genere g di una curva è: $g := \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta - \kappa$, con δ n° di nodi, κ n° di cuspidi.
Se $g = 0$, la curva è detta razionale, essendo esprimibile come $(x, y) = (\rho_1(\lambda)\rho_3(\lambda)^{-1}, \rho_2(\lambda)\rho_3(\lambda)^{-1})$.

SISTEMI LINEARI DI CURVE PIANE

- Sia $\hat{K} = \overline{K}$, $n \geq 1$ intero. Il sistema lineare di tutte le curve di grado n, indicato con Λ_n, è l'insieme contenente la totalità delle curve di grado n di $\mathbb{P}^2$.
- $\mathcal{C} \in \Lambda_n$ si può identificare con un punto di $\mathbb{P}(K[x]_n)$, se $K[x]_n = K[x_0, x_1, x_2]_n \subset K[x]$.
Tale spazio proiettivo ha dim. $\binom{2+n}{n} - 1 = \frac{1}{2}n(n+3)$; $\dim \Lambda_1 = 2$ (rette), $\dim \Lambda_2 = 5$ (coniche), $\dim \Lambda_3 = 9$ (cubiche).
- Λ sottospazio lineare di ~~dim.~~ Λ_n, di dim. r, è individuato da $r+1$ curve di eq. $F_0(x) = 0, \dots, F_r(x) = 0$.
Tali curve sono indipendenti, e ogni altra curva del sistema è c.l. di queste: $\sum_j \lambda_j F_j(x) = 0$.
- Un sistema lineare Λ può essere assegnato anche come intersezione di iperpiani di Λ_n; le loro equazioni sono lineari e omogenee nei coefficienti della curva variabile, e vengono chiamati condizioni lineari sulle curve del sistema lineare Λ_n.
- Comunque assegnate $M \leq \frac{n(n+3)}{2}$ condizioni lineari ($\dim \Lambda_n = \frac{n(n+3)}{2}$), esistono curve di grado n che le soddisfano, e formano un sistema lineare di dimensione almeno $\frac{n(n+3)}{2} - M$.

- La condizione più ovvia è data dal passaggio per un punto $P\,[p_0 : p_1 : p_2]$. Sia $F(x) = \sum_{i+j+k=n} v_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k = 0$ un polinomio omogeneo di grado n in x_0, x_1, x_2, allora $F(P) = 0 \Rightarrow \sum_{i+j+k=n} v_{ijk} p_0^i p_1^j p_2^k = 0$. Questa scrittura identifica un iperpiano di Λ_n; imponendo il passaggio per P con molteplicità r, $r \geq 1$, ~~cos~~ si trovano $\frac{r(r+1)}{2}$ condizioni lineari, corrispondenti all'annullarsi di tutte le derivate di ordine $r-1$.
- <u>Prop.</u> Siano $\{P_i\}_{i=1}^t$ punti assegnati, $\{r_i\}_{i=1}^t$ interi tali per cui $\frac{n(n+3)}{2} \geq \sum_{j=1}^t \binom{r_j+1}{2}$

  Allora $\exists$ curve di grado n passanti per i P_i, con le rispettive molteplicità almeno r_i, e la loro totalità costituisce un sistema lineare di dim. pari o superiore a $\frac{n(n+3)}{2} - \sum_{j=1}^t \binom{r_j+1}{2}$
- <u>Oss.</u> Considerando le solite curve, per 2 punti passa una retta ($n=1$, $M \leq 2$), per 5 punti passa almeno una conica ($n=2$, $M \leq 5$), per 9 punti passa almeno una cubica ($n=3$, $M \leq 9$)
- <u>Oss.</u> Se sui P_i vengono imposte condizioni indipendenti, la dim. è <u>esattamente</u> $\frac{n(n+3)}{2} - \sum_{j=1}^t \binom{r_j+1}{2}$
- <u>Def.</u> P ~~o sistema lineare A~~ è <u>punto base</u> di Λ sistema lineare se appartiene a tutte le sue curve.

  Φ_0 è <u>componente fissa</u> di Λ se è componente irriducibile di tutte le sue curve.
- <u>Es.</u> Se P_1, P_2, P_3 sono punti base su una retta, allora r è la componente fissa di $\Lambda(P_1, P_2, P_3)$.

  Inoltre ogni altro punto di r è un punto base.
- <u>Prop.</u> P punto base di un fascio Λ di dim. 1 $\Leftrightarrow$ P punto di intersezione di due sue curve qualsiasi

  <u>Dim.</u> ($\Rightarrow$) è ovvio. Per ($\Leftarrow$), siano $\mathcal{C}_0 : F_0(x) = 0$ e $\mathcal{C}_1 : F_1(x) = 0$ due curve qualsiasi del fascio.

  Allora $\mathcal{C} \in \Lambda \Leftrightarrow \mathcal{C} : \lambda \cdot F_0(x) + \mu \cdot F_1(x) = 0$, e dunque $\mathcal{C}$ contiene ogni punto $P \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_1$.
- Imponendo il passaggio delle curve di un fascio per un punto P qualsiasi diverso dai punti base, si trova un'equazione lineare omogenea in λ, μ che ammette soluzione unica: $\exists!\ \mathcal{C} \in \Lambda \,/\, P \in \mathcal{C}$.
- Più in generale, siano Λ sistema lineare di curve di grado n e dim. $r \geq 1$, $\{P_i\}_{i=1}^r$ r punti distinti presi in modo sufficientemente generale e tale per cui P_i non è punto base di $\Lambda \cap \Lambda_n(\{P_j\}_{j=1}^{i-1})$.

  Allora i $\{P_i\}$ impongono r condizioni indipendenti, e Λ è individuato da $r+1$ curve.

  Inoltre, la curva di Λ che passa per i $\{P_i\}$ ha equazione $\det[(F_i(P_j))] = 0$, ~~dove~~ ovvero la matrice ha l'entrata $F_i(P_j)$ alla riga i e colonna j, e dove gli indici vanno da 0 ad r, e infine $P_0 := X$.
- <u>Teor.</u> $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathbb{P}^2$, $\deg \mathcal{C}_1 = \deg \mathcal{C}_2 = n$, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ ha N ($\leq n^2$) punti distinti.

  Se $m \cdot n$ punti di $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ appartengono ad una curva irriducibile $\mathcal{D}$ di grado $m < n$, allora gli $N - m \cdot n$ punti rimanenti di $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ appartengono ad una curva di grado $n-m$.

  <u>Dim.</u> Sia $P \in \mathcal{D}$, e diverso dagli $m \cdot n$ punti di $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ che stanno su $\mathcal{D}$. Esisterà $\mathcal{C}$ appartenente al fascio individuato da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, che contiene P. Risulta $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = n \cdot m + 1$ punti, e dunque $\mathcal{C}$ ha una componente irriducibile con $\mathcal{D}$: $\mathcal{C} = \mathcal{D} + \mathcal{E}$, con $\deg \mathcal{E} = n - m$. $\mathcal{C}$ contiene gli N punti di $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, $\mathcal{D}$ ne contiene $n \cdot m$ di essi e nessuno dei rimanenti (altrimenti $\mathcal{D}$ sarebbe una componente irriducibile di $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, contro ipotesi), e dunque i rimanenti $N - m \cdot n$ sono contenuti in $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$.

CUBICHE

- lavoriamo nel campo $\mathbb{C}$, che è algebricamente chiuso.
- Teor. $\mathcal{C} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, cubica non singolare, è proiettivamente equivalente a $y^2 = x(x-1)(x-c)$, con $c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$

Dim. $\mathcal{C}$ possiede almeno un flesso P. Portiamolo in $[0:0:1]$ con una proiettività, cosicché la tangente di flesso sia $x_0 = 0$, e la curva assuma la forma $y^2 = g(x)$, con $g(x)$ polinomio di deg. 3.
- Infatti non ci sono nè y^3 (altrimenti $F([0:0:1]) \neq 0$), nè y^2x e yx^2 (altrimenti l'intersezione tra $x_0 = 0$ e $F = 0$ non sarebbe tripla). D'altro canto $g(x)$ non può avere una radice multipla α, altrimenti la curva sarebbe singolare in $(\alpha, 0)$, contro ipotesi.
- Sarà dunque $g(x) = a \cdot (x-\alpha_1) \cdot (x-\alpha_2) \cdot (x-\alpha_3)$, con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ distinti.
- Effettuando il cambio di coordinate $x = (\alpha_2 - \alpha_1)x' + \alpha_1$, $y = \sqrt{a \cdot (\alpha_2-\alpha_1)^3}\, y'$, otteniamo proprio $y'^2 = x'(x'-1)(x'-c)$, con $c = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_1}$

- Teor. • $\mathcal{C}$ cubica non singolare ha esattamente 9 flessi, e ogni retta che ne contiene 2, ne contiene 3.
  - Dati due flessi A e B di $\mathcal{C}$, sia C il terzo flesso allineato con loro.

  Allora $\exists\, \rho : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ proiettività tale per cui $\rho(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, $\rho(A) = B$, $\rho(B) = A$, $\rho(C) = C$.

Dim. • Basta provarlo per $y^2 = x(x-1)(x-c)$, o equivalentemente per $f(x,y) = 0$, con:

$$f(x,y) = y^2 - x^3 + (c+1)x^2 - cx \qquad h(x,y) = 8\left[(y^2+cx)(3x-(c+1)) - ((c+1)x-c)^2\right]$$

$$R(f, \tfrac{h}{8}) = 3x^4 - 4(c+1)x^3 + 6cx^2 - c^2$$ (rispetto ad y, con h curva hessiana di f).

$$\Delta(R(R,R')) = c^4((c+1)^2 - 4c)^2 = c^4(c-1)^4,$$ diverso da zero per $c \neq 0$ e $c \neq 1$.

- Dunque $R(x)$ ha 4 radici distinte, nessuna delle quali è nulla;
- f e h contengono y soltanto di grado 2, per cui (x,y) sol. comune $\iff$ $(x,-y)$ sol. comune.
- Ad ogni radice di $R(x)$ corrispondono due punti propri distinti in comune a $\mathcal{C}$ e ad H, poichè ogni (x,y) siffatto soddisfa $y \neq 0$, e dunque ci sono $4 \cdot 2 = 8$ flessi, più $[0:0:1]$, che fa 9.
- Osserviamo che i flessi $[0:0:1]$ e $[1:x:y]$ sono allineati con $[1:x:-y]$.
- Sia $C = [0:0:1]$, altrimenti si applichi una proiettività. Allora $A = (x,y)$, $B = (x,-y)$, e la proiettività cercata è $\rho([x_0:x_1:x_2]) = [x_0 : x_1 : -x_2]$.

- Teor. $\mathcal{C}$ cubica non singolare di $\mathbb{P}^2$, $P \in \mathcal{C}$ flesso. Allora $\mathcal{C}$ possiede esattamente quattro tangenti distinte che contengono P, inclusa la tangente in P, e il loro modulo è indipendente dalla scelta di P: $j(\mathcal{C}) = j(c) = \frac{(c^2-c+1)^2}{c^2(c-1)^2}$
- Cor. Due cubiche non singolari $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}' \subseteq \mathbb{P}^2$ sono proiettivamente equivalenti $\iff$ $j(\mathcal{C}) = j(\mathcal{C}')$.

  Si ha una corrispondenza biunivoca tra $M = \{$classi di equivalenza proiettiva di cubiche non singolari$\}$ e $\{j(c)$ con $c \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}\}$; poichè $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ è infinito, le classi di equivalenza di cubiche sono infinite.

CUBICHE SINGOLARI (caso irriducibile)

- Una cubica irriducibile possiede al più un punto singolare, che deve essere doppio, altrimenti, se triplo, la cubica si scompone in tre rette passanti per quel punto.
- Teor. Esistono due classi di equivalenza proiettiva di cubiche irriducibili e singolari, costituite da curve e identificate dai rappresentanti: $\cdot\, y^2 = x^2(x-1)$ [un nodo] $\cdot\, y^2 = x^3$ [cuspide ordinaria]
- Teor. Ogni cubica irriducibile ha almeno un flesso.
- Teor. Le cubiche riducibili si dividono in: ¦ /O ¦ /X ¦ / // ¦ /// ¦

STRUTTURA DI GRUPPO ABELIANO SU DI UNA CUBICA NON SINGOLARE

- Si definisce in modo puramente geometrico, una volta fissato un suo punto di flesso.
- Sia O esso (esiste per non singolarità). Definiamo un'operazione di somma tra due punti A e B nel seguente modo: sia la retta $\overline{AB}$, essa interseca la cubica (eventualmente nel complesso e/o all'infinito) una terza volta, e sia $R(A,B)$ la terza intersezione.

  Se $A = B$, consideriamo come retta la tangente. Definito ciò:

  $\cdot\, A + B = R(R(A,B), O)$ $\cdot\, A + A = R(O, \text{tangente in } A \text{ a } \mathcal{C})$

  Esistono elemento neutro (il punto O), e inverso $-A$, corrispondente a $R(-A, O)$.

  Valgono inoltre proprietà commutativa (seguendo da quella del risultante), e associativa.

  Dimostriamo quest'ultima: dobbiamo provare che $A+(B+C) = (A+B)+C$, cioè $R(A, B+C) = R(A+B, C)$.

  Consideriamo la cubica (degenere) $\mathcal{D}$, costituita dalle rette $\overline{AB}$, $\overline{A+B\ C}$, $\overline{O\ B+C}$.

  Abbiamo che $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{O, A, B, C, A+B, B+C, R(A,B), R(A+B,C), R(B,C)\}$

  Limitiamoci ora al caso in cui i 9 punti sono distinti. Naturalmente $B, C, R(B,C)$ sono allineati; gli altri sei punti stanno dunque su una conica, ed essendo $O, A+B, R(A,B)$ su di una retta, la conica è il prodotto di due rette, e anche $A, B+C, R(A+B, C)$ sono allineati.
- Dalla definizione di $+$ su $\mathcal{C}$ segue che 3 punti $A, B, C \in \mathcal{C}$ sono allineati $\Longleftrightarrow A+B+C = O$

CORRISPONDENZE I e V

- Sia $\mathbb{A}^n(K) = \mathbb{A}^n$ spazio affine di dim. n su K, $y_1, \dots, y_n$ coordinate affini, $K[y_1, \dots, y_n]$, allora $X \subseteq \mathbb{A}^n$ si dice <u>insieme algebrico affine</u>, dato $\mathfrak{A}$ ideale di $K[y_1, \dots, y_n]$, se:

$$X := V(\mathfrak{A}) := \{ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}^n \;/\; F(y) = 0 \quad \forall F \in \mathfrak{A} \}$$

V è una corrispondenza: $\{\mathfrak{A} \triangleleft K[x_1, \dots, x_n] \;/\; \mathfrak{A} \text{ ideale}\} \rightarrow \{X \subseteq \mathbb{A}^n \;/\; X \text{ insieme algebrico affine}\}$

- Se $K[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriano, $\mathfrak{A}$ è finitamente generato, e dunque $V(\mathfrak{A})$ è il luogo degli zeri di un numero finito di polinomi generatori di $\mathfrak{A}$: $\{F_i(y) = 0 \quad i = 1:m$.
  Se $\mathfrak{A} = (F)$ è ideale principale, allora $V(\mathfrak{A}) = V(F)$ è ipersuperficie.

- <u>Prop.</u>
  - $V(0) = \mathbb{A}^n$; $V(K[y_1, \dots, y_n]) = \emptyset$
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ideali di $K[y_1, \dots, y_n]$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \Rightarrow V(\mathfrak{A}) \supseteq V(\mathfrak{B})$, ovvero le inclusioni si invertono.
  - $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ideali di $K[y_1, \dots, y_n] \Longrightarrow V(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = V(\mathfrak{A}) \cup V(\mathfrak{B})$
  - $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ ideali di $K[y_1, \dots, y_n] \Rightarrow V(\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{A}_i)$

  <u>Dim.</u>
  - ovvia
  - basta considerare $V(\mathfrak{A})$ e $V(\mathfrak{B})$ come soluzioni di sistemi di equazioni.
  - ($\Rightarrow$) se per assurdo $y \in V(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$, ma $y \notin V(\mathfrak{A}) \cup V(\mathfrak{B})$ allora $\exists F \in \mathfrak{A}, G \in \mathfrak{B} \;/\; F(y) \neq 0, G(y) \neq 0 \Longrightarrow FG \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, ma $FG(y) \neq 0$, assurdo.
    ($\Leftarrow$) $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$, allora $V(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) \supseteq V(\mathfrak{A})$, $V(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) \supset V(\mathfrak{B})$, da cui la tesi.
  - ($\Rightarrow$) $\mathfrak{A}_i \subset \sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i \Rightarrow V(\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i) \subseteq V(\mathfrak{A}_i) \Rightarrow V(\sum_{i \in I} \mathfrak{A}) \subset \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{A}_i)$
    ($\Leftarrow$) $y \in \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{A}_i) \Rightarrow y$ annulla tutti i generatori di ciascun ideale $\mathfrak{A}_i$ $\Longrightarrow$ annulla tutti i polinomi $\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i \Rightarrow y \in V(\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i)$.

- <u>Prop.</u> Sia $\sqrt{\mathfrak{A}} = \{F \in K[y_1, \dots, y_n] \;/\; \exists t \in \mathbb{N} \;/\; F^t \in \mathfrak{A}\}$ radicale. Allora $V(\mathfrak{A}) = V(\sqrt{\mathfrak{A}})$

  <u>Dim.</u> ($\supseteq$) ovviamente $\mathfrak{A} \subset \sqrt{\mathfrak{A}}$, da cui è immediato $V(\mathfrak{A}) \supset V(\sqrt{\mathfrak{A}})$
  ($\subseteq$) $y \in V(\mathfrak{A})$, $G \in \sqrt{\mathfrak{A}} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N} \;/\; G^t \in \mathfrak{A} \Rightarrow 0 = (G^t)(y) = [G(y)]^t \Rightarrow G(y) = 0 \Rightarrow y \in V(\sqrt{\mathfrak{A}})$

- <u>Oss.</u> V è suriettiva, ma non iniettiva: esistono ideali per cui $\mathfrak{A} \neq \sqrt{\mathfrak{A}}$, ma come visto $V(\mathfrak{A}) = V(\sqrt{\mathfrak{A}})$. Tuttavia, considerando soltanto gli ideali radicali, ovvero quelli per cui $\mathfrak{A} = \sqrt{\mathfrak{A}}$, si può stabilire una corrispondenza "inversa" I tra insiemi algebrici affini X e ideali radicali.

- <u>Def.</u> $I(X) = \{F \in K[y_1, \dots, y_n] \;/\; F(y) = 0 \quad \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in X\}$. È un ideale radicale.

- <u>Prop.</u>
  - (i) $X \subseteq V(I(X))$
  - (ii) $\mathfrak{A} \triangleleft K[y_1, \dots, y_n] \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq I(V(\mathfrak{A}))$
  - (iii) X insieme algebrico affine $\Rightarrow X = V(I(X))$
  - (iv) X insieme algebrico affine, $X \subsetneq \mathbb{A}^n \Rightarrow I(X) \neq (0)$

N.B. Le '$\subset$' indicano inclusioni non strette (scrittura alternativa, $\subseteq$).

Dim. • (i) $\bar{y} \in X$. Si ha che $F(y)=0 \ \forall y \in X$, in particolare $F(\bar{y})=0 \quad \forall F \in I(X)$.

• (ii) $F \in A$. Se $y \in V(A)$, ogni polinomio di A si annulla in y, in particolare F: $F(y)=0 \ \forall y \in V(A)$.

• (iii) Per ipotesi $X = V(A)$. Per (ii), $A \subseteq I(V(A))$; segue $V(A) \supset V(I(V(A)))$, cioè $X \supset V(I(X))$

• (iv) $I(X) = (0) \Rightarrow V(I(X)) = V(0) = \mathbb{A}^n$, ma per (iii) $V(I(X)) = X$, dunque $X = \mathbb{A}^n$.

• Prop. • (v) $I(\mathbb{A}^n) = (0)$, se K è infinito • (vi) $I(\emptyset) = K[y_1, \dots, y_n]$

• (vii) $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{A}^n$, $X_1 \subset X_2 \Rightarrow I(X_1) \supset I(X_2)$ • (viii) $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{A}^n \Rightarrow I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$

Dim. • (v) Per induzione. Con $n=1$ è vera poichè F polinomio non nullo ha zeri in numero finito. Essendo $\mathbb{A}^1(K) = K$ infinito, F non può annullarsi su tutta la retta affine.
Sia ora vera per $n-1$, e proviamola per n. Se $F \in K[y_1, \dots, y_n]$, $F \notin K$, sarà:

$$F = \sum_{i=0}^{r} F_i(y_1, \dots, y_{n-1}) \cdot y_n^i, \quad \text{con } r \geq 1,\ F_i \in K[y_1, \dots, y_{n-1}],\ F_r \neq 0.$$

Per ipotesi induttiva F non si annulla su tutto $\mathbb{A}^{n-1}$, e dunque $\exists (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}$, tale che $F_r(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}) \neq 0$. Allora $\tilde{F}(y_n) = F(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}, y_n) \in K[y_n]$ ha grado r, possedendo perciò $\leq r$ radici in $\mathbb{A}^1$. Allora $\exists\ \bar{y}_n \,/\, \tilde{F}(\bar{y}_n) \neq 0$, il che altro non è che $F(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}, \bar{y}_n) \neq 0$, dunque $\exists (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in \mathbb{A}^n$ siffatti, e F non si annulla su tutto $\mathbb{A}^n$.

• (vii) Se $F \in I(X_2)$, allora $F(y)=0 \ \forall y \in X_2$, in particolare $\forall y \in X_1 \subset X_2$, e dunque $F \in I(X_1)$

• (viii) Se $F \in I(X_1 \cup X_2)$, allora $F(y) = 0 \ \forall y \in X_1$ e $\forall y \in X_2$, dunque $F \in I(X_1) \cap I(X_2)$

• Oss. $V \circ I$ dà l'identità, ma $I \circ V$ in generale no, con certezza si ha solo $A \subseteq I(V(A))$

Es. $K = \mathbb{R}$, $F(y) = y^2+1 \in \mathbb{R}[y]$: si ha $(F) \neq (0)$, ma $V(F) = \emptyset$; $I \circ V$ non può dare l'identità

Es. (F^t) con $t \geq 2$, $V(F^t) = V(F)$, $F \in I(V(F))$, ma $F \notin (F^t)$

Oss. Se $K = \bar{K}$, e valgono altre opportune condizioni, si può però garantire $I \circ V = id$

• Def. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ insieme algebrico affine è irriducibile se $X = X_1 \cup X_2$, i.a.a. $\Rightarrow X_1 = X$ o $X_2 = X$.

• Teor. Ogni X i.a.a. può essere scomposto come unione di X_i i.a.a. irriducibili in numero finito.

• Def. Se $X = \bigcup_{i \in J} X_i$ è tale per cui $X_i \not\subseteq X_j \ \forall i \neq j$, si parla di rappresentazione ridotta, e in questo caso gli insiemi algebrici X_i sono detti componenti irriducibili di X.

• Teor. Ogni insieme algebrico ammette un'unica rappresentazione finita ridotta.

• Prop. X insieme algebrico affine, $X \neq \emptyset \Rightarrow$ (X irriducibile $\Leftrightarrow$ $I(X)$ primo)

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Esistono $f_1, f_2 \in I(X)$ tali per cui $X_1 = V(f_1)$, $X_2 = V(f_2)$, con $X_1 \subsetneq X$, $X_2 \subsetneq X$. Se X è irriducibile, allora $X_1 \cup X_2 \subsetneq X$, ed esiste dunque $x \in X - X_1 \cup X_2$ tale che $f_1 f_2(x) \neq 0$. Allora $f_1 f_2 \notin I(X)$, e perciò $I(X)$ è primo.

$\boxed{\Leftarrow}$ Se X è riducibile, $X = X_1 \cup X_2$, e siano $f_1, f_2 \notin I(X)$ tali che $f_1(X_1) = 0$ e $f_2(X_2) = 0$
Stando $f_1 f_2 \in I(X)$, sarà $I(X)$ non primo.

 • Oss. Se K è infinito, allora $\mathbb{A}^n$ è irriducibile, essendo $I(\mathbb{A}^n) = (0)$.

• **Prop.** X insieme algebrico affine, $X \neq \emptyset \implies (X = \{a\} \iff I(X)$ massimale$)$

In particolare, $I(a) = (y_1 - a_1, \dots, y_n - a_n)$

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Sia $X = \{a\}$. Consideriamo la suriezione di valutazione $\pi_a : \begin{array}{l} K[y_1,\dots,y_n] \to K \\ F \mapsto F(a) \end{array}$.

Il suo nucleo altri non è che $I(X)$, ed essendo $\frac{K[y_1,\dots,y_n]}{\ker \pi_a} \simeq K$, $\ker \pi_a = I(X)$ è massimale.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $I(X)$ ideale massimale di $K[y_1,\dots,y_n]$, e $a \in V(I(X)) = X \neq \emptyset$. Consideriamo ancora il morfismo di valutazione π_a. Essendo $I(X)$ massimale segue a catena:

$X = V(I(X)) = \ker \pi_a = \{F \in K[y_1,\dots,y_n] \,/\, F(a) = 0\} = V(I(\{a\})) = \{a\}$.

$\boxed{\cdot}$ Proviamo ora che $I(a) = (y_1 - a_1, \dots, y_n - a_n)$. Sia $F \in K[y_1,\dots,y_n] \,/\, F(a) = 0$.

Dividiamo F per $y_1 - a_1, \dots, y_n - a_n$; risulta $F = \sum_{i=1}^{n} a_i (y_i - a_i) + r$, $\{a_i\}_{i=1}^{n} \in K[\{y_j\}_{j=1}^{r}]$, $r \in K$. Valutiamo F in a e troviamo che $F(a) = r = 0$, dunque $F \in (y_1 - a_1, \dots, y_n - a_n)$.

• **Principio** (di prolungamento delle identità algebriche). Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ i.a.a., $P \in K[y_1,\dots,y_n]$.

Se $P(y) = 0 \;\; \forall y \in \mathbb{A}^n \setminus X$, allora $P(y) = 0 \;\; \forall y \in \mathbb{A}^n$.

Dim. Siano tali ipotesi e $\mathbb{A}^n \setminus X \subseteq V(P)$. Allora $X \cup V(P) = \mathbb{A}^n$, con X e $V(P)$ i.a.a.

Ma $\mathbb{A}^n$ è irriducibile e $X \subsetneq \mathbb{A}^n$, $V(P)$ allora è uguale ad $\mathbb{A}^n$, e $P(y) = 0 \;\; \forall y \in \mathbb{A}^n$.

• **Def.** Una coppia $\left(X, \frac{K[y_1,\dots,y_n]}{I(X)}\right)$, con X ~~ins~~ i.a.a., $\frac{K[\dots]}{I(X)}$ K-algebra, è detta <u>varietà a.a.</u>

• **Es.** In $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$: $A_1 = (y^2+1)$ $V(A_1) = \emptyset$; $A_2 = (y^2-1)$ $V(A_2) = \{-1, 1\}$; $A_3 = (y^2 - 5y + 6, y^2 - 3y + 2)$ $V(A_3) = \{2\}$

In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$: $A_4 = (y_1^2 + y_2^2 - 1)$ $V(A_4) =$ circonferenza, di centro $C(0;0)$ e raggio $r = 1$.

$A_5 = (y_2^2 - y_1^2 - y_1^3)$ $V(A_5) =$ cubica; $A_6 = (P_1, P_2)$ $V(A_6) =$ punti di $\cap$ di P_1 e P_2.

In $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$: $A_7 = (y^2+1)$ $V(A_7) = \{i, -i\}$; $A_8 = (y^n - 1)$ $V(A_8) = \{$radici n-esime dell'unità$\}$

NULLSTELLENSATZ (Teorema degli zeri di Hilbert)

• **Lemma** $K = \overline{K}$ non numerabile, L estensione di K di dim. al più numerabile come spazio vettoriale $\implies K = L$

Dim. Poiché $K = \overline{K}$ per ipotesi, è sufficiente far vedere che L è algebrico su K. Se non lo fosse, esisterebbe un elemento $t \in L \setminus K$ trascendente su K, dunque un sottocampo di L isomorfo al campo delle funzioni razionali $K(T)$ su K, che conterrebbe in particolare la famiglia $\left\{\frac{1}{T-a}\right\}_{a \in K}$. Essendo K non numerabile, lo è anche questa famiglia; questa è anche linearmente indipendente, ovvero lo è su K ogni suo sottoinsieme finito, infatti $\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{T - a_i} = 0$, $\lambda_i \in K$, implica $\lambda_i = 0 \;\forall i$, moltiplicando per $T - a_j$ al variare di $j = 1:n$ e ottenendo le relazioni $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i (T - a_j)}{T - a_i} = 0$, da cui $\lambda_j = 0$ segue valutando in a_j. Dunque $[K(T) : K]$ è più che numerabile, essendo pari almeno alla cardinalità di K, ma essendo anche $K(T) \subseteq L$, si contraddice l'ipotesi iniziale, che vedeva $[L:K]$ al più numerabile.

NULLSTELLENSATZ - VERSIONE DEBOLE

· Teor. $\mathcal{A} \lhd \mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$, $\mathcal{A} \neq \mathbb{C}[y_1,\dots,y_n] \Rightarrow V(\mathcal{A}) \neq \emptyset$

Dim. È sufficiente provarlo per ideali massimali; sia $\mathfrak{m} \subseteq \mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$ un tale ideale. Allora $\frac{\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]}{\mathfrak{m}}$ è un campo contenente $\mathbb{C}$; ma $\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione al più numerabile, una cui base è data dall'insieme $\{y_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{i_n} / i_1,\dots,i_n \in \mathbb{N}\}$. Dunque $\frac{\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]}{\mathfrak{m}} = \mathbb{C}$. Possiamo ora considerare $F \in \mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$, e f l'immagine di F in $\frac{\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]}{\mathfrak{m}} = \mathbb{C}$.

Così, $F(y_1,\dots,y_n) = \sum c_{i_1,\dots,i_n} y_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{i_n}$, $f(y_1,\dots,y_n) = \overline{F(y_1,\dots,y_n)} = \overline{\sum c_{i_1,\dots,i_n} y_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{i_n}} =$
$= \sum c_{i_1,\dots,i_n} y_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{i_n} = F(y_1,\dots,y_n)$, e in particolare gli zeri sono in comune.

NULLSTELLENSATZ - VERSIONE FORTE

· Teor. $\mathcal{A} \lhd \mathbb{C}[y_1,\dots,y_n] \Rightarrow I(V(\mathcal{A})) = \sqrt{\mathcal{A}}$

Dim. Ovviamente $\sqrt{\mathcal{A}} \subseteq I(V(\mathcal{A}))$; dimostriamo che $I(V(\mathcal{A})) \subseteq \sqrt{\mathcal{A}}$, cioè $G \in I(V(\mathcal{A})) \Rightarrow \exists\, m / G^m \in \mathcal{A}$.

Poichè $\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$ è anello noetheriano, esistono $F_1,\dots,F_r \in \mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$ tali che $\mathcal{A} = (F_1,\dots,F_r)$.

Consideriamo ora $\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n,T]$, e in esso i polinomi $F_1,\dots,F_r, GT-1$.

Essi non hanno zeri in comune (in $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$), infatti se $F_1,\dots,F_r = 0$ per una data $(\underline{y},t)$, allora $y \in V(\mathcal{A})$, e $(GT-1)(\underline{y},t) = -1$. Dunque generano l'ideale $\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n,T]$, per il NSS debole.

Da ciò segue che $1 = \sum_{i=1}^{r} P_i F_i + Q(GT-1)$; passiamo ora al quoziente $\frac{\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n,T]}{GT-1}$ e identifichiamo tutti i polinomi con la loro immagine del quoziente, ottenendo:

$1 = \sum_{i=1}^{r} P_i(y_1,\dots,y_n,\frac{1}{G}) F_i$; ora, $\exists\, m \in \mathbb{N} / G^m = \sum_{i=1}^{r} H_i F_i$, e dunque $G^m \in \mathcal{A}$.

· Prop. Esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ e gli ideali massimali di $\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$.

Dim. La corrispondenza $a \leftrightarrow I\{a\}$, dove è noto che $I(\{a\})$ è un ideale massimale, è:

- iniettiva, poichè a punti distinti corrispondono ideali massimali distinti;
- suriettiva, cioè ogni ideale massimale di $\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$ è della forma $I(\{y\})$, con $y \in \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$.

Sia infatti $\mathfrak{m} \lhd_{max} \mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$; per il NSS debole, $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$, dunque $\exists\, y \in V(\mathfrak{m})$.

Considerando ora il morfismo di valutazione π_y: $\mathfrak{m} \subseteq \ker \pi_y$, poichè $\mathfrak{m}$ massimale, $\mathfrak{m} = \ker \pi_y = \{F \in \mathbb{C}[y_1,\dots,y_n] / F(y) = 0\} = I(\{y\})$

· Prop. Sia $F \in \mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$. Allora l'ipersuperficie $V(F)$ è irriducibile $\Leftrightarrow$ F è irriducibile

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ F riducibile $\Rightarrow F = G \cdot H$, appartenenti a $\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$, non costanti e irriducibili; così $V(F) = V(GH) = V(G) \cup V(H)$, chiusi non vuoti, $\neq$ da $V(F)$ per il NSS $\Rightarrow V(F)$ riducibile.

$\boxed{\Leftarrow}$ F irriducibile $\Rightarrow$ F primo (poichè $\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$ è UFD) $\Rightarrow (F)$ primo, quindi radicale.

Per il NSS $I(V(F)) = \sqrt{(F)} = (F)$; dunque $I(V(F))$ è primo, e $V(F)$ irriducibile.

TOPOLOGIA DI ZARISKI

- Gli insiemi algebrici affini verificano le proprietà dei chiusi di una topologia su $\mathbb{A}^n$, detta di Zariski. In particolare i chiusi principali sono le ipersuperfici $V(F)$; ogni altro chiuso è intersezione finita di chiusi principali, e una base per gli aperti è data dagli insiemi $\{y \in \mathbb{A}^n / F(y) \neq 0\}$, complementari dei chiusi principali, detti aperti principali e denotati anche $\mathbb{A}^n_F$ o $\mathbb{A}^n \setminus V(F)$.
- Si può indurre anche su ogni $X \subseteq \mathbb{A}^n$, prendendo come base $X_F = X \setminus V(F) = \{y \in X / F(y) \neq 0\}$
- Oss. La definizione di insieme algebrico affine irriducibile X coincide con quella topologica di spazio irriducibile, con X dotato della topologia indotta. In particolare $\mathbb{A}^n$ è topologicamente irriducibile, e quindi ogni aperto non vuoto è denso in $\mathbb{A}^n$; stessa cosa per X se è esso irriducibile.
- Prop. La topologia di Zariski: (i) non è T_2, (ii) è T_1, (iii) è compatta, (iv) su $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$, è meno fine di quella naturale su $\mathbb{C}$. Ricordiamo che T_2 = Hausdorff, T_1 = Fréchet.

Dim. • (i) Essendo ogni aperto non vuoto denso in $\mathbb{A}^n$, due non vuoti si intersecano sempre, e dunque non possono esistere intorni disgiunti.

• (ii) Siano $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$ due punti distinti di $\mathbb{A}^n$; consideriamo i polinomi: $F_y = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2$ e $F_z = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - z_i)^2$. Si ha $F_y(y) = F_z(z) = 0$, $F_y(z) \neq 0$, $F_z(y) \neq 0$. $\mathbb{A}^n_{F_y}$ è aperto di y, non contiene z; $\mathbb{A}^n_{F_z}$ è aperto di z, non contiene y.

• (iii) Sia per semplicità $K = \overline{K}$ (in realtà l'ipotesi non è necessaria, ma semplifica assumerla). Proviamo che $\mathbb{A}^n$ è compatto: da ogni ricoprimento aperto se ne può estrarre uno finito. Ragioniamo su un ricoprimento realizzato con aperti principali:

$$\mathbb{A}^n = \bigcup_\alpha \mathbb{A}^n_{F_\alpha} = \bigcup_\alpha (\mathbb{A}^n \setminus V(F_\alpha)) = \mathbb{A}^n \setminus \bigcap_\alpha V(F_\alpha)$$

Passando ai complementari, $\phi = \bigcap_\alpha V(F_\alpha) = V(\sum_\alpha (F_\alpha))$.

Per il NSS, $\sum_\alpha F(\alpha) = K[y_1, \dots, y_n]$, dunque $1 \in K$, e $1 = \sum_{i=1}^{s} a_i F_{\alpha_i}$, per opportuni a_i, F_{α_i}. Perciò $V(F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_s}) = V(\sum_{\alpha=1}^{s} F_{\alpha_i}) = \phi$, da cui $\bigcup_{i=1}^{s} \mathbb{A}_{F_{\alpha_i}} = \mathbb{A}^n$.

• (iv) È sufficiente dimostrare che i chiusi principali della topologia di Zariski sono anche chiusi della topologia naturale (implica la validità per tutti i chiusi). Sia $V(F) = \{y \in \mathbb{A}^n / F(y) = 0\} = F^{-1}(0)$. Essi sono chiusi nella topologia naturale di $\mathbb{C}^n$ poichè controimmagini di chiusi attraverso funzioni continue (i polinomi nella topologia naturale), e $\mathbb{C}^n$ è T_1.